Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

inkl. Lösung

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. einiger Lösungen)
3. Woche – Kugelkoordinaten, Jacobi-Matrix, Funktionaldeterminante + Abi-Know-How = 2fach Integral

A1 Ein Kreiskegel wird vermessen und der Radius $r = 5$cm und die Höhe $h = 6$cm mit einem jeweiligen maximalen relativen Fehler von 1.5% bestimmt.

Wie groß ist der maximale absolute sowie prozentuale Volumenfehler?
Hinweis: Volumen(Zylinder) = 3·Volumen(Kreiskegel)

Lösung: Das Volumen eines Kreiskegels kann mit

$$V = V(r,h) = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot h$$

bestimmt werden. Die partiellen Ableitungen sind dann

$$\frac{\partial}{\partial r} V(r,h) = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r \cdot h \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial h} V(r,h) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2.$$

Mit $|\Delta r| \leq 0.015 \cdot r$ und $|\Delta h| \leq 0.015 \cdot h$ folgt

$$|\Delta V| \lesssim 0.015 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = 0.045 \cdot V = \frac{9}{4} \cdot \pi \quad \text{und} \quad \frac{|\Delta V|}{V} \lesssim 4.5\%.$$

A2 Kugelkoordinaten - warm up

(a) Eine Kugeloberfläche wird in Kugelkoordinaten (Bsp 8.29) mit r =konstant beschrieben. Geben Sie den Bereich an, den die (Kugelkoordinaten-)Winkel φ und θ (in der VL ψ) durchlaufen.

(b) Welche Flächen werden durch φ =konstant (r, θ beliebig) bzw. θ =konstant (r, φ beliebig) beschrieben?

A3 Jacobi-Matrix Kugelkoordinaten, Funktionaldeterminante

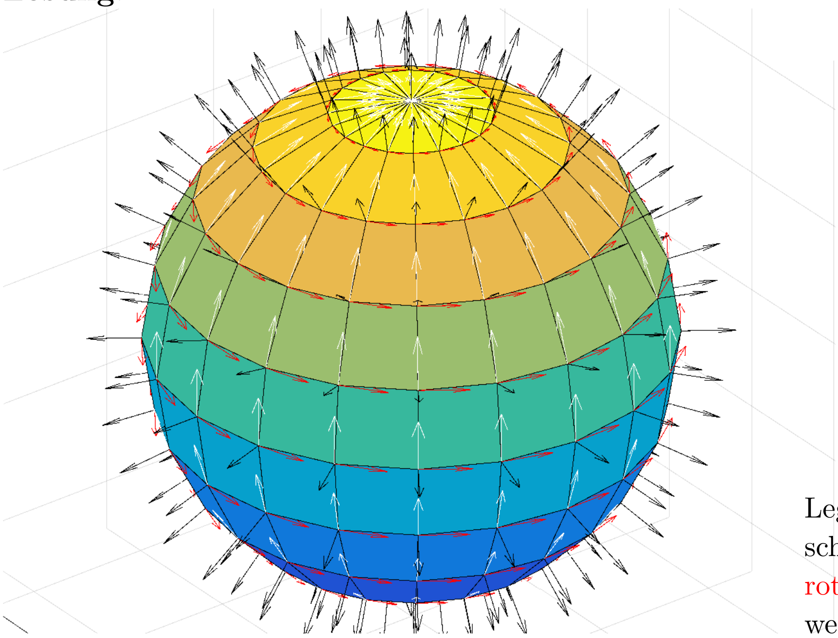
(a) Stellen Sie sich an einem beliebigen Punkt im $\mathbb{R}^3$ die Richtungen vor, in denen r bzw. φ bzw. θ zunehmen. Sind diese Richtungen orthogonal zueinander? Vergleichen Sie mit den Spalten der Jacobi-Matrix der Kugelkoordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f(r, \varphi, \theta)$ (s. Bsp 8.29) - sind diese orthogonal zueinander?

(b) Rekapitulieren Sie die Determinante einer 3×3-Matrix als Spatprodukt = Volumen des aus den Vektoren aufgespannten Spats. Was für ein Volumen erwarten Sie bei orthogonalen Vektoren (als Funktion der Beträge der Vektoren)?

