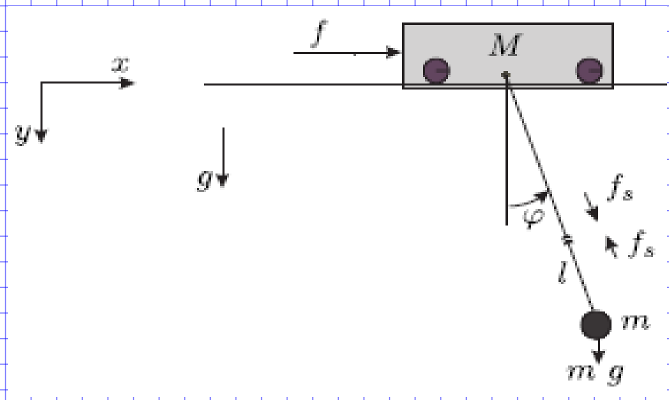
RT1 Übung 2

Aufgabe 1



$$(M+m)\ddot{x}_M(t) + ml\Big(\ddot{\varphi}(t)\cos(\varphi(t)) - [\dot{\varphi}(t)]^2\sin(\varphi(t))\Big) = f(t)$$

$$ml\Big(\ddot{x}_M(t)\cos(\varphi(t)) + l\ddot{\varphi}(t)\Big) + gml\sin(\varphi(t)) = 0.$$

a)

$0 \overset{!}{=} \bar{f}$

$gml\sin\bar{\varphi} = 0 \Rightarrow \bar{\varphi} = 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$= 0$

① Linearisieren

② Auflösen nach der höchsten Ableitung

③ Dgl 2. Ordnung → 2 Dgl. 1. Ordnung

a) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslagen. Überlegen Sie, ob sämtliche Ruhelagen physikalisch sinnvoll sind.

b) Linearisieren Sie das System um die in Teil a) bestimmten physikalisch sinnvollen Ruhelagen. Geben Sie für die resultierenden linearen Gleichungen eine Zustandsdarstellung zum Eingang $u = f$ an. Wie viele Komponenten hat der Zustandsvektor?

c) Geben Sie die Übertragungsmatrix von der Kraft f zu den Ausgangsgrößen x_m (x-Position des unteren Pendel-Endes) und x_M (x-Position des Wagens) an.

d) *Zusatzaufgabe:* Leiten Sie die Bewegungsgleichungen her.

$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + Bu$

explizit $\dot{x} =$

implizit $F(\dot{x}, \quad) = 0$

①: $F \to A_1\ddot{x} + \ldots$ ②: $F \to \ddot{x} = f(\ldots)$

②, $A_1^{-1}\cdot$: $A_1\ddot{x} + \ldots \to \ddot{x} = A_{T_1}x + A_2\dot{x}\ldots$

①: $\ddot{x} = f(\ldots) \to \ddot{x} = A_{T_1}x + A_2\dot{x}\ldots$

③ ↓ $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$

$\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{\underline{x}} \quad = \dot{x}_2 = \ldots$

①

F_1: $(M+m)\ddot{x}_M(t) + ml\Big(\ddot{\varphi}(t)\cos(\varphi(t)) - [\dot{\varphi}(t)]^2\sin(\varphi(t))\Big) = f(t) = \bar{f} + \tilde{f}$

$\cancel{ml}\Big(\ddot{x}_M(t)\cos(\varphi(t)) + l\ddot{\varphi}(t)\Big) + g\cancel{ml}\sin(\varphi(t)) = 0.$

$\Delta F_1 = (M+m)\Big|_{RL}\ddot{\tilde{x}}_M + ml\Big[\ddot{\varphi}(-\sin\varphi)\Big|_{RL}\tilde{\varphi} + \cos\varphi\Big|_{RL}\cdot\ddot{\tilde{\varphi}} + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\Big|_{RL}\cdot\tilde{\varphi} + \sin\varphi\cdot 2\dot{\varphi}\Big|_{RL}\dot{\tilde{\varphi}}\Big] = \tilde{f}$

$(M+m)\ddot{\tilde{x}}_M + ml\ddot{\tilde{\varphi}} = \tilde{f}$

$\ddot{\tilde{x}}_M + l\ddot{\tilde{\varphi}} + g\tilde{\varphi} = 0$

$A_1^{-1}\cdot\Big|\ \underbrace{\begin{pmatrix} (M+m), & ml \\ 1, & l\end{pmatrix}}_{A_1}\cdot\begin{pmatrix}\ddot{\tilde{x}}_M \\ \ddot{\tilde{\varphi}}\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0\\ g\end{pmatrix}\tilde{\varphi} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\tilde{f}$

