Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2

12. Woche – Lineare PDGL 2. Ordnung: Fourier-Methode

Hinweis: Inkompatibilität: in der VL ist t meist das erste Argument, hier das zweite.

PDGL erster Ordnung mit Anfangsbedingung

A1 Gegeben sei die partielle Differentialgleichung $\quad -x\, z_x + y\, z_y = x\, z^2$.

(a) Man ermittle die allgemeine Lösung dieser partiellen Differentialgleichung.

(b) Man ermittle die spezielle Lösung $z = z(x,\, y)$ für die Anfangsbedingung $z(x,\, 1) = e^{-x}$.

Klassifikation PDGL

A2 **Zusatz:** Geben Sie je ein Beispiel an:

(a) eine lineare PDGL zweiter Ordnung, dazu ein Rechteckgebiet Ω,

(b) eine homogene PDGL zweiter Ordnung mit inhomogener Randbedingung,

(c) eine inhomogene PDGL zweiter Ordnung mit homogener Randbedingung,

(d) eine parabolische PDGL mit Anfangsbedingung,

(e) eine hyperbolische PDGL mit Anfangsbedingung**en**.

In Bsp. 15.14 erfüllt jede der Teillösungen $u_k(t,x) = T_k(t) \cdot X_k(x)$ die PDGL.
Begründen Sie, weshalb auch deren Summe $u(t,x) = \sum_k u_k(t,x)$ die PDGL erfüllt.

Lineare PDGL 2. Ordnung: Produktansatz

A3 **Vorbereitung für A4 und A5**
Verschaffen Sie sich einen Überblick zu den Eigenfunktionen, die sich aus dem **Separationsansatz** für folgende PDGL zweiter Ordnung ergeben. Gehen Sie analog Bsp. 15.14 vor.

(a) $a^2 u_{tt} = u_{xx} \quad (u = u(x,t))\ t > 0,\ x \in (0,\pi)$ mit Randbedingung $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$,

(b) $a u_t = u_{xx} \quad (u = u(x,t))\ t > 0,\ x \in (0,\pi)$ mit Randbedingung $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$,

Zusatz: $-u_{xx} - u_{yy} = \mu u \quad (u = u(x,y))\ (x,y) \in (0,\pi)^2$ mit Randbedingung**en** $u(0,y) = u(\pi,y) = 0$ und $u(x,0) = u(x,\pi) = 0$.

A4 **Eigenfunktionen:** Man bestimme diejenigen Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

$$W_t = a^2\, W_{xx} \quad (W = W(x,t))\ t > 0,\ x \in (0,\pi),$$

die die Randbedingung $W(0,t) = W(\pi,t) = 0$ erfüllen und die Gestalt

$$W(x,t) = X(x) \cdot T(t) \qquad \text{haben.}$$

A5 Man bestimme die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$u_{xx} = 4 u_{tt} \qquad (u = u(x,t)) \ ,$$

die den Randbedingungen: $u(0,t) = u(1,t) = 0$
genügt.