Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. einiger Lösungen)

5. Woche – Div und rot in EMF und Kurvenintegral in Polarkoordinaten

Kurvenintegral 1. Art

Z A1 Kurvenintegral in Polarkoordinaten

Beim Kurvenintegral werden die Kurvenpunkte $\underline{\gamma}(t) = \underline{x}(t)$ als Funktion eines 'Laufparameters' z.B. t beschrieben und nachfolgend $\mathrm{d}\,\underline{s} = \mathrm{d}\,\underline{x} = J_\gamma(t)\,\mathrm{d}\,t = \underline{\gamma}'(t)\,\mathrm{d}\,t$ ermittelt sowie für das Kurvenintegral 1. Art (skalares Kurvenintegral, z.B. Bogenlänge)

$$\mathrm{d}\,s = \|\,\mathrm{d}\,\underline{x}\| = \|J_\gamma(t)\|\,\mathrm{d}\,t = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,\mathrm{d}\,t.$$

Ermitteln Sie $\mathrm{d}\,s$ für den Fall, dass die Kurve in Polarkoordinaten beschrieben wird und der 'Laufparameter' $t = \varphi$ ist:

$$\underline{\gamma}(\varphi) = \underline{x}(\varphi) = \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos(\varphi) \\ r(\varphi)\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Dabei sei $r(\varphi)$ eine gegeben Funktion.

(a) Geben Sie $\underline{\gamma}'(\varphi)$ an (Produktregel verwenden).

(b) Ermitteln Sie $\|\underline{\gamma}'(\varphi)\|$.

(c) Geben Sie $\mathrm{d}\,s = |\,\mathrm{d}\,\underline{x}|$ an und vergleichen mit Merziger 9.2 bzw. 11.1 (ca. S. 129 bzw. 148).

(d) Verwenden Sie diese Formel zur Berechnung der Bogenlänge in Polarkoordinaten in der Aufgabe 2/22.2. :-)

Lösung:

(a)

$$\underline{\gamma}'(\varphi) = \begin{pmatrix} r'\cos\varphi - r\sin\varphi \\ r'\sin\varphi + r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

(b)

$$\|\underline{\gamma}'(\varphi)\| = \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}$$

(c)

$$\mathrm{d}\,s = |\,\mathrm{d}\,\underline{x}| = \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\,\mathrm{d}\,\varphi$$

Z A2 Gegeben f_x, f_y Gesucht $f(x,y)$

Gegeben ist das Gradientenfeld $\operatorname{grad} f(x,y) = (f_x, f_y)^T$. Überprüfen Sie, ob die Integrabilitätsbedingungen, VL 9.29, erfüllt sind, und ermitteln Sie jeweils die zugehörige Funktion $f(x,y)$:

(a) $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = y,\ f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = x.$

(b) $f_x = 2x + y,\ f_y = x + 2y.$

Lösung: (a) $f(x,y) = xy + C, \quad C \in \mathbb{R},$ (b) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

A3 Umlaufintegral

Geben Sie für das Beispiel 9.32 den Wert des Integrals an, wenn der Integrationsweg

$$\gamma(\lambda) = \begin{pmatrix} \cos\lambda \\ 2 + \sin\lambda \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in [0, 2\pi]$$

ist (Begründung).

Lösung: $\oint_\gamma \underline{F} \cdot \mathrm{d}\,\underline{s} = 0$, da dieser Integrationsweg ein **einfach zusammenhängendes Gebiet** mit $\operatorname{rot} \underline{F} = 0$ umläuft.

Rotation und Divergenz vom elektrischen Feld bzw. $\underline{D}$-Feld

A4 Zusatz: Welche Auswirkungen hat die Rotationsfreiheit auf die Berechnung des vektoriellen Kurvenintegrals über diese Felder? Überlegen Sie sich, bei welchen Aufgaben in *Elektrische und magnetische Felder* Sie diese Eigenschaft nutzen können.

Lösung: Rotationsfreiheit impliziert Wegunabhängigkeit des vektoriellen Kurvenintegrals. Dem rotationsfreien Feld kann ein Potential zugeordnet werden und der Wert des Kurvenintegrals ist Potential(Endpunkt)-Potential(Startpunkt). Dies wird bei den Aufgaben in Kap. 2 und 3. genutzt.

A5 Zusatz: Skizzieren Sie die Verschiebungsflussdichte $\underline{D}$ um eine geladene Kugel. In welchem Gebiet gilt $\operatorname{div}\underline{D} = 0$ und wo gilt $\operatorname{div}\underline{D} \neq 0$.

Lösung: Wo keine Ladung $\rho = 0$, da $\operatorname{div} \underline{D} = 0$, also außerhalb der Kugel.