②

$\begin{pmatrix}\ddot{\tilde{x}}_M \\ \ddot{\tilde{\varphi}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_{21}\end{pmatrix}\tilde{\varphi} + \begin{pmatrix}b_2\end{pmatrix}\tilde{f}$

③ $\underline{x} = \begin{pmatrix}\tilde{x}_m \\ \tilde{\varphi} \\ \dot{\tilde{x}}_m \\ \dot{\tilde{\varphi}}\end{pmatrix}$ $\quad \dot{\underline{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & (A_{21}) & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & 0\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}\tilde{x}_m \\ \tilde{\varphi} \\ \dot{\tilde{x}}_m \\ \dot{\tilde{\varphi}}\end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\(b_2)\end{pmatrix}}_{b}\tilde{f}$

c) $y = x_m = x_M + l\sin\varphi$

$\tilde{y} = \tilde{x}_M + l\tilde{\varphi} = (1,\ l)\begin{pmatrix}\tilde{x}_M \\ \tilde{\varphi}\end{pmatrix} = \underbrace{(1,\ l,\ 0,\ 0)}_{c}\begin{pmatrix}\tilde{x}_M \\ \tilde{\varphi} \\ \dot{\tilde{x}}_M \\ \dot{\tilde{\varphi}}\end{pmatrix}$

$g(s) = c(sI - A)^{-1}\cdot b$

Aufgabe 2

Sind die folgenden komplexwertigen Funktionen X Element des Hardy-Raums $\mathcal{H}_\infty$? Berechnen Sie gegebenenfalls die Norm $\|X\|_\infty$.

$G(s):\ G(s=j\omega)\ ,\ A(\omega) = |G(j\omega)|$

$\|G\|_\infty$ $\quad \mathbb{C}$ $\quad G(s=j\omega)$ - Ortskurve

$|X_1(s=j\omega)| = \left|\frac{2}{j\omega+1}\right|$

	$\|X\|_\infty$
a) $X_1(s) = \dfrac{2}{s+1}$	2
b) $X_2(s) = \dfrac{2}{s-1}$	$\notin \mathcal{H}_\infty$
c) $X_3(s) = \dfrac{s}{s+1}$	$\|X\|_\infty = 1$

$|X_3(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+1}}$ $\quad \omega \to \infty$

$\in$ PN

PN

Der Hardy-Raum $\mathcal{H}_\infty$ ist ein spezieller normierter Vektorraum der Laplace-transformierten Signale:

***Hardy*-Raum $\mathcal{H}_\infty$:** Menge der komplexe Funktionen $X(s)$, die in der offenen rechten Halbebene ($\mathrm{Re}(s) > 0$) holomorph *und* beschränkt sind. Für diese Funktionen ist die folgende Norm definiert:

$$\|\cdot\|_\infty : \mathcal{H}_\infty \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \|X\|_\infty = \sup_{\Re s > 0} \big|X(s)\big| = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \big|X(j\omega)\big|.$$

Aufgabe 3 (Grundlagen-Wiederholung)

Gegeben sei die Übertragungsfunktion eines PT1-Gliedes: $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{1+sT}$. $\Leftrightarrow$

a) Geben Sie den Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangssignal als Differentialgleichung im Zeitbereich an.

b) Geben Sie eine Wirkungsplan-Darstellung an (erlaubte Elemente: je ein Glied für Summation, Verstärkung, Integration).

c) Skizzieren Sie für $K = 3$ und T=10 s die Antwort des Systemausgangs y auf einen Einheitssprung am Eingang: $u(t) = \mathbb{1}(t)$ (DGL lösen oder Korrespondenztabelle).

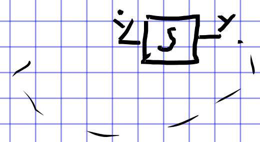
d) Beschreiben Sie kurz zwei Möglichkeiten, um aus der Sprungantwort die Zeitkonstante T abzulesen.

