Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz (WIL B207, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (WIL C202, HA 42378)

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2 (inkl. Kurzlösung)
12. Woche – PDGL erster Ordnung + Charakteristiken-Methode

A0 Geben Sie je ein Beispiel an:

(a) eine PDGL zweiter Ordnung,
(b) eine PDGL zweiter Ordnung, die keine gewöhnliche DGL ist,
(c) eine lineare PDGL,
(d) eine lineare PDGL mit konstanten / nicht-konstanten Koeffizienten,
(e) eine quasilineare PDGL,
(f) eine nichtlineare PDGL, die keine quasilineare PDGL ist.

Lineare PDGL erster Ordnung: Transformation nach Methode 2, s. Bem. 15.7 [1]

A1 Man bestimme die allgemeinen Lösungen folgender partieller Differentialgleichungen:

(a) $\dfrac{z_x}{\cos x} + \dfrac{z_y}{\cos y} = 1\,,$
(b) $xyz_x - y^2 z_y = x\,,$

Zusatz: $y\ u_x \ -\ x\ u_y = 0\,.$

Kurzlösung:

(a) z.B. $\xi = \sin x - \sin y, \eta = \sin x, \dots u = \sin x + C(\sin x - \sin y)\,,$
(b) z.B. $\xi = x \cdot y, \eta = x, \dots z = \frac{x}{2y} + C(x \cdot y)\ \ ,$

Zusatz: z.B. $\xi = x^2 + y^2, \eta = x, \dots u = C(x^2 + y^2)\,.$

Homogene PDGL erster Ordnung mit Randbedingungen

A2 Man bestimme die allgemeine Lösungsfläche der partiellen Differentialgleichung

$$z_x + z_y = 0\ ,$$

die die Randbedingung $z(x, 0) = x$ erfüllt.

Führen Sie die Probe aus, ob Ihre Lösung die PDGL und die Randbedingung erfüllt.

[1] Sie werden die sogenannte Charakteristiken-Methode u.a. in der Vertiefung AMR in der LV Verteilt-parametrische Systeme wieder brauchen. Wir hoffen, dass Sie sich dann noch daran erinnern können :-).

A3 Man bestimme diejenige Lösungsfläche der folgenden partiellen Differentialgleichung, die im Gebiet $\Omega : x, y > 0$ die angegebene Randbedingung erfüllt:

$$x z_x - y z_y = 0 \,, \qquad\qquad RB: \quad z(x,x) = x.$$

Überprüfen Sie, ob Ihre Lösung die PDGL und die Randbedingung erfüllt.

Zeichnen Sie einige Charakteristiken, das sind Kurven mit $\xi =$ konstant, in die x, y-Ebene. Auf diesen Kurven wäre die Lösung der Rumpf-PDGL konstant, s. Bem. 15.7, jedoch im Allgemeinen nicht die Lösung der PDGL - hier schon, da PDGL = Rumpf-PDGL.

Markieren Sie in der x, y-Ebene die Kurve, auf der die 'Rand'bedingung vorgegeben ist.

Schneidet diese Kurve jede Charakteristik in genau einem Punkt, erfüllt also Bem. 15.9 ?

Kurzlösung: $z(x,y) = (x \cdot y)^{\frac{1}{2}}$.

Nichtlineare PDGL erster Ordnung mit Randbedingungen

A4 Gegeben sei die partielle Differentialgleichung $\quad -x\, z_x + y\, z_y = x\, z^2$.

(a) Man ermittle die allgemeine Lösung dieser partiellen Differentialgleichung.

(b) Man ermittle die spezielle Lösung $z = z(x,\, y)$ für die Anfangsbedingung $z(x,\, 1) = e^{-x}$.

Kurzlösung: $z(x,y) = \frac{1}{x + e^{xy} - xy}$.

A5 **Vorbereitung der P-Aufgabe Übung 13**
Verschaffen Sie sich einen Überblick zu den Eigenfunktionen, die sich aus dem **Separationsansatz** für folgende PDGL zweiter Ordnung ergeben. Gehen Sie analog Bsp. 15.18 vor.

(a) $a^2 u_{tt} = u_{xx} \quad (u = u(x,t))\ t > 0,\ x \in (0,\pi)$ mit Randbedingung $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$,

(b) $a u_t = u_{xx} \quad (u = u(x,t))\ t > 0,\ x \in (0,\pi)$ mit Randbedingung $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$,

(c) $-u_{xx} - u_{yy} = \mu u \quad (u = u(x,y))\ (x,y) \in (0,\pi)^2$ mit Randbedingung**en** $u(0,y) = u(\pi,y) = 0$ und $u(x,0) = u(x,\pi) = 0$.

Kurzlösung:

(a) $u_k(x,t) = \sin(kx) \cdot \big(A_k \cos(\frac{k}{a}t) + B_k \sin(\frac{k}{a}t)\big)$,

(b) $u_k(x,t) = \cos(kx) \cdot C_k \exp(-\frac{k^2}{a}t)$,

(c) $u_{kl}(x,y) = \sin(kx) \cdot \sin(ly)$ mit $k^2 + l^2 = \mu$.

Wiederholung Binomialverteilung

A6 Die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Bedienung eines Webstuhles innerhalb von 10 Minuten ein Spulenwechsel vorzunehmen ist, betrage $p = \frac{1}{3}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Bedienung von zwölf unabhängig voneinander arbeitenden Webstühlen innerhalb von 10 Minuten bei

(a) genau vier Maschinen,

(b) allen Maschinen,

(c) keiner Maschine,

(d) höchstens drei Maschinen,

(e) mehr als zwei Maschinen

ein Spulenwechsel erforderlich ist?

Kurzlösung: (a) 0.2384 (c) 0.000002 (d) 0.0077 (b) 0.3931 (e) 0.8189.