Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz (WIL B207, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (WIL C202, HA 42378)

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2 (inkl. Kurzlösung)
11. Woche – PDGL

PDGL als gewöhnliche DGL in einer Variablen

A1 Von den folgenden partiellen Differentialgleichungen bestimme man, falls möglich die Lösungen, die den angegebenen Zusatzbedingungen genügen:

a) $z_{yy} = 2$ mit Anfangsbedingungen: $z(x,0) = 1\,,\ z_y(x,0) = x\,;$

Zusatz b) $z_{xy} = 2x + 2y$ mit Randbedingungen: $z(x,0) = x\,,\ z(0,y) = y^2\,;$

Kurzlösung:

(a) $z = y^2 + xy + 1$

(b) $z_x = 2x\,y + y^2 + c_1(x) \longrightarrow z = x^2y + xy^2 + \int c_1(x)dx + c_2(y)$

Randbedingungen $\longrightarrow z = x^2y + xy^2 + x + y^2$

PDGL durch Substitution zu gewöhnlicher DGL

A2 Man bestimme die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$z_{xy} + z_x = x\,y\ ,$$

nachdem man sie durch die Substitution $p = z_x$ auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zurückgeführt hat.

Kurzlösung:

$$p(x,y) = \tilde{c}_1(x)\,e^{-y} - x + xy$$
$$z = \int p(x,y)\,dx = c_1(x)\,e^{-y} + \frac{x^2}{2}(y-1) + c_2(y)$$

Lineare PDGL erster Ordnung

A3 Vervollständigen Sie den Lückentext: Bei Methode 1 aus VL 15.2.1 werden für das zweidimensionale Problem $u(x,y)$ anstelle von x,y neue Koordinaten $\ldots,\ldots$ eingeführt. Von diesen wird eine, z.B. ξ so gewählt, dass ihr Gradient $(\xi_x,\ldots)$ stets senkrecht zum Vektor $(a,b)'$ ist, wobei a,b die … des linearen Teils der PDGL sind. Auf diese Weise wird erreicht, dass die PDGL in den neuen Koordinaten nur noch die Ableitung nach … Variablen enthält und mit Methoden gewöhnlicher … gelöst werden kann.

Formulieren Sie den Satz für ein dreidimensionales Problem $u(t,x,y)$.

A4 (a) u vs. $\tilde{u}$: In Bsp. 15.6 a wird einserseits $\tilde{u}(\xi, \eta)$ und andererseits $u(x, y)$ verwendet. Geben Sie $\tilde{u}(1,1)$ und $u(1,1)$ an.

(b) Machen Sie die Probe, ob die gefundene allgemeine Lösung $u(x, y)$ tatsächlich die PDGL in 15.6.a erfüllt.

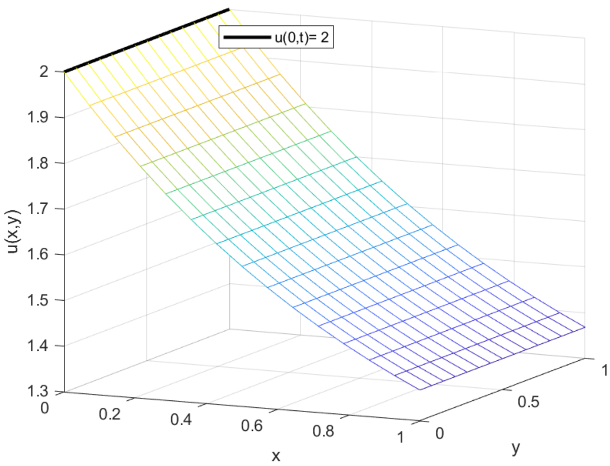
(c) Veranschaulichen Sie (3D-Graphik z.B. mit Matlab) die verschiedenen Lösungen von Bsp. 15.6 a für $C(t) = 0, 1, t$.

(d) Wie sähe die allgemeine Lösung von 15.6 a) aus, wenn $\eta_x = 0$ und $\eta_y = 1$ gewählt worden wäre. Ist die Lösung von c) mit $C(t) = 1$ in den Lösungen von d) enthalten?

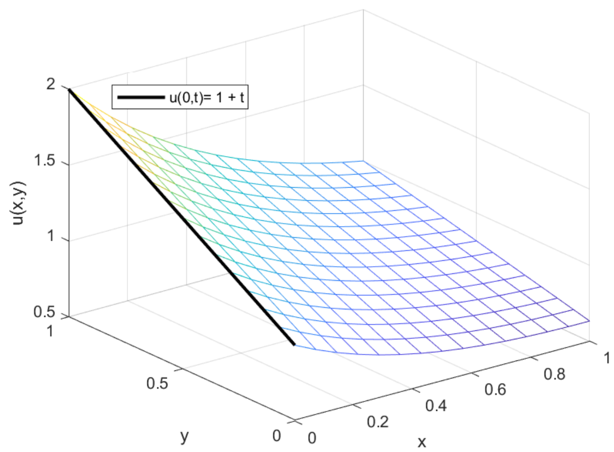
Kurzlösung:

(a) u vs. $\tilde{u}$: $\tilde{u}(1,1) = 1 + C(1)e^{-1} \neq u(1,1) = 1 + C(0)e^{-1}$.

