Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

inkl. Lösung

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1

12. Woche – Fallen beim Integrieren: uneigentliche Integrale, u.a.

Z A1 Generalsubstitution

Leiten Sie ausgehend von $t = \tan\frac{x}{2}$ die bei der Weierstraßschen Generalsubstitution verwendeten Ersetzungen her:

(a) $\mathrm{d}\,x = \frac{2\,\mathrm{d}\,t}{1+t^2}$,

(b) $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$,

(c) $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Nutzen Sie dabei $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ bzw. $\cos^2 a = \frac{\cos^2 a}{\sin^2 a + \cos^2 a} = \frac{1}{1+\tan^2 a}$.

Z A2 Uneigentliche Integrale - welche existieren?

Fertigen Sie sich eine Übersicht an, welche Integrale aus Bsp. 5.21 bei Integration 'über den Pol' und welche bei Integration 'bis $\pm\infty$' existieren.
Geben Sie an, für welche n das uneigentliche Integral

$$\int \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}\,x, \quad n \in \mathbb{R}$$

bei Integration 'über den Pol' bzw. bei Integration 'bis $\pm\infty$' existiert.

Lösung: $n := -\alpha$ aus der VL; folglich (da $\alpha > -1 \;\Leftrightarrow\; -\alpha < 1$):

$$\int \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}\,x \text{ existiert für Integration } \begin{cases} \text{über den Pol,} & \text{wenn } n < 1 \\ \text{bis } \pm\infty, & \text{wenn } n > 1 \end{cases}$$

A3 Integration von Partialbrüchen

Laut F5_3 gibt es im Ergebnis der Partialbruchzerlegung Terme mit **1.** einfachen und **2.** mehrfachen reellen Polen sowie mit **3.** einfachen (und **4.** mehrfachen, s. F3_4) Paaren konjugiert komplexer Pole.
Ziehen Sie eine Konsequenz aus Aufgabe 2:

(a) Bei welchen Partialbrüchen ist der Integrationsbereich unkritisch?

(b) Bei welchen Partialbrüchen macht es einen Unterschied, ob 'über den Pol' bzw. bis '$\pm\infty$' integriert wird?

(c) Bei welchen Partialbrüchen geht beides nicht?

Lösung: (a) **3.** im Fall $\frac{A}{x^2+a^2}$ (und **4.**), (b) **2.**, **3.** im Fall $\frac{Ax+B}{x^2+a^2}$, (c) **1.**

A4 **Parameterintegral**

Wenden Sie die Leibniz-Regel auf folgendes 'Parameterintegral' an:

$$q(t) = \int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau$$

$\dot{q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} q(t) = \ldots$:)

Lösung: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} q(t) = i(t)$. Offenbar ist die Leibniz-Regel verträglich mit dem Hauptsatz :).

Wiederholung: Logarithmus – Anwendung

A5 In der Klausur Nachrichtentechnik erhalten Sie folgenden

Hinweis:

x	0.1	0.25	1	1.5	2	3	5	10	100	1000
$\log_{10}(x)$		-0.6		0.2	0.3	0.5	0.7			

Wir haben ein paar Werte weggelassen, die Sie bitte selbst (ohne Taschenrechner) eintragen.

Lösung:

x	0.1	0.25	1	1.5	2	3	5	10	100	1000
$\log_{10}(x)$	-1	-0.6	0	0.2	0.3	0.5	0.7	1	2	3

A6 **Zusatz:** adaptiert aus einer Klausuraufgabe Nachrichtentechnik:

(a) Gegeben ist die Sendeleistung $P_T = 30\,\mathrm{kW}$ und die Definition des 'Leistungspegels' $L_P = 10\log_{10}(P/P_{ref})\,\mathrm{dBm}$ mit $P_{ref} = 1\,\mathrm{mW}$. Berechnen Sie den Sendeleistungspegel L_T in dBm.

(b) Berechnen Sie die Kanaldämpfung $L_{a_p} = 24\,\mathrm{dB} + 30\log_{10}(d/1\,\mathrm{m})\,\mathrm{dB}$ für den Abstand $d = 15\,\mathrm{km}$.

(c) Das Sendesignal aus Aufgabe a) wird nun durch den Kanal aus Aufgabe b) gedämpft. Berechnen Sie den sich daraus ergebenden Empfangsleistungspegel L_R in dBm. Hinweis: 'Leistungs-Dämpfung' $a_P = \frac{\text{'gesendete Leistung'}}{\text{'empfangene Leistung'}}$ und $L_{a_P} = 10\log_{10}(a_P)\,\mathrm{dB}$.

(d) Geben Sie die Empfangsleistung P_R an, deren Pegel Sie in c) berechnet haben.

Lösung:

(a) $L_T = 10\log_{10}(30 \cdot 10^6\,\mathrm{mW}\,/1\,\mathrm{mW})\,\mathrm{dBm} = 75\,\mathrm{dBm}$

(b) $L_{a_p} = 24dB + 30\log_{10}(15000\,\mathrm{m}\,/1\,\mathrm{m})dB = 150\,\mathrm{dB}$

(c) $L_R = L_T - L_{a_p} = -75\,\mathrm{dBm}$

(d) $P_R = 10^{-7.5}\,\mathrm{mW} = 10^{(-8+0.5)}\,\mathrm{mW} = 3 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{mW} = \ldots$

Wiederholung: Taylor1 = Tangente = Linearisierung

A7 (a) Skizzieren Sie die Funktionen

$$\text{(i)} \quad f(x) = e^x = \exp(x), \quad \text{(ii)} \quad g(x) = e^{-x}, \quad \text{(iii)} \quad h(x) = 1 - e^{-x}$$

(b) Skizzieren Sie die Funktionen

$$\text{(i)} \quad f(t) = Ke^{\frac{t}{\tau}} = K\exp\left(\frac{t}{\tau}\right), \quad \text{(ii)} \quad g(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \text{(iii)} \quad h(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

(c) Geben Sie das Taylorpolynom 1. Ordnung für die Funktionen in (b) (i) - (iii) an einer beliebigen Entwicklungsstelle t_0 an und skizzieren Sie dessen Graph (zu (b) hinzu zeichnen!).

(d) Ermitteln Sie, für welches t Ihre Gleichungen aus (c) den Wert (i) 0, (ii) 0 bzw. (iii) K annehmen[1].

Lösung:

(a) s. Übung 1, Aufgabe 1 b),

(b) s. a) adaptieren,

(c) Graph = Tangente bei t_0 an Graphen aus (b),

(d) für (i) $t - t_0 = -\tau$, (ii) $t - t_0 = \tau$ bzw. (iii) $t - t_0 = \tau$, s. auch Bild 1.

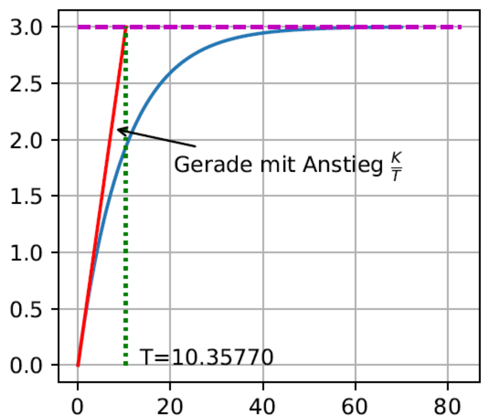

Figure 1: Situation für iii) mit $K = 3, \tau = 10$ bei $t_0 = 0$.

[1]Dieses Know-How wird in der Regelungstechnik angewendet, um die so genannte Zeitkonstante τ eines speziellen Systems aus seinem Ausgangssignal abzulesen.