

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2 (inkl. Kurzlösung)

13. Woche – Homogene und inhomogene PDGL 2. Ordnung, Polarkoordinaten

Homogene PDGL 2. Ordnung: Produktansatz in kartesischen Koordinaten

A1 Betrachtet wird der Separationsansatz einer PDGL

$$u(x, t) = X(x) T(t).$$

Bestimmen Sie die Lösungen des Eigenwertproblems, s. [Bsp. 15.14](#)

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0,$$

die im angegebenen Gebiet Ω die jeweiligen Bedingungen erfüllen

- (a) $\Omega : x \in (0, \pi), t > 0$, mit den Randbedingungen: $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$,
- (b) $\Omega : x \in (0, \pi), t > 0$, mit den Randbedingungen: $u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0$,
- (c) $\Omega : x \in (0, 1), t > 0$, mit den Randbedingungen: $u(0, t) = u(1, t) = 0$,
- (d) $\Omega : x \in (0, a), t > 0$, mit den Randbedingungen: $u(0, t) = u(a, t) = 0$.

A2 Man bestimme die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$u_{xx} = 4u_{tt} \quad (u = u(x, t)), \quad t > 0, \quad x \in (0, 1)$$

die den Randbedingungen: $u(0, t) = u(1, t) = 0$ und den

$$\text{Anfangsbedingungen: } u(x, 0) = \sin 2\pi x, \quad \text{und} \quad \begin{cases} (a) & u_t(x, 0) = 0 \\ (b) & u_t(x, 0) = x(x - 1) \end{cases}$$

genügt.

Hinweis: Sie sollen ggf. benötigte Fourierkoeffizienten **nicht ausrechnen**. Es genügt, wenn Sie die Ansätze evtl. benötigter Integrale aufschreiben: Integrationsgrenzen und Integrand $\int_{?}^{?} \dots d?$.

Kurzlösung:

- (a) $u(x, t) = \cos \pi t \cdot \sin 2\pi x$,
- (b) $u(x, t) = \cos \pi t \cdot \sin 2\pi x - \frac{16}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^4} \sin \frac{(2m-1)\pi}{2} t \cdot \sin(2m-1)\pi x$.

Homogene PDGL 2. Ordnung: Produktansatz in Polarkoordinaten

A3 Man bestimme die Lösung der ebenen Potentialgleichung

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

in einem Kreisringgebiet um den Nullpunkt mit den Radien $r_1 = 1, r_2 = 2$, wenn folgende Bedingungen auf dem Rand des Kreisringes vorgegeben sind:

(a)

$$\begin{aligned} u(x, y) &= 0 && \text{auf der Kreislinie } r_1 = 1 \\ u(x, y) &= 4 && \text{auf der Kreislinie } r_2 = 2. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} u(x, y) &= 0 && \text{auf der Kreislinie } r_1 = 1 \\ u(x, y) &= y && \text{auf der Kreislinie } r_2 = 2. \end{aligned}$$

Anleitung: Man wende auf die auf Polarkoordinaten transformierte Potentialgleichung

$$\hat{u}_{rr} + \frac{1}{r^2} \hat{u}_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} \hat{u}_r = 0 \quad \text{für} \quad \hat{u}(r, \varphi) = u[x(r, \varphi), y(r, \varphi)]$$

den Produktansatz $\hat{u}(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ an.

Kurzlösung:

$$(a) \quad \hat{u}(r, \varphi) = \frac{4}{\ln 2} \ln r = \frac{4}{\ln 2} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = u(x, y)$$

$$(b) \quad \hat{u}(r, \varphi) = \frac{4}{3} \sin \varphi \left(r - \frac{1}{r} \right) = \frac{4}{3} r \sin \varphi \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) = \frac{4}{3} y \left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = u(x, y)$$

Inhomogene PDGL 2. Ordnung: Eigenfunktionen und Eigenwerte

A4 Berechnen Sie $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ von folgenden Funktionen:

- (a) $u(x, y) = \sin(3x) \sin(2y),$
- (b) $u(x, y) = \sin(3\pi x) \cos(2\pi y),$
- (c) $u(x, y) = \cos\left(\frac{3\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a}y\right),$
- (d) $u(x, y) = \cos(kx) \cos(ly),$

Geben Sie zu (a) bis (d) je eine PDGL 2. Ordnung inkl. (eines möglichen) Rechteckgebietes und Randbedingungen dazu an, so dass die Funktion $u(x, y,)$ eine **Eigenfunktion** des PDGL-Eigenwert-Problems ist, s. [Bsp. 15.17](#). Geben Sie jeweils den zugehörigen **Eigenwert** an.