Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

inkl. Lösung

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1

14. Woche – analytische Geometrie

A1 Hessesche Normalform im $\mathbb{R}^2$

Sie haben in der Def. 6.44 die Hessesche Normalform

$$\langle \underline{x}, \underline{n} \rangle = d \qquad (*)$$

zur Beschreibung einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ kennen gelernt. Welches Gebiet beschreibt die Gleichung im $\mathbb{R}^2$, z.B.

$$\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \rangle = 2\,?$$

Lösung: Das ist die **parameterfreie Darstellung der Gerade** im $\mathbb{R}^2$: $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = 2$, die senkrecht zum Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ verläuft und den Abstand 2 zum Koordinatenursprung hat.

Z A2 Achsenabschnitte

Teilt man die Gleichung (*) durch d, erhält man

$$\langle \underline{x}, \frac{\underline{n}}{d} \rangle := \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (**)$$

Machen Sie sich klar, an welchen Punkten die durch (**) beschriebene Ebene die Achsen (x-Achse,...) schneidet. (Für $y = z = 0 \;\rightarrow\; x = \ldots$)
Lösung: Die x-Achse wird bei $x = a$ geschnitten, die y-Achse bei $y = b$ ... Daher nennt man (**) auch die Achsenabschnittsform.

Z A3 Schnitt: Gerade - Ebene

Sie wollen den Durchstoßpunkt einer Geraden g durch eine Ebene E ermitteln. Überlegen Sie sich die Anzahl der Unbekannten und die Anzahl der Gleichungen, die Sie ansetzen, wenn Sie

(a) die Parameterdarstellung der Geraden mit der Parameterdarstellung der Ebene vereinigen bzw.

(b) die Parameterdarstellung der Geraden in die parameterfreie (Hessesche Normalform) Darstellung der Ebene einsetzen.

Lösung:

(a) $\underline{x} = \underline{r}^g + \lambda \underline{s} = \underline{r}^E + t_1 \underline{s}^1 + t_2 \underline{s}^2 \;\; \rightarrow$ 3 Unbekannte (λ, t_1, t_2) und 3 Gleichungen: 1 Vektorgleichung = 3 'skalare' Gleichungen.

(b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{r}^g + \lambda \underline{s}$ in die Gleichung der Ebene $ax + by + cz = 1$ einsetzen $\rightarrow$ eine Gleichung mit einer Unbekannten (λ).

A4 Abstand zweier Geraden = 0

Betrachten Sie die Berechnung des Abstandes zwischen zwei Geraden VL 6_5 S.3.
Deuten Sie den Fakt
$$[\underline{s}^0, \underline{s}^1, \underline{r}^1 - \underline{r}^0,] = \langle \underline{s}^0 \times \underline{s}^1, \underline{r}^1 - \underline{r}^0 \rangle = 0$$
Hinweis: Sie könnten die Phrasen verwenden:
'Die Projektion von ... auf ... ist Null' oder
'... liegt in der von ... und ... aufgespannten Ebene' oder
'... und ... und ... sind linear abhängig'.
Bemerkung: $\underline{s}^0 \times \underline{s}^1$ nennt man die Gemeinnormale (die gemeinsame Normale) der beiden Geraden.

Wiederholung + Anwendung Integration Einheiten

A5 Aus Folie 5_1 S.3 ist klar, dass die Einheit eines Integrals = der Einheit des Integranden mal Einheit des Differenzials ist. Rekapitulieren Sie dies z.B. an Aufgabe 12.3a und an den Integralen $W = \int F \,\mathrm{d}\, s$ sowie $W = \int u(t)i(t) \,\mathrm{d}\, t$.

Manchmal kann man auch aus der Einheit von Integral und Differenzial auf die Einheit des Integranden schließen: Schließen Sie aus $U_{AB} = \int_A^B E \,\mathrm{d}\, r$[1] auf die Einheit des elektrischen Feldes E, s. auch ET2 Folie 1-15

Lösung:

- 12.3a: $V = \int Qv(t) \,\mathrm{d}\, t$: $[V] = [Qv(t)] \cdot [\mathrm{d}\, t] = m^2 \frac{m}{s} \cdot s = m^3$,
- $W = \int F \,\mathrm{d}\, s$: $[W] = [F] \cdot [\mathrm{d}\, s] = N \cdot m = Nm$,
- $W = \int u(t)i(t) \,\mathrm{d}\, t$: $[W] = [u][i] \cdot [\mathrm{d}\, t] = VA \cdot s = VAs = Ws$,
- $U_{AB} = \int_A^B E \,\mathrm{d}\, r$: $[U] = [E] \cdot [\mathrm{d}\, r] \Leftrightarrow V = [E] \cdot m \Rightarrow [E] = \frac{V}{m}$.

Wiederholung + Anwendung Projektion

A6 [**Zusatz:**] In Aufgabe 2.1.13 haben wir die Zerlegung eines Vektors $\mathbf{a}$ in zwei Vektoren $\mathbf{a}_{\parallel b}$ und $\mathbf{a}_{\perp b}$ mit $\mathbf{a}_{\parallel b} + \mathbf{a}_{\perp b} = \mathbf{a}$ einfach gelöst durch:

$$\mathbf{a}_{\parallel} = \mathbf{a}_{\mathbf{b}} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{b}|^2} \mathbf{b} \underset{\mathbf{e}_b := \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}}{=} \langle \mathbf{a}, \mathbf{e}_b \rangle \mathbf{e}_b = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_b)\mathbf{e}_b \qquad \text{und} \qquad \mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\parallel} \quad (*)$$

In der LV Theoretische Elektrotechnik finden Sie für das gleiche Problem quasi folgende Lösung, s. TET1 Seite217:

$$\mathbf{a}_{\parallel} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_b)\mathbf{e}_b \qquad \text{und} \qquad \mathbf{a}_{\perp} = -\mathbf{e}_b \times (\mathbf{e}_b \times \mathbf{a}) \quad (**)$$

Überführen Sie (**) in (*) durch Anwendung der BAC-CAB-Formel für 'wiederholtes Kreuzprodukt'.

[1] Gilt für $\underline{E} \parallel \underline{r}$

Lösung:

$$\mathbf{a}_\perp = -\underbrace{\mathbf{e}_b}_{A} \times (\underbrace{\mathbf{e}_b}_{B} \times \underbrace{\mathbf{a}}_{C}) = C(AB) - B(AC) = \mathbf{a}\underbrace{(\mathbf{e}_b \cdot \mathbf{e}_b)}_{=1} - \underbrace{\mathbf{e}_b(\mathbf{e}_b \cdot \mathbf{a})}_{=\mathbf{a}_\parallel} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_\parallel \quad \checkmark$$

Bemerkung Das Wesentliche an der BAC-CAB-Formel:
Während das Kreuzprodukt $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ senkrecht zu $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ ist, liegt das Kreuzprodukt mit diesem Kreuzprodukt $\ldots \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ wieder in der von $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ aufgespannten Ebene, ist also eine Linearkombination von $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$.