(c) Nutze z.B. Matlab-file



$C(t) = 1$



$C(t) = t$

(d) $u(x, y) = 1 + C_d(x - y)e^{-y}$. Ja, mit $C_d(t) = \ldots$.

A5 Folgende partielle Differentialgleichungen sind unter Verwendung der angegebenen Substitutionen zu lösen:

$$\text{a)} \quad az_x + bz_y = 1 \quad (a \neq 0) \quad \text{mit} \quad \eta = x\,, \quad \xi = ay - bx\,;$$

$$\text{b)} \quad w_x + w_y + w_z = 0 \quad \text{mit} \quad \eta = x\,, \quad \xi = y - x\,, \quad \zeta = z - x\,.$$

Kurzlösung:

(a) $\tilde{z} = \frac{\eta}{a} + C(\xi) = \frac{x}{a} + C(ay - bx) = z$

(b) $w = \varphi(y - x\,,\; z - x)$.

Lineare PDGL erster Ordnung: Ansatz $\xi(x,y) = F(\frac{x}{y})$

A6 Man bestimme die allgemeine Lösung der homogenen linearen partiellen Differentialgleichung

$$x\, z_x + y\, z_y = 0\ .$$

Kurzlösung: $z(x,y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$;-)

Wiederholung Zusammenhang Dichte- und Verteilungsfunktion, E(X)

A7 Es sei f eine durch

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2(1-x), & 0 \le x \le 1, \\ 0 & -\infty < x < 0 \text{ und } 1 < x < \infty, \end{cases}$$

gegebene Funktion.

(a) Man bestimme α so, dass f die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgröße X ist.

(b) Man ermittle die Verteilungsfunktion F_X von X sowie $E(X)$ und $\mathrm{var}(X)$.

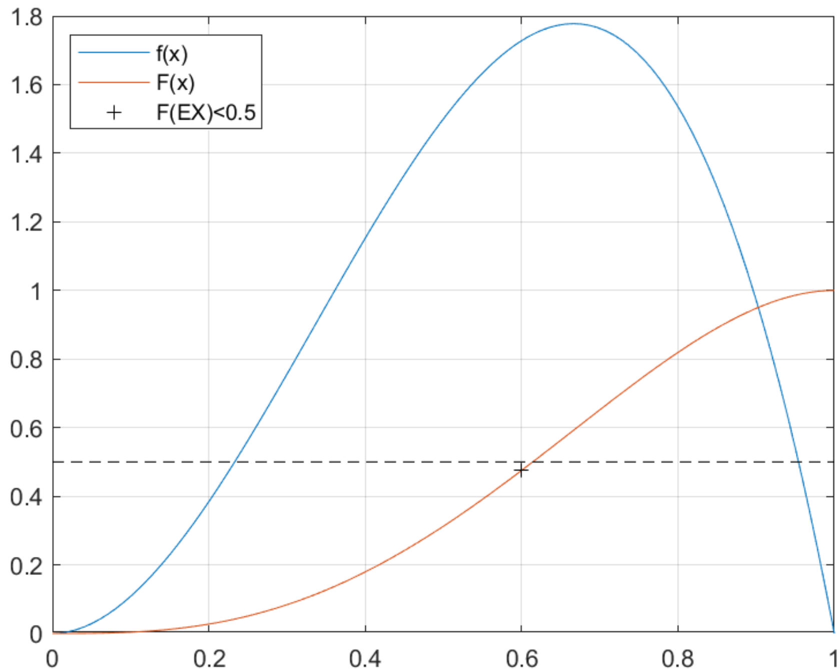
(c) Man berechne $P(X < \frac{1}{2})$ und $P(X < E(X))$.

Kurzlösung:

(a) $\alpha = 12$

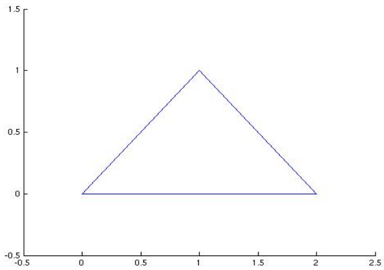
(b) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 12(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}) \quad \text{für} & 0 < x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases} \qquad E(X) = \frac{3}{5},\ \mathrm{var}(X) = \frac{1}{25}$

(c) $P(X < \frac{1}{2}) = 0.3125$, $P(X < E(X)) = 0.4752$.



Matlab-file

A8 Es sei $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ das Dreieck, das durch die Geraden $y = 0, y = x$ und $y = 2 - x$ begrenzt wird (s. Bild). Für welchen Wert des Parameters c ist die Funktion



$$p(x,y) = \begin{cases} cy & \text{falls } (x,y) \in \Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Wahrscheinlichkeitsdichte für den Zufallsvektor (X,Y) (der die Werte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ annimmt)?

Kurzlösung: Mit der Definition von Δ und von $p(x,y)$ ergibt sich:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dy\,dx \;=\; \int_{0}^{1}\int_{0}^{x} cy\,dy\,dx + \int_{1}^{2}\int_{0}^{2-x} cy\,dy\,dx = \frac{c}{3} \stackrel{!}{=} 1.$$

Folglich muss $c = 3$ gelten.