

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2 (inkl. Kurzlösung)

12. Woche – Lineare PDGL 2. Ordnung: Fourier-Methode

Hinweis: Inkompatibilität: in der VL ist t meist das erste Argument, hier das zweite.

PDGL erster Ordnung mit Anfangsbedingung

A1 Gegeben sei die partielle Differentialgleichung $-x z_x + y z_y = x z^2$.

- (a) Man ermittle die allgemeine Lösung dieser partiellen Differentialgleichung.
- (b) Man ermittle die spezielle Lösung $z = z(x, y)$ für die Anfangsbedingung $z(x, 1) = e^{-x}$.

Kurzlösung: $z(x, y) = \frac{1}{x + e^{xy} - xy}$.

Klassifikation PDGL

A2 Zusatz: Geben Sie je ein Beispiel an:

- (a) eine lineare PDGL zweiter Ordnung, dazu ein Rechteckgebiet Ω ,
- (b) eine homogene PDGL zweiter Ordnung mit inhomogener Randbedingung,
- (c) eine inhomogene PDGL zweiter Ordnung mit homogener Randbedingung,
- (d) eine parabolische PDGL mit Anfangsbedingung,
- (e) eine hyperbolische PDGL mit Anfangsbedingungen.

In [Bsp. 15.14](#) erfüllt jede der Teillösungen $u_k(t, x) = T_k(t) \cdot X_k(x)$ die PDGL.

Begründen Sie, weshalb auch deren Summe $u(t, x) = \sum_k u_k(t, x)$ die PDGL erfüllt.

Lineare PDGL 2. Ordnung: Produktansatz

A3 Vorbereitung für A4 und A5

Verschaffen Sie sich einen Überblick zu den Eigenfunktionen, die sich aus dem **Separationsansatz** für folgende PDGL zweiter Ordnung ergeben. Gehen Sie analog [Bsp. 15.14](#) vor.

- (a) $a^2 u_{tt} = u_{xx}$ ($u = u(x, t)$) $t > 0$, $x \in (0, \pi)$ mit Randbedingung $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$,
- (b) $au_t = u_{xx}$ ($u = u(x, t)$) $t > 0$, $x \in (0, \pi)$ mit Randbedingung $u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0$,

Zusatz: $-u_{xx} - u_{yy} = \mu u$ ($u = u(x, y)$) $(x, y) \in (0, \pi)^2$ mit Randbedingungen $u(0, y) = u(\pi, y) = 0$ und $u(x, 0) = u(x, \pi) = 0$.

Kurzlösung:

- (a) $u_k(x, t) = \sin(kx) \cdot \left(A_k \cos\left(\frac{k}{a}t\right) + B_k \sin\left(\frac{k}{a}t\right) \right)$,
- (b) $u_k(x, t) = \cos(kx) \cdot C_k \exp\left(-\frac{k^2}{a}t\right)$,
- (c) $u_{kl}(x, y) = \sin(kx) \cdot \sin(ly)$ mit $k^2 + l^2 = \mu$.

A4 Eigenfunktionen: Man bestimme diejenigen Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

$$W_t = a^2 W_{xx} \quad (W = W(x, t)) \quad t > 0, \quad x \in (0, \pi),$$

die die Randbedingung $W(0, t) = W(\pi, t) = 0$ erfüllen und die Gestalt

$$W(x, t) = X(x) \cdot T(t) \quad \text{haben.}$$

Kurzlösung: Eigenfunktionen: $X(x) = \sin kx$, $k \in \mathbb{N}$,

$$W_k = C_k \sin(kx) \cdot e^{-a^2 k^2 t}; \quad C_k \text{ konstant.}$$

Bemerkung: $W = \sum_k W_k$, wobei die Koeffizienten C_k durch hier nicht gegebene Anfangsbedingungen, z.B. $W(x, 0)$, festgelegt werden.

Diskussion: Wie würde man mit AB: $W(x, 0) = 3 \sin x$ umgehen?

$W(x, 0) = \sum_k W_k$ Koeffizientenvergleich $\leadsto C_1 = 3, C_k = 0$ für $k \neq 1$.

A5 Man bestimme die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$u_{xx} = 4u_{tt} \quad (u = u(x, t)),$$

die den Randbedingungen: $u(0, t) = u(1, t) = 0$ genügt.

Kurzlösung: $u = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x \left(C_n \cos \frac{n\pi}{2} t + D_n \sin \frac{n\pi}{2} t \right).$