Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2
Wiederholung – Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wiederholung Zusammenhang Dichte- und Verteilungsfunktion, E(X)

A1 Es sei f eine durch

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2(1-x), & 0 \le x \le 1, \\ 0 & -\infty < x < 0 \text{ und } 1 < x < \infty, \end{cases}$$

gegebene Funktion.

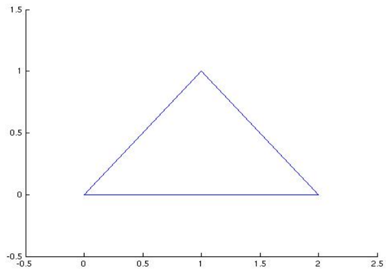
(a) Man bestimme α so, dass f die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgröße X ist.

(b) Man ermittle die Verteilungsfunktion F_X von X sowie $E(X)$ und $\text{var}(X)$.

(c) Man berechne $P(X < \frac{1}{2})$ und $P(X < E(X))$.

A2 Es sei $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ das Dreieck, das durch die Geraden $y = 0, y = x$ und $y = 2 - x$ begrenzt wird (s. Bild). Für welchen Wert des Parameters c ist die Funktion

$$p(x, y) = \begin{cases} cy & \text{falls } (x, y) \in \Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



eine Wahrscheinlichkeitsdichte für den Zufallsvektor (X, Y) (der die Werte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ annimmt)?

Wiederholung Poisson-Verteilung

Poisson-Know-How: Poisson-Prozess = Prozess mit konstanter **R**ate $\lambda_R = \frac{\#\text{Ereignisse}}{\text{Zeit}}$.

- Interssiert #Ereignisse in Zeit T $\Rightarrow$ **Poisson-Verteilung** mit $\lambda_{\text{Poisson}} = \lambda_R \cdot T$.
- Interessiert Zeit bis zum Eintreffen des nächsten Ereignisses $\Rightarrow$ **Exponential-Verteilung** mit $\lambda = \lambda_R$.

A3 An einem Sommerabend werden durchschnittlich sechs Sternschnuppen pro Stunde beobachtet. Dabei kann davon ausgegangen werden, dass die Anzahl X_t der in der Zeit t beobachteten Sternschnuppen poissonverteilt ist.

(a) Geben Sie die (konstant angenommene) Rate $(\frac{\#\text{Ereignisse}}{\text{Zeit}})$ des 'Sternschnuppenprozesses' an.

(b) Wieviele Sternschnuppen sind in einer Viertelstunde zu erwarten?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass während einer Viertelstunde mindestens zwei Sternschnuppen beobachtet werden?

A4 Während der Arbeit einer Maschine treten in zufälligen Zeitpunkten Ausfälle ein. Man nimmt an, dass die Anzahl der Zeitpunkte, in denen im Beobachtungsabschnitt $[0, t]$ Ausfälle eintreten, eine poissonverteilte Zufallsgröße mit dem Parameter $\lambda_R t$ ist. Die mittlere Anzahl der Ausfälle im Zeitabschnitt von 24 Stunden sei gleich 1.5. Man bestimme die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse

(a) A ...in 48 Stunden gibt es keinen Ausfall,

(b) B ...in einer Woche treten mindestens 3 Ausfälle ein.

Mal über die λs in folgenden Aufgaben nachdenken

A5 Während der Arbeit einer Maschine treten in zufälligen Zeitpunkten Ausfälle ein. Man nimmt an, dass die Anzahl der Zeitpunkte, in denen im Beobachtungsabschnitt $[0, t]$ Ausfälle eintreten, eine poissonverteilte Zufallsgröße mit dem Parameter λt ist. Die mittlere Anzahl der Ausfälle im Zeitabschnitt von 24 Stunden sei gleich 1.5. Man bestimme die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse

(a) A ... in 48 Stunden gibt es keinen Ausfall,

(b) B ... in einer Woche treten mindestens 3 Ausfälle ein.

A6 An einem Sommerabend werden durchschnittlich sechs Sternschnuppen pro Stunde beobachtet. Dabei kann davon ausgegangen werden, dass die Anzahl X_t der in t Minuten beobachteten Sternschnuppen poissonverteilt ist mit dem Parameter $\mu = \frac{t}{\alpha}$ $(\alpha > 0)$

(a) Man bestimme α.

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass während einer Viertelstunde mindestens zwei Sternschnuppen beobachtet werden?

Wiederholung Normalverteilung

A7 Die Zufallsgröße X sei normalverteilt mit $\mu = 1$ und $\text{var}(X) = \sigma^2 = 4$. Man ermittle

(a) $P(X \geq 1)$ (b) $P(X < 2)$ (c) $P(|X| > 4)$

(d) $P(0 \leq X < 2)$ (e) $P(|X - 1| > 6)$ (f) $P(0 \leq X | X < 2)$

und man bestimme die Konstante α so, dass gilt

(g) $P(X < \alpha) = 0.5$ (h) $P(X \geq \alpha) = 0.0548$ (i) $P(|X - \mu| < \alpha) = 0.95$.

Hinweis: Arbeiten Sie bewusst mit der Notation der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung, Φ, bzw. deren Umkehrfunktion Φ^{-1}.

A8 Bei einer Lieferung von Kondensatoren sei deren Kapazität K normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 200$ (in μF) und der Varianz $\text{var}(K) = \sigma^2 = 25$ (in μF^2). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kondensator **fehlerbehaftet** ist, wenn die Kapazität K der Kondensatoren

(a) mindestens 198 μF betragen muss,

(b) höchstens 202 μF betragen darf,

(c) maximal um 5 μF vom Sollwert 200 μF abweichen darf?

(d) Wie müssen die Toleranzgrenzen 200-α (in μF) und 200+α (in μF) gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines fehlerbehafteten Kondensators, d.h. $|K - 200| > \alpha$, kleiner als 0.001 ist?

Hinweis: Arbeiten Sie bewusst mit der Notation der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung, Φ, bzw. deren Umkehrfunktion Φ^{-1}.

A9 Überlegen Sie sich einen Anwendungskontext für die Zufallsgröße $X \sim N(10, 4)$. Kann dies die 'brauchbare' Näherung einer binomialverteilten Zufallsgröße sein, s. Folie VL 7?

Was bedeuten die Wahrscheinlichkeiten $P(X < 8|X < 10)$,$P(X > 8|X < 10)$ und $P(X = 8|X < 10)$ (im Anwendungskontext)? Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeiten.

Welche Verteilung verwenden Sie hier? - Sie sollen die Aufgaben nicht lösen.

A10 Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Brennelement in einem Kernreaktor den Bedingungen einer Qualitätsprüfung nicht genügt, beträgt 0.0002. Man ermittle die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(a) höchstens 2 von 5000,

(b) genau eins von 1000,

(c) keins von 100

dieser Brennelemente die Qualitätsprüfung nicht erfüllen.

A11 Drei Glühbirnen werden zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschaltet. Ihre Lebensdauer beschreiben drei stochastisch unabhängige Zufallsvariable X_1, X_2, X_3, deren Verteilungen alle die gleiche Verteilungsfunktion besitzen:

$$F(t) = P(X_i < t) = \begin{cases} \frac{t}{1+t}, & \text{falls } t > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens eine der drei Glühbirnen den Zeitpunkt $t = 9$ "überlebt"?