

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2 (inkl. Kurzlösung) 11. Woche – PDGL erster Ordnung + Charakteristiken-Methode

A1 Geben Sie je ein Beispiel an:

- (a) eine PDGL zweiter Ordnung,
- (b) eine PDGL zweiter Ordnung, die keine gewöhnliche DGL ist,
- (c) eine lineare PDGL,
- (d) eine lineare PDGL mit konstanten / nicht-konstanten Koeffizienten,
- (e) eine quasilineare PDGL,
- (f) eine nichtlineare PDGL, die keine quasilineare PDGL ist.

Lineare PDGL erster Ordnung: Ansatz $\eta(x, y) = F\left(\frac{x}{y}\right)$

A2 Man bestimme die allgemeine Lösung der homogenen linearen partiellen Differentialgleichung

$$x z_x + y z_y = 0 .$$

Kurzlösung: $z(x, y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$;-)

Lineare PDGL erster Ordnung: Transformation nach Methode 2, s. [Bem. 15.3](#) ¹

A3 Man bestimme die allgemeinen Lösungen folgender partieller Differentialgleichungen:

(a) $\frac{z_x}{\cos x} + \frac{z_y}{\cos y} = 1 ,$

(b) $xy z_x - y^2 z_y = x ,$

Zusatz: $y u_x - x u_y = 0 .$

Kurzlösung:

(a) z.B. $\eta = \sin x - \sin y, \xi = x, \dots u = \sin x + C(\sin x - \sin y) ,$

(b) z.B. $\eta = x \cdot y, \xi = x, \dots z = \frac{x}{2y} + C(x \cdot y) ,$

Zusatz: z.B. $\eta = x^2 + y^2, \xi = x, \dots u = C(x^2 + y^2) .$

¹Sie werden die sogenannte Charakteristiken-Methode u.a. in der Vertiefung AMR in der LV Verteilparametrische Systeme wieder brauchen. Wir hoffen, dass Sie sich dann noch daran erinnern können :-).

Homogene PDGL erster Ordnung ohne Randbedingungen

A4 Zusatz: Im Fach Nichtlineare Regelungstechnik 1 muss zur Aufstellung einer bestimmten Normalform von Zustandsdarstellungen (konkret der Byrnes-Isidori-Normalform) eine PDGL folgender Art gelöst werden

$$\text{grad } u(x, y) \cdot \underline{g}(x, y) = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \cdot \underline{g}(x, y) = 0 \text{ bzw. } \text{grad } u(x, y, z) \cdot \underline{g}(x, y, z) = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \cdot \underline{g}(x, y, z) = 0 \quad (*)$$

Bestimmen Sie für die folgenden Beispiele zunächst die allgemeine Lösung der PDGL (*) und überprüfen dann, ob die angegebene spezielle Lösung in Ihrer allgemeinen Lösung enthalten ist:

(a) $\underline{g}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ also ist die allgemeine Lösung von $u_x \cdot 0 + u_y \cdot 1 = 0$ gesucht. Eine spezielle Lösung ist $u(x, y) = x$.

(b) $\underline{g}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; spezielle Lösung $u(x, y, z) = y$.

(c) $\underline{g}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{2+z^2}{1+z^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; spezielle Lösung $u(x, y, z) = -x + z + \arctan(z)$.

(d) Hier $u = u(x, y, z, t)$: $\underline{g}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cos(z) \end{pmatrix}$; eine spezielle Lösung ist $u(x, y, z, t) = x$;
noch eine spezielle Lösung ist $u(x, y, z, t) = -y \cos(z) + t$.

Kurzlösung:

(c) Z.B. $u(x, y, z) = C(y, -x + z + \arctan(z))$ s. auch [NL1 VL7 Folie 23](#).

Homogene PDGL erster Ordnung mit Randbedingungen

A5 Gegeben ist die partielle Differentialgleichung $z_x + z_y = 0$.

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der PDGL und skizzieren Sie die Charakteristiken.

(b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung, die der Zusatzbedingung $z(x, 0) = x$ genügt.

A6 Man bestimme diejenige Lösungsfläche $z(x, y)$ der folgenden partiellen Differentialgleichung, die im Gebiet $\Omega : x, y > 0$ die angegebene Randbedingung erfüllt:

$$xz_x - yz_y = 0, \quad RB : \quad z(x, x) = x.$$

Überprüfen Sie, ob Ihre Lösung die PDGL und die Randbedingung erfüllt.

Zeichnen Sie einige Charakteristiken, das sind Kurven mit $\eta = \text{konstant}$, in die x, y -Ebene. Auf diesen Kurven ist die Lösung der Rumpf-PDGL konstant, s. [Bem. 15.3](#).

Markieren Sie in der x, y -Ebene die Kurve, auf der die 'Rand'bedingung vorgegeben ist.

Schneidet diese Kurve jede Charakteristik in genau einem Punkt, erfüllt also [Bem. 15.5](#) ?

Kurzlösung: $z(x, y) = (x \cdot y)^{\frac{1}{2}}$.