# Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1

## 6. Woche – Polynome: Horner - Schema, Interpolation, Exponential-Funktionen

### Funktionen: explizit, implizit

**A1** In der LV Grundlagen der Elektrotechnik wird in einem Erklärvideo eine **explizite** Funktion ges.: $u_a = f(u_q)$ gesucht und als Ergebnis $u_a = \begin{cases} u_q & \text{für } 0 \leq u_a < u_{z0} \\ u_q \cdot \frac{r_z}{R_v + r_z} + u_{z0} \cdot \frac{R_v}{R_v + r_z} & \text{für } u_a \geq u_{z0} \end{cases}$ angegeben. Was ist an dieser Darstellung problematisch?

**Lösung:** Es wird (durch die Fallunterscheidung) praktisch $u_a$ als Funktion von $u_a$ angegeben. Das ist **keine explizite** Darstellung!

### Polynome: Horner - Schema

**A2** Machen Sie sich klar, dass mit dem Horner-Schema tatsächlich der Funktionswert eines Polynoms an der Stelle $x_0$ berechnet wird, vgl. VL Bsp. 3.8.

**Lösung:** $b_0 = ((\ldots((a_n x_0 + a_{n-1})\, x_0 + a_{n-2})\, x_0 + \ldots)\, x_0 + a_1)\, x_0 + a_0 = P(x_0) \quad \checkmark$

**A3** Führen Sie die Polynomdivision aus VL Bsp. 3.21 mittels zweier Polynomdivisionen durch einen Linearfaktor (einmal durch $(x-1)$ und dann durch $(x+2)$) mit Horner-Schema aus.

**Lösung:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 2 | |
| $x_0 = 1$ | | 1 | 3 | 6 | 10 | |
| | 1 | 3 | 6 | 10 | $\boxed{12}$ | $= P_4(1)$ |
| $x_0 = -2$ | | $-2$ | $-2$ | $-8$ | 10 | |
| | 1 | 1 | 4 | $\boxed{2}$ | | $= P_3(-2)$ |

$\Rightarrow$ polynomialer Anteil $= x^2 + x + 4$ (wie gut, stimmt mit der VL überein ;-)).

**Z A4** Machen Sie sich klar, warum das Berechnen eines Funktionswertes eines Polynoms an der Stelle $x_0$ mit dem Horner-Schema genau die Polynomdivision durch den Linearfaktor $(x - x_0)$ realisiert, indem Sie

(a) den Zusammenhang zwischen den Polymonkoeffizienten $a_i,\ i = 0, \ldots n$ und den Koeffizienten des 'Ergebnispolynoms' $b_i,\ i = 1, \ldots n$ aus dem Horner-Schema ablesen: $b_i = \ldots$

(b) sowie aus der Gleichung in VL Bem. 3.11

$$P_n(x) = (x - x_0)P_{n-1}(x) + b_0 \quad \text{mit } P_{n-1}(x) = b_n x^{n-1} + \ldots b_2 x + b_1$$

durch **Vergleich der Koeffizienten** vor $x^i$ der linken und rechten Seite einen Zusammenhang zwischen $a_i$ (Koeffizienten von $P_n(x)$)und $b_i$ (Koeffizienten von $P_{n-1}(x)$) feststellen: $a_i = \ldots$

(c) sich überzeugen, dass die Ergebnisse von (a) und (b) zueinander equivalent sind.

**Beispiel:**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 4 | $-4$ | $-8$ | 2 | 4 | | |
| $x_0 = 1$ | | 2 | 6 | 2 | $-6$ | $-4$ | | |
| | 2 | 6 | 2 | $-6$ | $-4$ | $\boxed{0}$ | $= P_5(1)$ | $\Rightarrow P_5(x) = (x-1)(2x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 6x - 4)$ |
| allgemein | $a_n$ | $\dots$ | $\dots$ | $a_i$ | $\dots$ | $a_0$ | | |
| $x_0$ | | $x_0 b_n$ | $\dots$ | $x_0 b_{i+1}$ | $\dots$ | $x_0 b_1$ | | |
| | $b_n$ | $\dots$ | $b_{i+1}$ | $b_i$ | $b_1$ | $\boxed{0}$ | $= P_n(x_0)$ | $\Rightarrow P_n(x) = (x - x_0)(b_n x^{n-1} + \dots + b_1)$ |
| bzw. | $a_n$ | $\dots$ | $\dots$ | $a_i$ | $\dots$ | $a_0$ | | |
| $x_0$ | | $x_0 b_n$ | $\dots$ | $x_0 b_{i+1}$ | $\dots$ | $x_0 b_1$ | | |
| | $b_n$ | $\dots$ | $b_{i+1}$ | $b_i$ | $b_1$ | $b_0$ | $= P_n(x_0)$ | $\Rightarrow P_n(x) = (x - x_0)(b_n x^{n-1} + \dots + b_1) + b_0$ |

**Lösung:**

(a) aus einer Spalte in obiger Tabelle ablesen $b_i = a_i + x_0 b_{i+1}$

(b) Koeffizientenvergleich für $x^i$ : $\quad a_i = b_i - x_0 b_{i+1}$

(c) $b_i = a_i + x_0 b_{i+1} \quad \Leftrightarrow \quad a_i = b_i - x_0 b_{i+1}$

mit $i = 0, \dots n$ und $b_{n+1} = 0$.

oder elegante Herleitung 'im Stück' (nicht nur lokal in eine Spalte gucken):
Die Spalten von links nach rechts mit $x^n \dots x^0$ multipliziert ergibt
(Zeile 1+ Zeile 2 = Zeile 3):

$$\begin{aligned} P_n(x) + x_0 P_{n-1}(x) &= x P_{n-1}(x) + P_n(x_0) \\ \Leftrightarrow \quad P_n(x) &= (x - x_0) P_{n-1}(x) + P_n(x_0) \\ \text{bzw.} \quad \frac{P_n(x)}{(x - x_0)} &= P_{n-1}(x) + \frac{P_n(x_0)}{(x - x_0)} \; . \end{aligned}$$

## Polynom-Interpolation

**Z A5** Ist $P(x) = x^2 - 2$ das Interpolationspolynom zu den Stützstellen $\begin{array}{c|ccc} x_i & 0 & 1 & 2 \\ \hline y_i & -2 & -1 & 2 \end{array}$ ?

**Lösung:** Ja! $P(0) = -2$, $P(1) = -1$, $P(2) = 2$ und der Polynomgrad ist 2, wie es bei 3 Stützstellen sein muss.

## Kurvendiskussion

**Z A6** Skizzieren Sie eine gebrochen rationale Funktion mit mindestens einer Nullstelle, Polstelle und Lücke sowie deren Asymptote. Lesen Sie danach die analytische Beschreibung, $f(x) = \dots$ aus dem Graphen ab.

**Lösung:** Z.B. $f(x) = 2 \cdot \frac{(x-1)^2(x-2)(x-4)}{(x+1)^2(x-3)(x-4)}$.

## Exponential-Funktionen

**A7** Sind Ihnen die folgenden Potenzgesetze klar

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, (a^x)^2 = a^{2x} \text{ bzw. } (a^x)^n = a^{nx} \text{ sowie } a^{1/2} = \sqrt{a} \text{ ?}$$

Illustrieren Sie sich die Gesetze mit kleinen Beispielen, z.B. $2^{3+4} = \dots$