$Y(s)(1+sT) = U(s)\cdot K$

$!$

$y + \dot{y}T =$

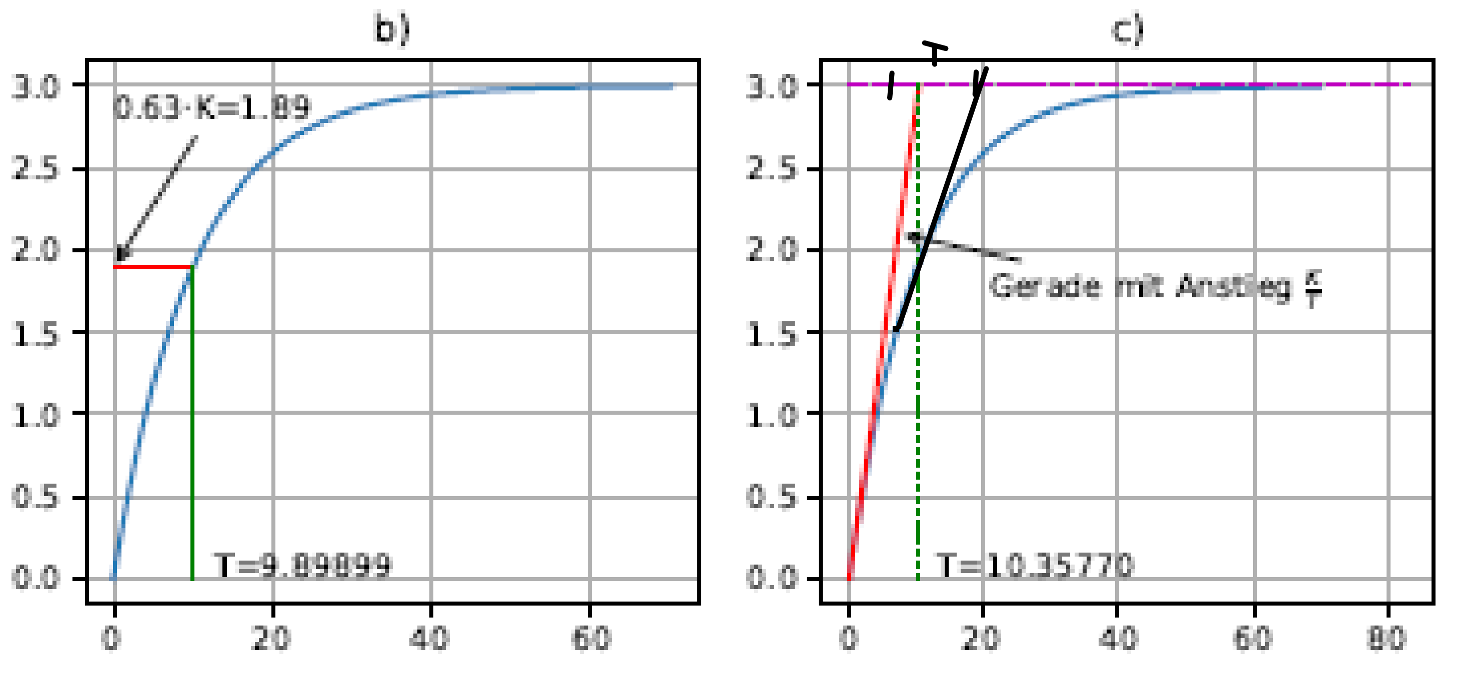
$\dot{y} =$



$Y(s) = G(s)\cdot U(s)$

$= \frac{K}{1+sT} \quad \frac{1}{s}$

$y(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{T}})$



Aufgabe 4

Ein Polynom $P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$ mit $a_n > 0$, dessen sämtliche Wurzeln einen negativen Realteil haben, wird auch als *Hurwitz-Polynom* bezeichnet.

$$P_n(s) = (s+s_1)(s+s_2)(s+s_0+j\omega)$$
$$(s+s_0-j\omega)\ldots$$

Satz 1 (*Stodola*-Bedingung) *Für jedes Hurwitz-Polynom gilt: alle seine Koeffizienten haben übereinstimmende (positive) Vorzeichen, also*

$$a_\nu > 0 \qquad \text{für } \nu = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Mit anderen Worten: reelle Polynome mit Koeffizienten unterschiedlichen Vorzeichens oder einem verschwindenden Koeffizienten sind also stets „instabil“[1].

Hinweis: In der LV Systemtheorie wurde diese Bedingung als notwendige Bedingung eingeführt.

a) Zeigen Sie, dass für ein Polynom mit dem Grad $n \leq 2$ die Stodola-Bedingung nicht nur notwendig, sondern bereits hinreichend ist.

b) Zeigen Sie mit Hilfe eines konstruierten Gegenbeispiels wie etwa $P(s) = s^3 + s^2 + 4s + 30$, dass die Bedingung für $n = 3$ nicht hinreichend ist. Hinweis: eine Nullstelle liegt bei $s_1 = -3$.

c) Beweisen Sie die Stodola-Bedingung. Hinweise: Gehen Sie von einer (monischen) Produkt-Darstellung des betrachteten Polynoms aus: $P(s) = (s-s_1) \cdot \ldots \cdot (s-s_n)$ und nutzen Sie die Tatsache, dass die Nullstellen eines Polynoms mit reellen Koeffizienten entweder reell sind oder in konjugiert komplexen Zahlen auftreten.