Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2

13. Woche – Homogene und inhomogene PDGL 2. Ordnung, Polarkoordinaten

Homogene PDGL 2. Ordnung: Produktansatz in kartesischen Koordinaten

A1 Betrachtet wird der Separationsansatz einer PDGL

$$u(x,t) = X(x)\,T(t).$$

Bestimmen Sie die Lösungen des Eigenwertproblems, s. Bsp. 15.14

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0,$$

die im angegebenen Gebiet Ω die jeweiligen Bedingungen erfüllen

(a) $\Omega: \ x \in (0,\pi),\ t > 0$, mit den Randbedingungen: $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$,
(b) $\Omega: \ x \in (0,\pi),\ t > 0$, mit den Randbedingungen: $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$,
(c) $\Omega: \ x \in (0,1),\ t > 0$, mit den Randbedingungen: $u(0,t) = u(1,t) = 0$,
(d) $\Omega: \ x \in (0,a),\ t > 0$, mit den Randbedingungen: $u(0,t) = u(a,t) = 0$.

A2 Man bestimme die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$u_{xx} = 4u_{tt} \qquad (u = u(x,t))\ ,\ t > 0,\ x \in (0,1)$$

die den Randbedingungen: $u(0,t) = u(1,t) = 0$ und den

Anfangsbedingungen: $u(x,0) = \sin 2\pi\, x$, und $\begin{cases} (a) & u_t(x,0) = 0 \\ (b) & u_t(x,0) = x(x-1) \end{cases}$

genügt.
Hinweis: Sie sollen ggf. benötigte Fourierkoeffizienten **nicht ausrechnen**. Es genügt, wenn Sie die Ansätze evtl. benötigter Integrale aufschreiben: Integrationsgrenzen und Integrand $\int_?^? ..?..\, d?$.

Homogene PDGL 2. Ordnung: Produktansatz in Polarkoordinaten

A3 Man bestimme die Lösung der ebenen Potentialgleichung

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

in einem Kreisringgebiet um den Nullpunkt mit den Radien $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, wenn folgende Bedingungen auf dem Rand des Kreisringes vorgegeben sind:

(a)
$$\begin{aligned} u(x,y) &= 0 \quad \text{auf der Kreislinie} \quad r_1 = 1 \\ u(x,y) &= 4 \quad \text{auf der Kreislinie} \quad r_2 = 2\ . \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} u(x,y) &= 0 \quad \text{auf der Kreislinie} \quad r_1 = 1 \\ u(x,y) &= y \quad \text{auf der Kreislinie} \quad r_2 = 2\ . \end{aligned}$$

Anleitung: Man wende auf die auf Polarkoordinaten transformierte Potentialgleichung

$$\hat{u}_{rr} + \frac{1}{r^2}\,\hat{u}_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}\,\hat{u}_r = 0 \quad \text{für} \quad \hat{u}(r,\varphi) = u\big[x(r,\varphi), y(r,\varphi)\big]$$

den Produktansatz $\hat{u}(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ an.

Inhomogene PDGL 2. Ordnung: Eigenfunktionen und Eigenwerte

A4 Berechnen Sie $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ von folgenden Funktionen:

(a) $u(x, y) = \sin(3x)\sin(2y)$,

(b) $u(x, y) = \sin(3\pi x)\cos(2\pi y)$,

(c) $u(x, y) = \cos(\frac{3\pi}{a}x)\sin(\frac{2\pi}{a}y)$,

(d) $u(x, y) = \cos(kx)\cos(ly)$,

Geben Sie zu (a) bis (d) je eine PDGL 2. Ordnung inkl. (eines möglichen) Rechteckgebietes und Randbedingungen dazu an, so dass die Funktion $u(x, y,)$ eine **Eigenfunktion** des PDGL-Eigenwert-Problems ist, s. Bsp. 15.17. Geben Sie jeweils den zugehörigen **Eigenwert** an.