Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1 (inkl. einiger Lösungen)
13. Woche – Vektorraum

A1 Basis - linear unabhängig
Ordnen Sie die Worte 'mindestens', 'höchstens' oder 'genau' folgenden Aussagen zu:
Lösung:
Eine Menge von Vektoren, die

(a) eine **Basis** des $\mathbb{R}^n$ ist, hat **genau** n Vektoren.

(b) (im $\mathbb{R}^n$) **linear unabhängig** ist, hat **höchstens** n Vektoren.

A2 Geben Sie Dimension und eine Basis des Vektorraums der Polynome vom Höchstgrad 3, $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ an. Was ist der Nullvektor?

Lösung:
$\dim(\mathcal{P}_3(\mathbb{R})) = 4$,
Basis: $\underline{v}^1 = x \mapsto 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1, \underline{v}^2 = x, \underline{v}^3 = x^2, \underline{v}^4 = x^3, \underline{0} = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$

$$\begin{aligned} \underline{v}^1 &= x \mapsto 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1 \\ \underline{v}^2 &= x \mapsto x \\ \underline{v}^3 &= x \mapsto x^2 \\ \underline{v}^4 &= x \mapsto x^3 \\ \underline{0} &= x \mapsto 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 \end{aligned}$$

Z A3 Gegeben sind die Vektoren $\underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Skizzieren Sie die lineare Hülle $\operatorname{span}(\underline{v}^1)$ des Vektors $\underline{v}^1$.

(b) Skizzieren Sie die lineare Hülle $\operatorname{span}(\underline{v}^1, \underline{v}^2)$ der Vektoren $\underline{v}^1, \underline{v}^2$.

Lösung: a) Gerade entlang $\underline{v}^1$, b) der ganze $\mathbb{R}^2$:-).

A4 Die Vektoren $\underline{v}^1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ und $\underline{v}^2 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$.

Bestimmen Sie die Koordinaten α_1, α_2 des Vektors $\underline{v} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ bzgl. dieser Basis, d.h. gesucht sind α_1, α_2 so, dass $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}^1 + \alpha_2 \underline{v}^2$ gilt.

Veranschaulichen Sie die Situation konkret für $\underline{v} = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$ grafisch.

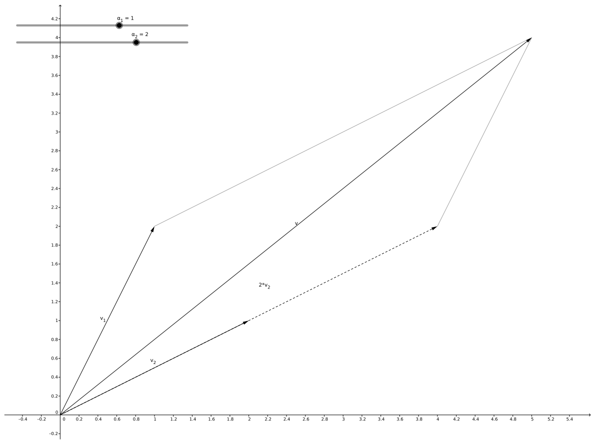
Lösung: $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}^1 + \alpha_2 \underline{v}^2$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix} = \begin{array}{ccc|c|c} \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & \cdot(-1) & \cdot(2)\\ 2\alpha_1 & + & \alpha_2 & \cdot(2) & \cdot(-1) \end{array}$$

α_1 eliminiert: $\rightarrow 2x - y = (2-2)\alpha_1 + (4-1)\alpha_2 \rightarrow \alpha_2 = \frac{2x-y}{3}$

α_2 eliminiert: $\rightarrow 2y - x = (4-1)\alpha_1 + (2-2)\alpha_2 \rightarrow \alpha_1 = \frac{2y-x}{3}$

für $x = 5, y = 4 \rightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$



A5 Vollziehen Sie die drei Gleichungen $\underline{e}_{k_{\dots}} = \dots$ in TET2 S. 96 nach.

Lösung: Mit Hingucken: ✓

A6 In VL 6_3 wird der Cosinussatz verwendet um zu beweisen, dass für das Skalarprodukt gilt:

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = |\underline{u}||\underline{v}| \cos(\sphericalangle \underline{u}, \underline{v}).$$

In Aufgabe Ü3/2.1.23 wird hingegen erwartet, den Kosinussatz mit Hilfe des Skalarprodukts zu beweisen. Das wäre zusammen ein verbotener Ringschluss:
Aus A folgt B und aus B folgt A, damit beißt sich die Katze in den Schwanz und weder A noch B sind bewiesen.

Beweisen Sie den Kosinussatz (OHNE Verwendung des Skalarprodukts ;-)), wie in der VL empfohlen unter Verwendung einer Höhe, z.B.:

$$h^2 = \dots \text{(Pythagoras in einem Teildreieck)} = \dots \text{(Pythagoras im anderen Teildreieck)}$$

Lösung:

$$h^2 = c^2 - (a - b\cos\alpha)^2 = b^2 - (b\cos\alpha)^2$$
$$\Leftrightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \quad \text{q.e.d.}$$

A7 Skalarprodukt in TET

Gegeben ist ein Vektor $\underline{k} \in \mathbb{R}^3$. Für welche Orte $\underline{r} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\underbrace{\langle \underline{k}, \underline{r} \rangle}_{=:\underline{k}\cdot\underline{r}} = \text{const}\,?$$

Lösung: Eine Ebene senkrecht zu $\underline{k}$, s. TET2 S. 34.

