Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2

13. Woche – Homogene und inhomogene PDGL 2. Ordnung, Polarkoordinaten

A1 Berechnen Sie $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ von folgenden Funktionen:

(a) $u(x, y) = \sin(3x)\sin(2y)$,

(b) $u(x, y) = \sin(3\pi x)\cos(2\pi y)$,

(c) $u(x, y) = \cos(\frac{3\pi}{a}x)\sin(\frac{2\pi}{a}y)$,

(d) $u(x, y) = \cos(kx)\cos(ly)$,

Geben Sie zu (a) bis (d) je eine PDGL 2. Ordnung inkl. (eines möglichen) Rechteckgebietes und Randbedingungen dazu an, so dass die Funktion $u(x, y,)$ eine **Eigenfunktion** des PDGL-Eigenwert-Problems ist, s. Bsp. 15.17.

Homogene PDGL 2. Ordnung: Produktansatz in Polarkoordinaten

A2 Man bestimme die Lösung der ebenen Potentialgleichung

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

in einem Kreisringgebiet um den Nullpunkt mit den Radien $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, wenn folgende Bedingungen auf dem Rand des Kreisringes vorgegeben sind:

(a)

$$\begin{aligned} u(x, y) &= 0 \quad \text{auf der Kreislinie} \quad r_1 = 1 \\ u(x, y) &= 4 \quad \text{auf der Kreislinie} \quad r_2 = 2\,. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} u(x, y) &= 0 \quad \text{auf der Kreislinie} \quad r_1 = 1 \\ u(x, y) &= y \quad \text{auf der Kreislinie} \quad r_2 = 2\,. \end{aligned}$$

Anleitung: Man wende auf die auf Polarkoordinaten transformierte Potentialgleichung

$$\hat{u}_{rr} + \frac{1}{r^2}\,\hat{u}_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}\,\hat{u}_r = 0 \quad \text{für} \quad \hat{u}(r, \varphi) = u\big[x(r, \varphi), y(r, \varphi)\big]$$

den Produktansatz $\hat{u}(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ an.

Inhomogene PDGL 2. Ordnung: Eigenfunktionen und Eigenwerte

A3 Betrachtet wird die Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$ auf dem Gebiet $\Omega = [0, a] \times [0, b]$.

(a) Geben Sie die Eigenfunktionen $u_{m,n}(x, y)$ für den Fall **homogener** Randbedingung

$$u(0, y) = u(a, y) = 0 \text{ sowie } u_y(x, 0) = u_y(x, b) = 0 \text{ an.}$$

Zeichnen Sie $X(x)$ sowie $Y(y)$ für $m = 1, 2, 3$ bzw. $n = 0, 1, 2$.

(b) Geben Sie die zugehörigen Eigenwerte $\mu_{m,n}$ an.

A4 Man bestimme die Torsionsfunktion $u(x, y)$ eines Stabes mit dem Querschnitt B:

$$0 \leq x \leq a \, ; \quad -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$$

als Lösung der Randwertaufgabe

$$\Delta u = -2 \, , \quad u(x, y)_{|Rand} = 0 \, .$$

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Eigenfunktionen als Lösung der Eigenwertgleichung $-\Delta u = \mu u$ unter Verwendung des Produktansatzes $u = X(x)Y(y)$ mit Berücksichtigung der Randbedingungen. Stellen Sie dann die Lösung als Reihe in den Eigenfunktionen dar.