Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

inkl. Lösung

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. einiger Lösungen)

5. Woche – Div, grad, rot in EMF und Kurvenintegral in Polarkoordinaten

Div, grad, rot in elektrischen und magnetischen Feldern

A1 Machen Sie sich die Rechenregel $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \underline{0}$ mit Hilfe des Satzes von Schwarz klar.

Lösung:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \operatorname{rot} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{zy} - f_{yz} \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \underline{0}$$

A2 Da für jedes Feld $\underline{F}$ die Regel $\operatorname{div} \operatorname{rot} \underline{F} = 0$ gilt, ist z.B. $\operatorname{div} \underline{B} = 0$ garantiert, wenn $\underline{B} = \operatorname{rot} \underline{F}$.
Formulieren Sie den analogen Satz für $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \underline{0}$.

Lösung: Da für jedes Feld f die Regel $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \underline{0}$ gilt, ist z.B. $\operatorname{rot} \underline{E} = \underline{0}$ garantiert, wenn $\underline{E} = \operatorname{grad} f$ bzw. wie in EMF $\underline{E} = -\operatorname{grad} \varphi$.

Z A3 **quellenfrei: Divergenz**$= 0$ **und wirbelfrei: Rotation**$= \underline{0}$
Sie lernen in der Lehrveranstaltung *Elektrische und magnetische Felder* das stationäre elektrische Strömungsfeld (Kap. 2), das elektrostatische Feld (Kap. 3) und das allgemeine elektromagnetische Feld (Kap. 4) kennen. Sie finden die Gleichungen des allgemeinen elektromagnetischen Feldes, die Maxwellschen Gleichungen, hier: Zusammenfassung EMF.

(a) Machen Sie sich zunächst für das allgemeine elektromagnetische Feld klar, für welche der Felder, $\underline{H}, \underline{B}, \underline{E}, \underline{D}$ immer gilt: Divergenz$= 0$ bzw. Rotation$= \underline{0}$.

(b) Wie ändert sich das Ergebnis von (a) für das stationäre Strömungsfeld, also für $I = \frac{\mathrm{d}\,Q}{\mathrm{d}\,t} =$ konstant. (Außerdem gilt: $\dfrac{\partial \underline{D}}{\partial t} = 0, \dfrac{\partial \underline{B}}{\partial t} = 0$.)

(c) Wie ändert sich das Ergebnis von (a) für das elektrostatische Feld, also für $I = \frac{\mathrm{d}\,Q}{\mathrm{d}\,t} = 0$, somit $\underline{J_K} = 0$. (Außerdem gilt: $\dfrac{\partial \underline{D}}{\partial t} = 0, \dfrac{\partial \underline{B}}{\partial t} = 0$.)

Nutzen Sie **A2**, um sich klar zumachen, in welchen Fällen (a-c) $\underline{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ gilt und in welchen nicht.

Lösung: s. unten in Blau

Allg. elektromagn. Feld Maxwellsche Glgn.	Stationäres Strömungsfeld $I = \frac{\mathrm{d}\,Q}{\mathrm{d}\,t} =$ konstant	Elektrostatisches Feld $I = \frac{\mathrm{d}\,Q}{\mathrm{d}\,t} = 0$
$\operatorname{rot} \underline{H} = \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \underline{J_K}$	$\operatorname{rot} \underline{H} = \underline{J_K}$	$\operatorname{rot} \underline{H} = \underline{0}$
$\operatorname{rot} \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$	$\operatorname{rot} \underline{E} = \underline{0}$	$\operatorname{rot} \underline{E} = \underline{0}$
$\operatorname{div} \underline{D} = \rho$	$\operatorname{div} \underline{D} = \rho$	$\operatorname{div} \underline{D} = \rho$
$\operatorname{div} \underline{B} = 0$	$\operatorname{div} \underline{B} = 0$	$\operatorname{div} \underline{B} = 0$

In den Fällen mit rot $\underline{E} = \underline{0}$, also (b) und (c) kann $\underline{E}$ ein Potential φ zugeordnet werden. Sobald der Strom nicht konstant ist, also auch das Magnetfeld zeitabhängig ist, ist rot $\underline{E} \neq \underline{0}$ und somit $\underline{E}$ kein Gradientenfeld, Fall (a).

A4 Zusatz: Anwendung Ladung einer Fläche in Zylinderkoordinaten

Vollziehen Sie die Berechnung der Ladung einer Fläche in TET S. 102 nach.

Hinweis: Im Fach Theoretische Elektrotechnik wird für die Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z) anstelle von (r, φ, z) verwendet. Der Radius ϱ ist nicht zu verwechseln mit der Flächenladungsdichte ϱ_F in diesem Beispiel.

Lösung: Funktionaldeterminante ϱ bei Integration in Zylinderkoordinaten, Substitution $z = \varrho^2 + a^2 \rightsquigarrow \mathrm{d}\,z = 2\varrho\,\mathrm{d}\,\varrho\ \ldots$

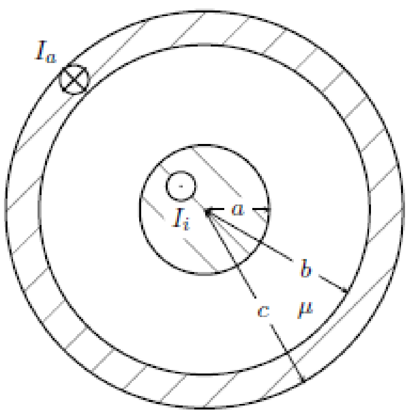
A5 Zusatz: Volumenintegral in TET

Parametrisieren Sie das in Aufgabe 9.3.b), s. unten, beschriebene Gebiet.

Modul „Theoretische Elektrotechnik" (ET-12 02 01) 06.12.2021

Aufgabe 9.3

Eine sehr lange koaxiale Leiteranordnung entlang der z-Achse dient als Zu- und Rückleitung eines Gleichstromverbrauchers. Der Innenleiter hat den Radius a und der Außenleiter den Innenradius b und den Außenradius c. Der Innenleiter führt den Strom $I_i = +I$ und der Außenleiter den Strom $I_a = -I$.



a) Berechnen Sie die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ im gesamten Raum.
b) Berechnen Sie die zwischen dem Innen- und Außenleiter gespeicherte magnetische Energie von einem Stück von der Anordnung der Länge l.

Lösung:

$$\int_{z=0}^{l} \int_{\varrho=a}^{b} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \ldots \underbrace{\varrho}_{\text{Funktionaldeterminante}} \mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,\varrho\,\mathrm{d}\,z$$