Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

Mathematik II/1: Lösungen zu Ü1 und Heft 7.1

15. Woche – uneigentliche Integrale mit Residuenkalkül

Aufgabe 7.1.110 Laplace-Rücktrafo. muss man nicht sehen – geht direkt mit VL 13.88

Man berechne

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x - i\,\alpha}\,dx \qquad (\alpha > 0, t \neq 0)\ .$$

Zusatz:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x - i\,\alpha}\,dx = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x - i\,\alpha} \cdot \frac{i}{i}\,dx = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{ix + \alpha}\,idx \overset{s=ix}{=} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \underbrace{\frac{e^{st}}{s + \alpha}}_{(*)}\,ds$$

Vergleichen Sie das Integral 'rechts' mit der Formel zur Laplace-Rücktransformation!
Wo (in der komplexen Ebene) verläuft der Integrationsweg und wo liegt der Pol von $(*)$?

Lösung zur Aufgabe 7.1.110

1. Fall: $t > 0$ Voraussetzung des Jordan'schen Lemmas erfüllt (Grad(Nenner)>Grad(Zähler))
   Einzige Singularität des Integranden in der zu umlaufenden 'oberen' Halbebene ist $z_0 = \alpha i$ mit $\text{Res}(\alpha i) = e^{itz}|_{z=\alpha i} = e^{-\alpha t}$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x - i\,\alpha}\,dx = \frac{1}{2\pi i}\,2\pi i\ \text{Res}(\alpha i) = e^{-\alpha t}$$

2. Fall: $t < 0$ Voraussetzung des Jordan'schen Lemmas erfüllt, mit folgenden Substitutionen: $t_{neu} = -t > 0$ und $x_{neu} = -x \ \rightsquigarrow$ (in 'neuen' Variablen)

$$f(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x + i\,\alpha}\,dx = 0,$$

   da einzige Singularitätsstelle nun $z_0 = -\alpha i$ ist und somit keine Singularität in der zu umlaufenden 'oberen' Halbebene liegt.

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & \text{für} \quad t > 0\ , \\ 0 & \text{für} \quad t < 0\ . \end{cases}$$

Zusatz: Das ist quasi die Laplace-Rücktransformation von $F(s) = \frac{1}{s+\alpha}$. Der Integrationsweg verläuft entlang der imaginären Achse. Der Pol von $(*)$, $s_0 = -\alpha$, liegt in der linken Halbebene.

Aufgabe 7.1.112 Integration 'über die Pole', s. VL 13.96

1. Man berechne den Cauchyschen Hauptwert von

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 5x + 6} \, dx \, .$$

Dabei dürfen Grenzübergang und Integration vertauscht werden.

Lösung zur Aufgabe 7.1.112

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos\, x}{x^2 - 5x + 6} \, dx = \mathrm{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\, \mathrm{e}^{ix}}{x^2 - 5x + 6} \, dx \right]$$

$$\text{Vorr. Satz 13.96}\checkmark = \oint_{\mathrm{HK}} \frac{z e^{iz}}{z^2 - 5z + 6} \, dz$$

Pole erster Ordnung bei $z_1 = 2$ und $z_2 = 3$ (reell).

Somit erhält man $I = \mathrm{Re} \left[\pi \mathrm{i} \big(\mathrm{Res}(f(z)|_{z=2} + \mathrm{Res}(f(z)|_{z=3}) \big) \right] = \pi \big(2 \sin 2 - 3 \sin 3 \big)$.

Aufgabe 7.1.114

Man berechne $I = \int_0^{\infty} \frac{\cos\, a\, x}{x^2 + 1} dx \qquad (a > 0)$.

Lösung zur Aufgabe 7.1.114

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + 1} \quad \big(a > 0 \big) \quad g(z) = \frac{1}{z^2 + 1} \quad g(z) = g(-z) \quad \longrightarrow \quad g(z)$$

ist gerade Funktion und erfüllt Jordan'sches Lemma $\longrightarrow$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + 1} \, dx \; ; \quad f(z) = \frac{e^{iaz}}{z^2 + 1} \; ,$$

Pole erster Ordnung bei $z_1 = i$ und $z_2 = -i$.

z_1 liegt in der oberen Halbebene

$\longrightarrow \quad I = 2\, \pi\, i\, \mathrm{Res}(f,\, z_1 = i) = \frac{\pi}{2}\, e^{-a}$ mit $\mathrm{Res}(f,\, z_1 = i) = \frac{1}{2} \frac{e^{-a}}{2\, i}$.
