Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1

5. Woche – Parabel, Kreis, Ellipse, quadratische Ergänzung, Polynome, Nullstellen

Äquivalente, zulässige und unzulässige Umformungen

A1 Welche der folgenden Umformungen sind äquivalent, zulässig bzw. unzulässig?
Kennzeichnen Sie dies mit $\Leftrightarrow, \Rightarrow$ bzw. $\not\Leftarrow$.
In welchem der Fälle muss am Ende eine Probe gemacht werden?

$$\begin{array}{rcl} x &=& 3 \\ x^2 &=& 9 \end{array} \quad\Bigg|\quad \begin{array}{rcl} x^2 &=& 9 \\ x &=& 3 \end{array} \quad\Bigg|\quad \begin{array}{rcl} x^2 &=& 9 \\ |x| &=& 3 \end{array} \quad\Bigg|\quad \begin{array}{rcl} |x| &=& 3 \\ (x &=& 3) \vee (x = -3) \end{array}$$

Lösung:

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} x &=& 3 \\ x^2 &=& 9 \\ & \ldots & \\ & \text{Probe!} & \end{array} \quad\Bigg|\quad \not\Leftarrow \begin{array}{rcl} x^2 &=& 9 \\ x &=& 3 \end{array} \quad\Bigg|\quad \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} x^2 &=& 9 \\ |x| &=& 3 \end{array} \quad\Bigg|\quad \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} |x| &=& 3 \\ (x &=& 3) \vee (x = -3) \end{array}$$

Parabel, Kreis, quadratische Ergänzung

Z A2 Stellen Sie eine Gleichungen für

(a) eine 'nach oben bzw. nach unten geöffnete' Parabel mit dem Scheitel $S(0,0)$,

(b) eine 'nach links bzw. nach rechts geöffnete' Parabel mit dem Scheitel $S(0,0)$,

(c) für alle Fälle in (a,b) mit dem Scheitel in $S(1,2)$ auf.

Lösung:

(a) $y = \pm x^2$,

(b) $x = \pm y^2$,

(c) $y - 2 = \pm(x-1)^2$ bzw. $x - 1 = \pm(y-2)^2$.

A3 In der k_p, k_i-Ebene (analog x, y-Ebene von Aufgabe 3.5) skizziere man den Lösungsbereich von: $k_p < 10, k_i > 0$ und $k_i < -\frac{1}{6}(k_p^2 - 9k_p - 10)$.
Das der Stabilitätsbereich eines sogenannten PI-Reglers.

Lösung: Stabilitätsbereich

A4 Stellen Sie die Gleichungen für folgende Kegelschnitte auf:

(a) Kreis: Mittelpunkt $M(3,5)$, Radius $r = 8$,

(b) Ellipse: Mittelpunkt $M(0,0)$, Halbachsen $a = 11$, $b = 8$.

Lösung:

(a) Kreisgleichung allg.: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ mit $M(x_0, y_0)$ und Radius r.
hier speziell: $\boxed{(x-3)^2 + (y-5)^2 = 64}$
In der komplexen Ebene würde man diesen Kreis durch $|z - (3 + \mathrm{i}5)| = 8$ beschreiben.

(b) Ellipsengleichung: $\boxed{\frac{x^2}{11^2} + \frac{y^2}{8^2} = 1}$

Z A5 Bestimmen Sie Art und Lage der folgenden Kegelschnitte (Kreise, Parabeln, ...).
Hinweis: überführen Sie dazu mittels "quadratischer Ergänzung" die Gleichungen in ihre jeweilige Grundform.

a) $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 4$ b) $y^2 - 6y = -x + 3$

Lösung: Allgemein bedeutet quadratische Ergänzung: $x^2 + ax = \underbrace{x^2 + ax + \frac{a^2}{4}}_{(x+\frac{a}{2})^2} - \frac{a^2}{4}$

(a) $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 4$
$\to\ x^2 + 2x + y^2 + 2y = x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 + 2y + 1 - 1 = (x+1)^2 + (y+1)^2 - 2 = 4$
$\to \boxed{(x+1)^2 + (y+1)^2 = 6}$ Kreis mit $M(-1,-1)$ und $r = \sqrt{6}$

(b) $y^2 - 6y = -x + 3$
$\to y^2 - 6y + 9 - 9 = (y-3)^2 - 9 = -x + 3$
$\to \boxed{(y-3)^2 = -x + 12}$ Parabel mit $S(12,3)$, links ge"offnet.