Z A8 Kreuzprodukt in EMF

Im 2. Semester lernen Sie im Fach 'Elektrische und magnetische Felder' (EMF) das ebene Magnetfeld (magnetische Feldstärke $\underline{H}$) eines (idealisiert) unendlich langen Stromleiters kennen:

$$\underline{H}(\underline{r}) = \frac{I}{2\pi\|\underline{r}\|^2} \cdot \underline{e}_L \times \underline{r},$$

wobei $\underline{e}_L$ der Einheitsvektor (oder der auf Länge=1 normierte Vektor) in Richtung des Stromflusses ist und $\underline{r}$ der Vektor vom Leiter zum 'Ort' $\underline{r}$ (der 'Ortsvektor') ist, dessen Feldstärke mit $\underline{H}(\underline{r})$ angegeben wird.

Geben Sie die magnetische Feldstärke für einen Strom $I = 3\text{A}$ 'entlang der z-Achse' an den Orten

$\underline{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m}$, $\underline{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m}$ und $\underline{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{m}$ an.

Zeichnen Sie die Situation für einen Kreis (um den Ursprung) mit Radius 3m in der x-y-Ebene.

Lösung:

$$\underline{H}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m}\right) = \frac{3\text{A}}{2\pi(3\text{m})^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m} = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

analog $\underline{H}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m}\right) = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{A}}{\text{m}}$ und $\underline{H}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m}\right) = \underline{0}$.

Magnetfeld umkreist den Strom entgegen des Uhrzeigersinns: rechte Hand: Daumen=Strom, Finger=Magnetfeld.

A9 [**Zusatz:**] Gegeben ist eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ mit

$$f(\underline{x}, \underline{y}) = f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + cx_2y_2 \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Unter welchen Bedingungen (an die Koeffizienten a, b, c) ist diese Abbildung ein (evtl. nicht-euklidisches) Skalarprodukt, s. F6_3?

Lösung:

- Symmetrie: mit 'Hingucken' ✓
- Additivität: mit 'Hingucken' ✓
- Homogenität: mit 'Hingucken' ✓
- Positiv definit: $f(\underline{x}, \underline{x}) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \overset{!}{>} 0$ $(*)$ für $\underline{x} \neq 0$:
  Wie man leicht sieht, sind notwendige Bedingungen $a, c > 0$ (sonst wäre $(*)$ schon mit $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $= \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$ nicht erfüllt).
  $(*) \cdot a$ liefert:

$$a^2x_1^2 + 2abx_1x_2 + acx_2^2 > 0 \tag{0.1}$$

$$\Leftrightarrow \quad (ax_1 + bx_2)^2 + \left(ac - b^2\right) x_2^2 > 0 \quad | \text{ quadratische Ergänzung} \tag{0.2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(ac - b^2\right) > 0 \tag{0.3}$$

f ist ein Skalarprodukt genau dann, wenn $a, c > 0 \wedge (ac - b^2) > 0$.

Bemerkung Sie werden später genau diese Bedingungen $a, c > 0 \wedge (ac - b^2) > 0$ für die positive Definitheit von Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ kennen lernen. Freuen Sie sich auf quadratische Formen ...

Wiederholung+Ausblick: Integration

A10 In der Vorlesung Theoretische Elektrotechnik werden Sie folgendes Integral vorfinden, s. TET1 Seite134 wobei $\sigma(.)$ und $P_1(.)$ gegebene Funktionen sind:

$$\int_{-1}^{1} \sigma(\vartheta) P_1(\cos(\vartheta)) \, \mathrm{d}\cos(\vartheta) \quad \text{wobei } \mathrm{d}\cos(\vartheta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\vartheta}(\cos(\vartheta)) \, \mathrm{d}\,\vartheta$$

Hier wurde die Substitutionsregel quasi 'halb angewendet'. Notieren Sie das Intregral 'ganz substituiert' (mit $t = \cos(\vartheta)$) bzw. 'nicht substituiert':

$$\int_{t=-1}^{1} \quad \dots \quad \mathrm{d}\,t = \int_{-1}^{1} \sigma(\vartheta) P_1(\cos(\vartheta)) \, \mathrm{d}\cos(\vartheta) = \int_{\vartheta=\pi}^{0} \quad \dots \quad \mathrm{d}\,\vartheta$$

Lösung:

$$\int_{t=-1}^{1} \sigma(\arccos(t)) P_1(t) \, \mathrm{d}\,t = \int_{-1}^{1} \sigma(\vartheta) P_1(\cos(\vartheta)) \, \mathrm{d}\cos(\vartheta) = \int_{\vartheta=\pi}^{0} \sigma(\vartheta) P_1(\cos(\vartheta)) \sin(\vartheta) \, \mathrm{d}\,\vartheta$$