Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

Mathematik II/1: Lösungen zu Heft 7.1

10. Woche – Inversion & Möbiustransformation

Aufgabe 7.1.49

Auf welche Punkte werden

$$z = 0\,, \quad z = i\,, \quad z = -i \quad \text{und} \quad z = \infty \quad \text{durch} \quad w = \frac{1-z}{1+z}$$

abgebildet? Worauf wird die rechte Halbebene abgebildet?
Hinweis: Überlegen Sie sich, ob die imaginäre Achse auf einen Kreis oder eine Gerade abgebildet wird.

Lösung zur Aufgabe 7.1.49

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
z &=& 0 &\to& w &=& 1\,, & \\
z &=& 1 &\to& w &=& 0\,, & \\
z &=& \infty &\to& w &=& -1\,, & \\
z &=& i &\to& w &=& -i\,, & \qquad w \text{ bildet die rechte Halbebene auf} \\
z &=& -i &\to& w &=& i\,, & \qquad \text{die Einheitskreisscheibe ab.}
\end{array}$$

Die Bilder von $z = -i, 0, i$ (alle auf der imaginären Achse) liegen offensichtlich nicht auf einer Geraden. Also ist das Bild der imaginären Achse ein Kreis, der durch die 3 Bildpunkte eindeutig bestimmt ist - in diesem Fall der Einheitskreis. Ob die rechte Halbebene in das Innere oder Äußere des Einheitskreises abgebildet wird, kann man damit entscheiden, welches Gebiet rechts/links vom Weg liegt (Bildpunkte in der richtigen Reihenfolge durchlaufen) oder durch Betrachtung eines Beispielpunktes der rechten Halbebene z.B. $z = 1$ und dessen Bildpunktes: $w = 0$ liegt im Inneren des Einheitskreises.
Zusatz: Worauf wird das Innere des Einheitskreises abgebildet? Ja, auf die rechte Halbebene! Man sehe sich die Inverse der Abbildung an: die Abbildung ist zu sich selbst Invers!
Bemerkung 1: Das Reziproke dieser Funktion $1/w = \frac{1+z}{1-z}$ bildet die rechte Halbebene auf das Äußere des Einheitskreises ab. Dies wird in der Systemtheorie zur Anwendung toller analoger Stabilitätskriterien (Routh/Hurwitz: schließen Pole in rechter Halbebene aus) auf zeitdiskrete Systeme verwendet (dort müssen Pole außerhalb des Einheitskreises ausgeschlossen werden).
Bemerkung 2: $-w = \frac{z-1}{z+1}$ ist die als Bilineartransformation bezeichnete Abbildung des Einheitskreises auf die imaginäre Achse, die im Filterentwurf genutzt wird. Man hat tolle Entwurfsmethoden für Analogfilter $G(s)$ mit $s = i\omega$ (imaginäre Achse=Frequenzachse) und möchte ein zeitdiskretes Filter $G(z)$ mit $z = e^{i\omega}$ (Einheitskreis=Frequenzachse) realisieren. Dann setzt man einfach in $G(s)$ für die komplexe Variable $s = \frac{z-1}{z+1}$ ein.