Z A6 Analog zur **parametrischen Beschreibung**

- einer Geraden $z = z_0 + r\,\mathrm{e}^{i\varphi_0}$ (φ_0 fix und $r \in \mathbb{R}$ variabel), s. 2.21

lässt sich auch eine parametrische Beschreibung

- eines Kreises $z = z_0 + r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$ bzw. $\begin{array}{ll} \mathrm{Re}(z - z_0) & = r\cos(\varphi) \\ \mathrm{Im}(z - z_0) & = r\sin(\varphi) \end{array}$ (r fix und $\varphi \in (-\pi, \pi]$ variabel)

  sowie

- einer Ellipse $\begin{array}{ll} \mathrm{Re}(z - z_0) & = a\cos(\varphi) \\ \mathrm{Im}(z - z_0) & = b\sin(\varphi) \end{array}$, s. auch TET2 S.47

angeben.
Leiten Sie jeweils aus der parametrischen Beschreibung die parameterfreie Beschreibung für Kreis: $(\mathrm{Re}(z-z_0))^2 + (\mathrm{Im}(z-z_0))^2 = r^2$ und Ellipse: $\frac{(\mathrm{Re}(z-z_0))^2}{a^2} + \frac{(\mathrm{Im}(z-z_0))^2}{b^2} = 1$ her, s. 2.21.

Lösung: Trigonometrischen Pythagoras verwenden $\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$.

A7 **Zusatz:** Stellen Sie die Gleichungen all der Kreise auf, die die Koordinatenachsen berühren und durch den Punkt $P(1,2)$ gehen. Geben Sie die zugehörigen Mittelpunkte und Radien an.

Lösung: Kreisgleichung: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ mit $M(x_0, y_0)$ und Radius r.
Die Ber"uhrungspunkte sind offenbar: $B_1(0, y_0)$ und $B_2(x_0, 0)$; $M(x_0, y_0)$ liegt im 1. Quadranten.

Einsetzen von $P(1,2)$: $(1-x_0)^2 + (2-y_0)^2 = r^2$.
Einsetzen von B_1: $x_0^2 = r^2$.
Einsetzen von B_2: $y_0^2 = r^2$.

da $x_0 \geq 0$ und $y_0 \geq 0 \rightarrow x_0 = y_0 = r$.
Einsetzen in die erste Gleichung liefert: $(1-r)^2 + (2-r)^2 = r^2 \quad (*)$
Also $r^2 - 6r + 5 = 0 \rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = 5$.

Es erfüllen genau zwei Kreise die obigen Bedingungen, und zwar
K_1 mit Mittelpunkt $M(1,1)$ und Radius $r = 1$: $K_1 = \{(x,y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1\}$
K_2 mit Mittelpunkt $M(5,5)$ und Radius $r = 5$: $K_2 = \{(x,y) \mid (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25\}$.

Bemerkung: Gleichung (*) kann man auch direkt aus einer geometrischen Lagebetrachtung und dem Satz des Pythagoras schlussfolgern.

A8 **Zusatz:** Das letzte Beispiel in 2.22 zeigt, dass alle Punkte z, deren Abstände zu zwei gegebenen (komplexen) Zahlen, z_1, z_2, in einem bestimmten Verhältnis, α, zueinander stehen (für $\alpha \neq 1$) auf einem Kreis liegen:

$$\|z - z_2\| = \alpha \|z - z_1\|$$

Konkret wurde für 'Gegeben': $z_1 = 1, z_2 = i$ und $\alpha = 2$ der Radius R und der Mittelpunkt M des Kreises ermittelt.