(c) Vergleichen Sie das Produkt der Beträge der Spaltenvektoren der Jacobi-Matrix mit der Funktionaldeterminante, s. Bsp 8.31.

Zusatz: Spannen die Spalten der Jacobi-Matrix in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem auf (passen auf Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger der rechten Hand)?

Lösung:



Legende:
schwarze Pfeile: 1. Spalte Jacobi-Matrix
rote Pfeile: 2. Spalte Jacobi-Matrix
weiße Pfeile: 3. Spalte Jacobi-Matrix

A4 Zusatz: Jacobi-Matrix zur Linearisierung in der Regelungstechnik

In einer Regelungstechnik-Aufgabe werden Sie (bei der Betrachtung eines im Magnetfeld schwebenden Körpers) zur Linearisierung[1] der Funktion

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} x_2 \\ g - \dfrac{k}{m} \dfrac{u^2}{(x_1 + k_{\mathrm{Fe}})^2} \end{pmatrix}$$

folgende Jacobi-Matrizen benötigen:

$$A(x_1, x_2, u) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x_1, x_2)} \quad \text{und} \quad b(x_1, x_2, u) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial u}$$

Bestimmen Sie A, b allgemein und an der Stelle $(x_1, x_2, u) = (x_1^0, 0, \sqrt{\frac{mg}{k}}(x_1^0 + k_{\mathrm{Fe}}))$.
Hinweis: A und b sind Teilmatrizen der 'Gesamt'-Jacobi-Matrix $J_{\boldsymbol{f}} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x_1,x_2,u)}$.
m, g, k, k_{Fe} und x_1^0 sind Konstanten.

[1]Das lernen Sie noch.

Lösung:

$$A = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\frac{k}{m}\frac{u^2}{(x_1+k_{\text{Fe}})^3} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x_1, x_2)}\right|_{\substack{x_1 \,=\, x_1^0 \\ x_2 \,=\, 0 \\ u \,=\, \dots}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{x_1^0+k_{\text{Fe}}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\frac{k}{m}\frac{u}{(x_1+k_{\text{Fe}})^2} \end{pmatrix} \qquad \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial u}\right|_{\substack{x_1 \,=\, x_1^0 \\ x_2 \,=\, 0 \\ u \,=\, \dots}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{x_m^0+k_{\text{Fe}}}\sqrt{\frac{kg}{m}} \end{pmatrix}$$

A5 Zusatz: Anwendung Grandient - Richtungsableitung

Den Anstieg einer skalaren Größe U in einer bestimmten Richtung $\underline{a}$ nennt man **Richtungsableitung**. Sie wird wie folgt berechnet:

$$\frac{\partial U}{\partial \underline{a}} = \frac{1}{|\underline{a}|}\,\underline{a}^T \operatorname{grad} U = \underline{e}_a^T \operatorname{grad} U \qquad (*)$$

Wäre U die geografische Höhe und $\underline{a}$ die Richtung eines Wanderweges auf der Landkarte, entspräche $\frac{\partial U}{\partial \underline{a}}$ dem Anstieg des Wanderweges.

Vollziehen Sie die Richtungsableitung (Normalenableitung) in TET Folie 102 nach.

Lösung: Aus dem Kontext schließt man, dass die 'Normalenableitung' die Richtungsableitung von G in z-Richtung (bei $z = 0$) ist. Also $\underline{e}_a^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ in (*) und vom Gradienten interessiert nur noch die letzte Komponente $\frac{\partial G}{\partial z}$.

A6 Fläche als Einfach- und Zweifach-Integral

Machen Sie sich klar, dass Ihr Abitur-Know-How zur Berechnung der **Fläche** unter einer Kurve
$A = \int_a^b f(x)dx$ letztendlich gleich einem Zweifachintegral (Def. 9.1) von $f(x, y) = 1$ über den Bereich $\Omega = \{(x, y) : a < x < b,\, 0 < y < f(x)\}$ ist. Also

$$A = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \int_0^{f(x)} 1dydx$$

Damit ist auch klar, dass die Berechnung eines **Volumen**s gleich einem Dreifachintegral 'über 1' ist, vgl. Normalbereich im $\mathbb{R}^3$ (Def. 9.1):

$$V = \iint_\Omega f(x, y)\, dydx = \iint_\Omega \int_0^{f(x,y)} 1\, dzdydx$$