Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2 (inkl. Kurzlösung)

13. Woche – Homogene und inhomogene PDGL 2. Ordnung, Polarkoordinaten

A1 Berechnen Sie $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ von folgenden Funktionen:

(a) $u(x,y) = \sin(3x)\sin(2y)$,

(b) $u(x,y) = \sin(3\pi x)\cos(2\pi y)$,

(c) $u(x,y) = \cos(\frac{3\pi}{a}x)\sin(\frac{2\pi}{a}y)$,

(d) $u(x,y) = \cos(kx)\cos(ly)$,

Geben Sie zu (a) bis (d) je eine PDGL 2. Ordnung inkl. (eines möglichen) Rechteckgebietes und Randbedingungen dazu an, so dass die Funktion $u(x,y,)$ eine **Eigenfunktion** des PDGL-Eigenwert-Problems ist, s. Bsp. 15.17.

Homogene PDGL 2. Ordnung: Produktansatz in Polarkoordinaten

A2 Man bestimme die Lösung der ebenen Potentialgleichung

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

in einem Kreisringgebiet um den Nullpunkt mit den Radien $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, wenn folgende Bedingungen auf dem Rand des Kreisringes vorgegeben sind:

(a)

$$\begin{aligned} u(x,y) &= 0 \quad \text{auf der Kreislinie} \quad r_1 = 1 \\ u(x,y) &= 4 \quad \text{auf der Kreislinie} \quad r_2 = 2\,. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} u(x,y) &= 0 \quad \text{auf der Kreislinie} \quad r_1 = 1 \\ u(x,y) &= y \quad \text{auf der Kreislinie} \quad r_2 = 2\,. \end{aligned}$$

Anleitung: Man wende auf die auf Polarkoordinaten transformierte Potentialgleichung

$$\hat{u}_{rr} + \frac{1}{r^2}\,\hat{u}_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}\,\hat{u}_r = 0 \quad \text{für} \quad \hat{u}(r,\varphi) = u\big[x(r,\varphi), y(r,\varphi)\big]$$

den Produktansatz $\hat{u}(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ an.

Kurzlösung:

(a) $\hat{u}\big(r,\,\varphi\big) = \frac{4}{\ln 2}\ln r = \frac{4}{\ln 2}\ln\sqrt{x^2+y^2} = u\big(x,\,y\big)$

(b) $\hat{u}\big(r,\,\varphi\big) = \frac{4}{3}\sin\varphi\left(r - \frac{1}{r}\right) = \frac{4}{3}\,r\,\sin\varphi\left(1 - \frac{1}{r^2}\right) = \frac{4}{3}\,y\left(1 - \frac{1}{x^2+y^2}\right) = u\big(x,\,y\big)$

Inhomogene PDGL 2. Ordnung: Eigenfunktionen und Eigenwerte

A3 Betrachtet wird die Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$ auf dem Gebiet $\Omega = [0,a]\times[0,b]$.

(a) Geben Sie die Eigenfunktionen $u_{m,n}(x,y)$ für den Fall **homogener** Randbedingung

$$u(0,y) = u(a,y) = 0 \text{ sowie } u_y(x,0) = u_y(x,b) = 0 \text{ an.}$$

Zeichnen Sie $X(x)$ sowie $Y(y)$ für $m = 1,2,3$ bzw. $n = 0,1,2$.

(b) Geben Sie die zugehörigen Eigenwerte $\mu_{m,n}$ an.

A4 Man bestimme die Torsionsfunktion $u(x,y)$ eines Stabes mit dem Querschnitt B:

$$0 \le x \le a\,; \quad -\frac{b}{2} \le y \le \frac{b}{2}$$

als Lösung der Randwertaufgabe

$$\Delta u = -2\,, \quad u(x,y)_{|Rand} = 0\,.$$

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Eigenfunktionen als Lösung der Eigenwertgleichung $-\Delta u = \mu u$ unter Verwendung des Produktansatzes $u = X(x)Y(y)$ mit Berücksichtigung der Randbedingungen. Stellen Sie dann die Lösung als Reihe in den Eigenfunktionen dar.

Kurzlösung: $\varphi_{mn}(x,y) = \sin\frac{m\pi}{a}x \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}(y+\frac{b}{2})\right)$

$\Delta u = -2$ Nomenklatur Poisson-DGL: $-\Delta u = f$, also $f = +2$

$$f_{mn} = \frac{<f,\varphi_{mn}>}{\underbrace{<\varphi_{m,n},\varphi_{mn}>}_{\frac{a\cdot b}{2\cdot 2}}} = +2\underbrace{\int_0^a \sin\frac{m\pi}{a}x dx}_{\frac{2a}{m\pi}\text{ für } m \text{ ungerade}} \cdot \underbrace{\int_{y=-\frac{b}{2}}^{y=\frac{b}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{b}(y+\frac{b}{2})\right) dy}_{\frac{2b}{n\pi}\text{ für } n \text{ ungerade}}$$

$$u(x,y) = \sum_{\substack{m,n \\ \text{ungerade}}} \frac{\frac{8}{\cancel{ab}}\cdot\frac{2\cancel{a}}{m\pi}\frac{2\cancel{b}}{n\pi}}{\pi^2((\frac{m}{a})^2+(\frac{n}{b})^2)} \cdot \sin\frac{m\pi}{a}x \cdot \sin[\frac{n\pi}{b}(y+\frac{b}{2})\frac{n\pi}{b}]$$