Im Fach Theoretische Elektrotechnik wird die gleiche Tatsache jedoch mit geändertem 'Gegeben' und 'Gesucht' genutzt: die zweite Zeile in TET1 S.107 können wir übertragen auf unseren Kontext als:

$$\|z - s_2\| = \alpha \|z - s_1\| \tag{0.1}$$

notieren mit 'Gegeben': $z_1 = s_1,\ M = 0, R$ (also $z = R\,\mathrm{e}^{i\varphi},\ \varphi \in (-\pi, \pi]$) und 'Gesucht': s_2 und α.

Verifizieren Sie die Lösung $s_2 = R^2/s_1, \alpha = R/s_1$, d.h. überprüfen Sie, dass die Gleichung (0.1) mit $z = R\,\mathrm{e}^{i\varphi}$ für dieses s_2, α gilt.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\|z-s_2\| &= \alpha\|z-s_1\| \text{ mit } z = R\,\mathrm{e}^{i\varphi}, s_2 = R^2/s_1, \alpha = R/s_1 \\
\Leftrightarrow \|R\,\mathrm{e}^{i\varphi} - R^2/s_1\| &= R/s_1 \|R\,\mathrm{e}^{i\varphi} - s_1\| \\
&= \|R^2/s_1\,\mathrm{e}^{i\varphi} - R\| \\
&= \|\left(R^2/s_1 - R\,\mathrm{e}^{-i\varphi}\right)\mathrm{e}^{i\varphi}\| \\
&= \|R^2/s_1 - R\,\mathrm{e}^{-i\varphi}\|\underbrace{\|\mathrm{e}^{i\varphi}\|}_{=1} \\
&= \|R\,\mathrm{e}^{-i\varphi} - R^2/s_1\| \checkmark \text{ da Beträge konjugiert komplexer Zahlen gleich}
\end{aligned}$$

Polynome, Nullstellen

A9 (a) Geben Sie ein Polynom mit den Nullstellen $z_1 = 3$ und $z_2 = 2\mathrm{i}$ an.

(b) Geben Sie ein Polynom mit **reellen Koeffizienten** und den Nullstellen $z_1 = 3$ und $z_2 = 2\mathrm{i}$ an.

Lösung: a) $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)$, b) $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - \overline{z}_2)$

A10 Gegeben ist ein Polynom 3. Grades mit reellen Koeffizienten. Geben Sie alle Möglichkeiten für die Anzahl reeller und die Anzahl komplexer Nullstellen an.

A11 **Zusatz:** Beweisen Sie Bem. 2.27 3) :

Ist z nichtreelle Nullstelle des reellen Polynoms $P(z)$, so ist $\overline{z}$ ebenfalls eine Nullstelle.

bzw.

Nullstellen treten in Polynomen mit reellen Koeffizienten immer in konjugiert komplexen Paaren auf.

Zeigen Sie zu diesem Zweck zunächst: $(\overline{z})^n = \overline{(z^n)}$ und somit, dass $a_n(\overline{z})^n = \overline{(a_n z^n)}$.
Was folgt daraus für $P(\overline{z})$? $(P(z) = ?!)$

Lösung:
Beweis: Wegen $\overline{a}\overline{b} = \overline{ab}$, ggf. nachrechnen: $(x_a - \mathrm{i}y_a)(x_b - \mathrm{i}y_b) = \overline{(x_a + \mathrm{i}y_a)(x_b + \mathrm{i}y_b)}$
folgt $(\overline{z})^2 = \overline{(z^2)}$ und
per vollständiger Induktion $(\overline{z})^n = \overline{(z^n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. (1)
Laut Voraussetzung ist $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0$, da z **Null**stelle.

Folglich ist

$$\begin{aligned}
P(\overline{z}) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z}^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z^k} && \text{wegen (1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k} && \text{wegen } a_k \in \mathbb{R} \\
&= \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} && \text{wegen } \overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b} \\
&= \overline{P(z)} = \overline{0} = 0 && \text{da z Nullstelle}
\end{aligned}$$

Also ist $P(\overline{z}) = 0$ und somit $\overline{z}$ Nullstelle. q.e.d.