Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2
14. Woche – PDGL 2. Ordnung

A1 Im Fach Theoretische Elektrotechnik (TET) werden Sie dieses PDGL-Beispiel. betrachten.

(a) Klassifizieren Sie in dem Beispiel die PDGL (homogen/inhomogen) und die Zusatzbedingungen (homogen/inhomogen).

(b) Welche Aufgabe aus dem Ma4-Übungsprogramm behandelt eine PDGL mit der gleichen Klassifizierung?

A2 Im Fach Theoretische Elektrotechnik werden Sie die sogenannte Diffusionsgleichung der Magneto-Quasistatik kennen lernen. Klassifizieren Sie den PDGL-Typ (elliptisch, parabolisch, hyperbolisch).

Separationsansatz in TET-Aufgaben

A3 Diese Aufgaben entsprechen den TET1-Übungsaufgaben 7.1 bis 7.3

(a) Überführen Sie die PDGL $\Delta\Psi(x,y,z) + k^2\Psi(x,y,z) = 0$ in drei gewöhnliche Differentialgleichungen jeweils von x, y, z, wobei k eine Konstante ist.

(b) Überführen Sie die PDGL $\Delta\Psi(\rho,\varphi,z) + k^2\Psi(\rho,\phi,z) = 0$ in drei gewöhnliche Differentialgleichungen jeweils von ρ, ϕ, z, wobei k eine Konstante ist.

(c) Überführen Sie die PDGL $\Delta\Psi(r,\vartheta,\varphi) = 0$ in drei gewöhnliche Differentialgleichungen jeweils von r, ϑ, φ.

Hinweis:
Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten $\triangle = \underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)}_{=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, vgl. Bem. 15.15, Laplace in Polarkoordinaten,

Laplace-Operator in Kugelkoordinaten $\triangle = \underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)}_{=\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}} + \frac{1}{r^2}\left(\underbrace{\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}}_{=\frac{1}{\tan\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}+\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$

PDGL 2. Ordnung: Schwingung einer Saite

A4 Die gedämpften Schwingungen einer eingespannten Saite der Länge ℓ werden durch die partielle Differentialgleichung

$$u_{tt} + 2\,c\,u_t = a^2\,u_{xx}$$

beschrieben. Dabei stellt $2c$ den auf die Längeneinheit bezogenen Dämpfungsfaktor dar; es gelte $0 < \ell\,c < a\,\pi$ (schwache Dämpfung).
Unter Verwendung des Separationsansatzes ermittle man die Lösung der Differentialgleichung, die folgenden Anfangs- und Randbedingungen genügt:

$$u(x,0) = f(x) = A\,\sin\frac{\pi}{\ell}x\ , \quad u_t(x,0) = g(x) = 0\ , \quad u(0,t) = u(\ell,t) = 0\ .$$