Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2

12. Woche – Lineare PDGL 2. Ordnung: Fourier-Methode

Hinweis: Inkompatibilität: in der VL ist t meist das erste Argument, hier das zweite.

A1 Geben Sie je ein Beispiel an:

(a) eine lineare PDGL zweiter Ordnung, dazu ein Rechteckgebiet Ω,

(b) eine homogene PDGL zweiter Ordnung mit inhomogener Randbedingung,

(c) eine inhomogene PDGL zweiter Ordnung mit homogener Randbedingung,

(d) eine parabolische PDGL mit Anfangsbedingung,

(e) eine hyperbolische PDGL mit Anfangsbedingung**en**.

In Bsp. 15.14 erfüllt jede der Teillösungen $u_k(t,x) = T_k(t) \cdot X_k(x)$ die PDGL.
Begründen Sie, weshalb auch deren Summe $u(t,x) = \sum_k u_k(t,x)$ die PDGL erfüllt.

Lineare PDGL 2. Ordnung: Produktansatz

A2 Vorbereitung für A3 und A4
Verschaffen Sie sich einen Überblick zu den Eigenfunktionen, die sich aus dem **Separationsansatz** für folgende PDGL zweiter Ordnung ergeben. Gehen Sie analog Bsp. 15.14 vor.

(a) $a^2 u_{tt} = u_{xx} \quad (u = u(x,t))\ t > 0,\ x \in (0,\pi)$ mit Randbedingung $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$,

(b) $a u_t = u_{xx} \quad (u = u(x,t))\ t > 0,\ x \in (0,\pi)$ mit Randbedingung $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$,

(c) $-u_{xx} - u_{yy} = \mu u \quad (u = u(x,y))\ (x,y) \in (0,\pi)^2$ mit Randbedingung**en** $u(0,y) = u(\pi,y) = 0$ und $u(x,0) = u(x,\pi) = 0$.

A3 Eigenfunktionen: Man bestimme diejenigen Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

$$W_t = a^2 W_{xx} \quad (W = W(x,t))\ t > 0,\ x \in (0,\pi),$$

die die Randbedingung $W(0,t) = W(\pi,t) = 0$ erfüllen und die Gestalt

$$W(x,t) = X(x) \cdot T(t) \qquad \text{haben.}$$

A4 Man bestimme die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$u_{xx} = 4u_{tt} \qquad (u = u(x,t))\ ,\ t > 0,\ x \in (0,1)$$

die den Randbedingungen: $u(0,t) = u(1,t) = 0$ und den

Anfangsbedingungen: $u(x,0) = \sin 2\pi x$, und $\begin{cases} (a) & u_t(x,0) = 0 \\ (b) & u_t(x,0) = x(x-1) \end{cases}$

genügt.