Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

inkl. Lösung

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1

1. Woche – Wiederholung Abiturstoff + etwas Ausblick

Funktionen

A1 Zeichnen Sie (ohne Taschenrechner!) folgende Funktionen

(a) $f(x) = 2^x, g(x) = 3^x$ (ggf. erst eine kleine Wertetabelle erstellen).

(b) $(e \approx \ldots ?)$ $f(x) = e^x = \exp(x)$, $g(x) = f(-x) = e^{-x}$, $h(x) = -f(x) = -e^x$ sowie $y = 1 - e^{-x}$.

(c) $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (ohne Tafelwerk!: Funktionen aus (b) grafisch addieren!)

(d) $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (ohne Tafelwerk!: Funktionen aus (b) grafisch subtrahieren!)

(e) $|x|$, $|x-3|$, $2 \cdot |x-3|$. Kennzeichen Sie auf der x-Achse den Bereich, für den gilt $|x-3| < 4$ sowie den Bereich mit $|x-3| \geq 4$ (grafisch denken!).

(f) $|x+1|$, $|x-1|$ und $y = |x+1| - |x-1|$.

(g) Sie werden öfter u.a. im Fach Systemtheorie mit der Heaviside- bzw. Sprungfunktion arbeiten:

$$s(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t < 0 \\ 1, & \text{falls } t \geq 0 \end{cases}$$

Zu zeichnen: $s(t)$, $s(t-2)$, $2 \cdot s(t-3)$ sowie $s(t-2) - 2 \cdot s(t-3)$

(h) $\sin(x)$, $\sin(-x)$, $\sin(x + \frac{\pi}{2})$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\arctan(x)$

A2 Geben Sie folgende Funktionswerte der Sinusfunktion an (ohne Tefelwerk/Rechner!): am rechtwinkligen Dreieck mit Definition Sinus und mit Pythagoras arbeiten und in dem in der Tabelle vorgeschlagenen Format angeben!

α	0	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{\cdots}}{2}$	$\frac{\sqrt{\cdots}}{2}$	$\frac{\sqrt{\cdots}}{2}$	$\frac{\sqrt{\cdots}}{2}$	$\frac{\sqrt{\cdots}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{\cdots}}{2}$	$\frac{\sqrt{\cdots}}{2}$	$\frac{\sqrt{\cdots}}{2}$	$\frac{\sqrt{\cdots}}{2}$	$\frac{\sqrt{\cdots}}{2}$
$\tan\alpha$					

In der höheren Mathematik geben wir Winkel in radiant (im Bogenmaß) anstatt in Grad an, $0° \sim 0, 180° \sim \pi$. Rechnen Sie die obigen Winkel in radiant um.

Lösung:

α	0	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Nullstellen

A3 Lösen Sie folgende Gleichungen:

(a) $x^2 + 2x = 0$

(b) $(x-3)(x+2) = 0$ (Hingucken! Nicht dem 'Ausmultiplizier-Reflex' nachgeben.)

(c) Was besagt der Wurzelsatz von Vieta? Nutzen Sie ihn, um die Lösungen der Gleichungen zu 'sehen': $x^2 + 5x + 6 = 0$, $x^2 - 2x - 8 = 0$, $x^2 + 5x = 14$.

Lösung:

(a) $x^2 + 2x = x(x+2) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = -2$

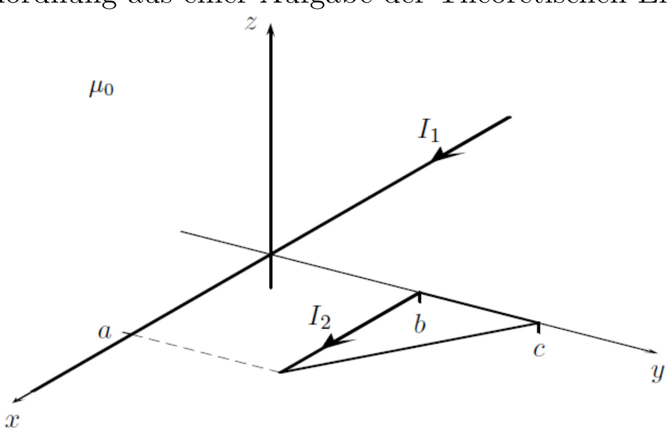
(b) $x = 3 \vee x = -2$

(c) Regel von Vieta: $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 \underbrace{-(x_1 + x_2)}_{p} x + \underbrace{x_1 x_2}_{q}$

$x^2 + 5x + 6 \Rightarrow x = -2 \vee x = -3$
$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4 \vee x = -2$
$x^2 + 5x = 14 \Rightarrow x = -7 \vee x = 2$

Geradengleichung

A4 Gegeben ist folgende Anordnung aus einer Aufgabe der Theoretischen Elektrotechnik,



zu deren Lösung es nötig ist, u.a. die Gerade durch die Punkte $P_1(0, c, 0)$ und $P_2(a, b, 0)$ zu beschreiben.

