Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz (WIL B207, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (WIL C202, HA 42378)

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2 (inkl. Kurzlösung)
14. Woche – PDGL

A0 Berechnen Sie $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ von folgenden Funktionen:

(a) $u(x, y) = \sin(3x)\sin(2y)$,
(b) $u(x, y) = \sin(3\pi x)\cos(2\pi y)$,
(c) $u(x, y) = \cos(\frac{3\pi}{a}x)\sin(\frac{2\pi}{a}y)$,
(d) $u(x, y) = \cos(kx)\cos(ly)$,

Geben Sie zu (a) bis (d) je eine PDGL 2. Ordnung inkl. (eines möglichen) Rechteckgebietes und Randbedingungen dazu an, so dass die Funktion $u(x, y,)$ eine **Eigenfunktion** des PDGL-Eigenwert-Problems ist, s. Bsp. 15.21.

Homogene PDGL 2. Ordnung: Produktansatz in Polarkoordinaten

A1 Man bestimme die Lösung der ebenen Potentialgleichung

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

in einem Kreisringgebiet um den Nullpunkt mit den Radien $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, wenn folgende Bedingungen auf dem Rand des Kreisringes vorgegeben sind:

(a)
$$\begin{aligned} u(x, y) &= 0 \quad \text{auf der Kreislinie} \quad r_1 = 1 \\ u(x, y) &= 4 \quad \text{auf der Kreislinie} \quad r_2 = 2\,. \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} u(x, y) &= 0 \quad \text{auf der Kreislinie} \quad r_1 = 1 \\ u(x, y) &= y \quad \text{auf der Kreislinie} \quad r_2 = 2\,. \end{aligned}$$

Anleitung: Man wende auf die auf Polarkoordinaten transformierte Potentialgleichung

$$\hat{u}_{rr} + \frac{1}{r^2}\,\hat{u}_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}\,\hat{u}_r = 0 \quad \text{für} \quad \hat{u}(r, \varphi) = u\big[x(r, \varphi), y(r, \varphi)\big]$$

den Produktansatz $\hat{u}(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ an.

Kurzlösung:

(a) $\hat{u}(r,\,\varphi) = \frac{4}{\ln 2}\ln r = \frac{4}{\ln 2}\ln\sqrt{x^2+y^2} = u(x,\,y)$

(b) $\hat{u}(r,\,\varphi) = \frac{4}{3}\sin\,\varphi\left(r - \frac{1}{r}\right) = \frac{4}{3}\,r\,\sin\,\varphi\left(1 - \frac{1}{r^2}\right) = \frac{4}{3}\,y\left(1 - \frac{1}{x^2+y^2}\right) = u(x,\,y)$

Inhomogene PDGL 2. Ordnung: Eigenfunktionen und Eigenwerte

A2 Betrachtet wird die Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$ auf dem Gebiet $\Omega = [0, a] \times [0, b]$.

(a) Geben Sie die Eigenfunktionen $u_{m,n}(x, y)$ für den Fall **homogener** Randbedingung

$$u(0, y) = u(a, y) = 0 \text{ sowie } u_y(x, 0) = u_y(x, b) = 0 \text{ an.}$$

Zeichnen Sie $X(x)$ sowie $Y(y)$ für $m = 1, 2, 3$ bzw. $n = 0, 1, 2$.

(b) Geben Sie die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_{m,n}$ an.

Kurzlösung:

(a) Eigenfunktionen $u_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y$

(b) zugehörige Eigenwerte $\lambda_{mn} = \pi^2 \left((\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2 \right)$

Diskussion: Wie würde man mit Inhomogenität $f(x, y) = 3 \sin \frac{\pi}{a} x \cos \frac{2\pi}{b} x$ umgehen?
Fourierreihe von f: $f = \sum_{m,n} f_{m,n} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y$, Koeffizientenvergleich $\rightsquigarrow f_{1,2} = 3$, $f_{m,n} = 0$ für $m \neq 1 \vee n \neq 2$.
Mit $u = \sum_{m,n} C_{m,n} u_{m,n}$ folgt dann

$$C_{m,n} = \frac{f_{m,n}}{\lambda_{m,n}} = \begin{cases} \frac{3}{\lambda_{1,2}} = \frac{3}{\pi^2 \left((\frac{1}{a})^2 + (\frac{2}{b})^2 \right)} & , \quad m = 1, n = 2 \\ 0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

A3 Man bestimme die Torsionsfunktion $u(x, y)$ eines Stabes mit dem Querschnitt B:

$$0 \leq x \leq a \; ; \quad -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$$

als Lösung der Randwertaufgabe

$$\Delta u = -2 \; , \quad u(x, y)_{|Rand} = 0 \; .$$

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Eigenfunktionen als Lösung der Eigenwertgleichung $-\Delta u = \lambda u$ unter Verwendung des Produktansatzes $u = X(x)Y(y)$ mit Berücksichtigung der Randbedingungen. Stellen Sie dann die Lösung als Reihe in den Eigenfunktionen dar.

