Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz (WIL B207, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (WIL C202, HA 42378)

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2 (inkl. Kurzlösung)

13. Woche – Lineare PDGL 2. Ordnung: Fourier-Methode

Hinweis: Inkompatibilität: in der VL ist t meist das erste Argument, hier das zweite.

A0 Geben Sie je ein Beispiel an:

(a) eine lineare PDGL zweiter Ordnung, dazu ein Rechteckgebiet Ω,
(b) eine homogene PDGL zweiter Ordnung mit inhomogener Randbedingung,
(c) eine inhomogene PDGL zweiter Ordnung mit homogener Randbedingung,
(d) eine parabolische PDGL mit Anfangsbedingung,
(e) eine hyperbolische PDGL mit Anfangsbedingung**en**.

In Bsp. 15.18 erfüllt jede der Teillösungen $u_k(t,x) = T_k(t) \cdot X_k(x)$ die PDGL.
Begründen Sie, weshalb auch deren Summe $u(t,x) = \sum_k u_k(t,x)$ die PDGL erfüllt.

Lineare PDGL 2. Ordnung: Produktansatz

A1 **Eigenfunktionen:** Man bestimme diejenigen Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

$$W_t = a^2 W_{xx} \quad (W = W(x,t)) \; t > 0, \; x \in (0,\pi),$$

die die Randbedingung $W(0,t) = W(\pi,t) = 0$ erfüllen und die Gestalt

$$W(x,t) = X(x) \cdot T(t) \qquad \text{haben.}$$

Kurzlösung: Eigenfunktionen: $X(x) = \sin kx, \qquad k \in \mathbb{N},$

$$W_k = C_k \sin(k\,x) \cdot e^{-a^2k^2t} \; ; \qquad C_k \text{ konstant.}$$

Bemerkung: $W = \sum_k W_k$, wobei die Koeffizienten C_k durch hier nicht gegebene Anfangsbedingungen, z.B. $W(x,0)$, festgelegt werden.

Diskussion: Wie würde man mit AB: $W(x,0) = 3\sin x$ umgehen?
$W(x,0) = \sum_k W_k$ Koeffizientenvergleich $\rightsquigarrow C_1 = 3, C_k = 0$ für $k \neq 1$.

A2 Man bestimme die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$u_{xx} = 4u_{tt} \qquad (u = u(x,t)) \;,\; t > 0, \; x \in (0,1)$$

die den Randbedingungen: $u(0,t) = u(1,t) = 0$ und den

Anfangsbedingungen: $u(x,0) = \sin 2\pi\,x$, und $\begin{cases} (a) & u_t(x,0) = 0 \\ (b) & u_t(x,0) = x(x-1) \end{cases}$

genügt.

Kurzlösung:

(a) $u\big(x,t\big) = \cos\,\pi\,t \cdot \sin\,2\,\pi\,x,$

(b) $u(x,t) = \cos \pi t \cdot \sin 2\pi x - \frac{16}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^4} \sin \frac{(2m-1)\pi}{2} t \cdot \sin(2m-1)\pi x.$

Wiederholung Poisson-Verteilung

Poisson-Know-How: Poisson-Prozess = Prozess mit konstanter **R**ate $\lambda_R = \frac{\#\text{Ereignisse}}{\text{Zeit}}$.

- Interssiert #Ereignisse in Zeit T $\Rightarrow$ **Poisson-Verteilung** mit $\lambda_{\text{Poisson}} = \lambda_R \cdot T$.
- Interessiert Zeit bis zum Eintreffen des nächsten Ereignisses $\Rightarrow$ **Exponential-Verteilung** mit $\lambda = \lambda_R$.

A3 An einem Sommerabend werden durchschnittlich sechs Sternschnuppen pro Stunde beobachtet. Dabei kann davon ausgegangen werden, dass die Anzahl X_t der in der Zeit t beobachteten Sternschnuppen poissonverteilt ist.

(a) Geben Sie die (konstant angenommene) Rate ($\frac{\#\text{Ereignisse}}{\text{Zeit}}$) des 'Sternschnuppenprozesses' an.

(b) Wieviele Sternschnuppen sind in einer Viertelstunde zu erwarten?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass während einer Viertelstunde mindestens zwei Sternschnuppen beobachtet werden?

Kurzlösung: (a) Rate$= \frac{1}{10\text{min}}$, (b) $1,5$, (c) $P(X_{15} \geq 2) = 0.4422$.

A4 Während der Arbeit einer Maschine treten in zufälligen Zeitpunkten Ausfälle ein. Man nimmt an, dass die Anzahl der Zeitpunkte, in denen im Beobachtungsabschnitt $[0,t]$ Ausfälle eintreten, eine poissonverteilte Zufallsgröße mit dem Parameter $\lambda_R t$ ist. Die mittlere Anzahl der Ausfälle im Zeitabschnitt von 24 Stunden sei gleich 1.5. Man bestimme die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse

(a) A ... in 48 Stunden gibt es keinen Ausfall,

(b) B ... in einer Woche treten mindestens 3 Ausfälle ein.

Kurzlösung: (a) $P(A) = 0.04979$ (b) $P(B) = 0.9982$.