(a) Markieren Sie die Punkte P_1 und P_2 in der Grafik.

(b) Die Gerade durch P_1 und P_2 liegt in der x, y-Ebene und kann beschrieben werden durch: $z = 0$ und $y = f(x) =?$ (oder $x = g(y) =?$). Geben Sie die Geradengleichung $y = \ldots$ (oder $x = \ldots$) an.

(c) Kontrollieren Sie, dass die Punkte $(x, y) = (0, c)$ und $(x, y) = (a, b)$ wirklich auf Ihrer Geraden aus (b) liegen.

Lösung:

(b) $y = c + \frac{(b-c)}{a}x$ oder $x = \frac{a}{b-c}(y-c)$

(c) $y(0) = c, y(a) = b$ ✓ bzw. $x(b) = a, x(c) = 0$ ✓.

Analytische Geometrie

A5 (a) Zwei Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ haben die Länge 2 bzw. 3 und schließen einen Winkel von 45° ein. Zeichnen Sie die Situation und geben Sie das Skalarprodukt der beiden Vektoren an.

(b) Skizzieren Sie eine Ebene im 3-dimensionalen Raum (im $\mathbb{R}^3$) und einen Normalvektor dazu (einen Vektor senkrecht zu der Ebene).

(c) Zeichen Sie den Vektor $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in ein 3-dim. Koodinatensystem. Überlegen Sie, für welche Punkte (x, y, z) (geometrische Gestalt dieser Punktmenge) gilt: $\underline{a} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

Lösung:

(a) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos 45°$
$2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 \cdot \sqrt{2}$

(c) Ebene $\perp$ $\underline{a}$ durch Koordinatenursprung

Integralrechnung

A6 **Zusammenhang Strom - Ladung** Machen Sie sich (möglichst grafisch) klar

(a) Das Integral $\int_{t_0}^{t_1} i(t)dt = q(t_1) - q(t_0)$ (mit q=Stammfunktion von i, also $\frac{dq}{dt} = i$) gibt die Fläche unter der Kurve $i(t)$ zwischen t_0 und t_1 an.

(b) Das Integral $\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau = q(t) - q(t_0)$ (mit $\frac{dq}{dt} = i$) ist die Fläche unter der Kurve $i(t)$ zwischen t_0 und **variablem rechten Rand** t. Sinnvollerweise nennt man die Integrationsvariable anders als die Integrationsgrenze (τ und nicht t).

(c) Aus (b) folgt $q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau$ (mit $\frac{dq}{dt} = i$), was der Summe aus dem **'Startwert'** zum **'Startzeitpunkt'** (linker Rand t_0) und dem Integral über ein variables (Zeit-) Intervall entspricht. Da die Integrationsgrenze von t abhängt, ist auch diese Summe eine Funktion von t und keine konstanter Wert wie im Fall (a).

Gleichungen und Ungleichungen

A7 Bringen Sie die beiden Terme 'auf einen Bruchstrich': $\frac{1}{(x-1)} - \frac{x}{(x-1)^2} =$
Lösung: $= \frac{-1}{(x-1)^2}$

A8 Lösen Sie die Gleichung $\frac{1}{e} = \frac{1}{a^{-1}b} - \frac{1}{g}$ nach b auf! **Lösung:** $b = \frac{aeg}{e+g}$

A9 Geben Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $|x-1| < 3$ an! **Lösung:** $-2 < x < 4$

A10 Welche der folgenden Aussagen sind wahr:

( ) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$: $\sqrt{x^2(1+y)} = x\sqrt{1+y}$,

( ) Für alle $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{x^2+4} = x+2$,

Lösung: beide falsch; am besten mit Gegenbeispiel demonstrieren: $x = -1$ ...