Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2
11. Woche – PDGL erster Ordnung + Charakteristiken-Methode

A1 Geben Sie je ein Beispiel an:

(a) eine PDGL zweiter Ordnung,
(b) eine PDGL zweiter Ordnung, die keine gewöhnliche DGL ist,
(c) eine lineare PDGL,
(d) eine lineare PDGL mit konstanten / nicht-konstanten Koeffizienten,
(e) eine quasilineare PDGL,
(f) eine nichtlineare PDGL, die keine quasilineare PDGL ist.

Lineare PDGL erster Ordnung: Ansatz $\eta(x,y) = F(\frac{x}{y})$

A2 Man bestimme die allgemeine Lösung der homogenen linearen partiellen Differentialgleichung

$$x\, z_x + y\, z_y = 0\,.$$

Lineare PDGL erster Ordnung: Transformation nach Methode 2, s. Bem. 15.3 [1]

A3 Man bestimme die allgemeinen Lösungen folgender partieller Differentialgleichungen:

(a) $\dfrac{z_x}{\cos x} + \dfrac{z_y}{\cos y} = 1\,,$

(b) $xyz_x - y^2 z_y = x\,,$

Zusatz: $y\, u_x \;-\; x\, u_y = 0\,.$

Homogene PDGL erster Ordnung ohne Randbedingungen

A4 **Zusatz:** Im Fach Nichtlineare Regelungstechnik 1 muss zur Aufstellung einer bestimmten Normalform von Zustandsdarstellungen (konkret der Byrnes-Isidori-Normalform) eine PDGL folgender Art gelöst werden

$$\operatorname{grad} u(x,y)\cdot \underline{g}(x,y) = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}\cdot \underline{g}(x,y) = 0 \text{ bzw. } \operatorname{grad} u(x,y,z)\cdot \underline{g}(x,y,z) = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}\cdot \underline{g}(x,y,z) = 0 \qquad (*)$$

Bestimmen Sie für die folgenden Beispiele zunächst die allgemeine Lösung der PDGL (*) und überprüfen dann, ob die angegebene spezielle Lösung in Ihrer allgemeinen Lösung enthalten ist:

(a) $\underline{g}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ also ist die allgemeine Lösung von $u_x \cdot 0 + u_y \cdot 1 = 0$ gesucht. Eine spezielle Lösung ist $u(x,y) = x$.

(b) $\underline{g}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; spezielle Lösung $u(x,y,z) = y$.

[1] Sie werden die sogenannte Charakteristiken-Methode u.a. in der Vertiefung AMR in der LV Verteilt-parametrische Systeme wieder brauchen. Wir hoffen, dass Sie sich dann noch daran erinnern können :-).

(c) $\underline{g}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{2+z^2}{1+z^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; spezielle Lösung $u(x,y,z) = -x + z + \arctan(z)$.

(d) Hier $u = u(x,y,z,t)$: $\underline{g}(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cos(z) \end{pmatrix}$; eine spezielle Lösung ist $u(x,y,y,t) = x$;
noch eine spezielle Lösung ist $u(x,y,z,t) = -y\cos(z) + t$.

Homogene PDGL erster Ordnung mit Randbedingungen

A5 Gegeben ist die partielle Differentialgleichung $z_x + z_y = 0$.

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der PDGL und skizzieren Sie die Charakteristiken.

(b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung, die der Zusatzbedingung $z(x,0) = x$ genügt.

A6 Man bestimme diejenige Lösungsfläche $z(x,y)$ der folgenden partiellen Differentialgleichung, die im Gebiet $\Omega : x, y > 0$ die angegebene Randbedingung erfüllt:

$$x z_x - y z_y = 0\ , \qquad\qquad RB:\quad z(x,x) = x.$$

Überprüfen Sie, ob Ihre Lösung die PDGL und die Randbedingung erfüllt.

Zeichnen Sie einige Charakteristiken, das sind Kurven mit $\eta =$ konstant, in die x,y-Ebene. Auf diesen Kurven ist die Lösung der Rumpf-PDGL konstant, s. Bem. 15.3.

Markieren Sie in der x,y-Ebene die Kurve, auf der die 'Rand'bedingung vorgegeben ist.

Schneidet diese Kurve jede Charakteristik in genau einem Punkt, erfüllt also Bem. 15.5 ?