Kurzlösung: $\varphi_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \left(\frac{n\pi}{b} (y + \frac{b}{2}) \right)$
$\Delta u = -2$ Nomenklatur Poisson-DGL: $-\Delta u = f$, also $f = +2$

$$f_{mn} = \frac{< f, \varphi_{mn} >}{\underbrace{< \varphi_{m,n}, \varphi_{mn} >}_{\frac{a \cdot b}{2 \cdot 2}}} = +2 \underbrace{\int_0^a \sin \frac{m\pi}{a} x dx}_{\frac{2a}{m\pi} \text{ für } m \text{ ungerade}} \cdot \underbrace{\int_{y=-\frac{b}{2}}^{y=\frac{b}{2}} \sin \left(\frac{n\pi}{b} (y + \frac{b}{2}) \right) dy}_{\frac{2b}{n\pi} \text{ für } n \text{ ungerade}}$$

$$u(x, y) = \sum_{\substack{m,n \\ \text{ungerade}}} \frac{\frac{8}{\cancel{ab}} \cdot \frac{2\cancel{a}}{m\pi} \frac{2\cancel{b}}{n\pi}}{\pi^2 ((\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2)} \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin[\frac{n\pi}{b} (y + \frac{b}{2}) \frac{n\pi}{b}]$$

Welche Verteilung verwenden Sie hier? - Sie sollen die Aufgabe nicht lösen.

A4 Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Samenkorn nicht keimt, sei $p = 0.01$. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 100 Körnern mindestens 3 nicht keimen?

Kurzlösung: $P(k \geq 3) = 1 - P(0) - P(1) - P(2)$
mit Binomialverteilung: ≈ 0.07937, mit Poissonverteilung: ≈ 0.08030.

Wiederholung Normalverteilung

A5 Die Zufallsgröße X sei normalverteilt mit $\mu = 1$ und $\mathrm{var}(X) = \sigma^2 = 4$. Man ermittle

(a) $P(X \geq 1)$ (b) $P(X < 2)$ (c) $P(|X| > 4)$
(d) $P(0 \leq X < 2)$ (e) $P(|X - 1| > 6)$ (f) $P(0 \leq X | X < 2)$

und man bestimme die Konstante α so, dass gilt

(g) $P(X < \alpha) = 0.5$ (h) $P(X \geq \alpha) = 0.0548$ (i) $P(|X - \mu| < \alpha) = 0.95$.

Hinweis: Arbeiten Sie bewusst mit der Notation der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung, Φ, bzw. deren Umkehrfunktion Φ^{-1}.

Kurzlösung: (a) 0.5 (b) 0.6915 (c) 0.0730 (d) 0.3830 (e) 0.0027
(f) $\frac{P(0 \leq X < 2)}{P(X<2)} = \frac{(d)}{(b)}$ (g) 1 (h) 4.2 (i) 3.92.

A6 Bei einer Lieferung von Kondensatoren sei deren Kapazität K normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 200$ (in μF) und der Varianz $\mathrm{var}(K) = \sigma^2 = 25$ (in $\mu\mathrm{F}^2$). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kondensator **fehlerbehaftet** ist, wenn die Kapazität K der Kondensatoren

(a) mindestens 198 μF betragen muss,

(b) höchstens 202 μF betragen darf,

(c) maximal um 5 μF vom Sollwert 200 μF abweichen darf?

(d) Wie müssen die Toleranzgrenzen 200-α (in μF) und 200+α (in μF) gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines fehlerbehafteten Kondensators, d.h. $|K - 200| > \alpha$, kleiner als 0.001 ist?

Hinweis: Arbeiten Sie bewusst mit der Notation der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung, Φ, bzw. deren Umkehrfunktion Φ^{-1}.

Kurzlösung: (a) 0.3446 (b) 0.3446 (c) 0.3173 (d) $\alpha \geq 16.45$ (in μF).