

## Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. einiger Lösungen) 6. Woche Kurvenintegral und Oberflächenintegral (in EMF)

### Z A1 Flächenintegral 2. Art in EMF

Im Fach 'Elektrische und magnetische Felder' lösen Sie Oberflächenintegrale 2. Art

$$I = \iint \underline{J} \cdot d\underline{A} \quad \text{bzw.} \quad \Phi = \iint \underline{B} \cdot d\underline{A}$$

$d\underline{A} = \underline{n} dA$  ist ein Vektor, der senkrecht auf der betrachteten Fläche steht. Dabei wird meist genutzt, dass die Flussgröße ( $\underline{J}, \underline{B}$ ) senkrecht zur (sinnvoll gewählten) Fläche ist, z.B.:

$$\iint \underline{J} \cdot d\underline{A} \stackrel{\underline{J} \parallel d\underline{A}}{=} \iint J dA \quad \text{mit } J = |\underline{J}| \text{ und } dA = |d\underline{A}|$$

Ermitteln Sie  $d\underline{A}$  und  $dA$  für die Aufgaben 2.15, 2.3 und 4.17 aus dem EMF-Übungsheft nach den Regeln der Kunst (VL 9.6), indem Sie

- (a) die Fläche durch 2 (Lauf-)Parameter beschreiben  $\underline{r} = \underline{r}(u, v)$
- (b) per Kreuzprodukt aus den beiden zur Fläche tangentialen Vektoren den Vektor senkrecht zur Fläche ermitteln  $d\underline{A} = \underline{r}_u \times \underline{r}_v du dv$
- (c) sich überzeugen, dass dieses  $d\underline{A}$  tatsächlich parallel zur Flussgröße ist und
- (d) den Betrag  $dA = |d\underline{A}|$  betrachten, bis Sie 'sehen', dass er gleich den in EMF gebrauchten 'Abkürzungen' ist, nämlich für
  - i. Aufgabe 2.15:  $dA = b dr$
  - ii. Aufgabe 2.3:  $dA = 2\pi r dr$  bzw.
  - iii. Aufgabe 4.17:  $dA = h dr$ .

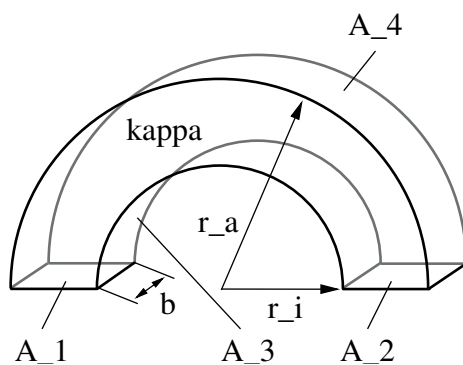


Bild zu 2.15

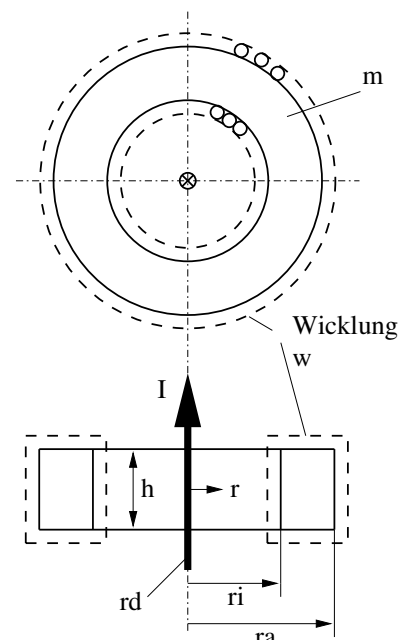


Bild zu 4.17

**Lösung:** Für (i) Aufgabe 2.15: Strom durch die Fläche  $A_2$ :  $I = \iint_{A_2} \underline{J} \cdot d\underline{A}$

(a) Parametrisierung der Fläche z.B. (Rotationsachse = z-Achse)  $\underline{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ z \end{pmatrix}$  mit  $\begin{matrix} r_i \leq r \leq r_a \\ 0 \leq z \leq b \end{matrix}$

(b)  $d\underline{A} = \underline{r}_r \times \underline{r}_z dr dz = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dr dz = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dr dz$

(c)  $d\underline{A} \parallel \underline{J}$  Strom fließt nach 'unten' heraus  $A_2$  raus;  $d\underline{A}$  zeigt im Moment noch nach 'oben' (x-Achse); Also Wahl  $d\underline{A} = - \dots$

(d)  $I = \iint_{A_2} \underline{J} \cdot d\underline{A} \stackrel{d\underline{A} \parallel \underline{J}}{=} \iint_{A_2} J dA$

Mit  $J = J(r)$  (bei dieser Anordnung) und  $dA = |d\underline{A}| = 1 dr dz$ :

$$I = \int_{r=r_i}^{r_a} \int_{z=0}^b J(r) dz dr = \int_{r=r_i}^{r_a} J(r) \underbrace{b dr}_{dA}$$

Die in EMF gebrauchte 'Abkürzung'  $dA = b dr$  stellt also ein bereits gelöstes inneres Integral des eigentlichen Flächen(=Doppel)-Integrals über eine Integrationsvariable (hier  $z$ ) dar, von der die Flussgröße (hier  $J$ ) nicht abhängt.

**A2 Ebene 2D-Funktionaldeterminante** =  $\|\underline{r}_u \times \underline{r}_v\|_2$ 

Betrachten Sie noch einmal das 2-dimensionale Bereichsintegral in Aufgabe 2/20.9 d, s. [Übung 3](#), z.B. mit  $f(P) = 1$  (also Berechnung der Fläche des ebenen Bereiches).

- (a) Beschreiben Sie den Bereich in geeigneten Polarkoordinaten?
- (b) Überzeugen Sie sich, dass die laut [Satz 9.9](#) bei Koordinatentransformation **ebener** Bereiche zu verwendende Funktionaldeterminante nichts anderes als  $\|\underline{r}_u \times \underline{r}_v\|_2$  der Parametrisierung (möglicherweise) **gekrümmter** Bereiche ist, s. [Def 9.36](#).
- (c) Wiederholen Sie b) für elliptische Koordinaten (Aufgabe 2/20.19)

**Lösung:**

(a)

$$\underline{r}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 + r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad r = 0 \dots 1, \varphi = -\pi \dots 0$$

(b)

$$|\det(J_T)| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \right| = r$$
$$\|\underline{r}_r \times \underline{r}_\varphi\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \right\|_2 = r$$

(c)

$$\underline{r}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} ar \cos \varphi \\ br \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad r = 0 \dots 1, \varphi = 0 \dots 2\pi, \quad |\det(J_T)| = \|\underline{r}_r \times \underline{r}_\varphi\|_2 = abr$$

**Z A3 Zusatz: Wohin zeigen eigentlich  $\underline{r}_u$  und  $\underline{r}_v$ ?**

Sie haben in der VL gelernt, dass zur Berechnung von Flächenintegralen das Kreuzprodukt zweier Vektoren benötigt wird, nämlich von  $\underline{r}_u = \frac{\partial}{\partial u}\underline{r}(u, v)$  und  $\underline{r}_v = \frac{\partial}{\partial v}\underline{r}(u, v)$ .

- (a) Machen Sie sich zunächst anhand der Polarkoordinaten klar, dass  $\underline{r}_u$  und  $\underline{r}_v$  **tangential an Parameterlinien** sind.

Hier parametrisieren  $r, \varphi$  die Fläche, spielen also die Rolle von  $u, v$ .

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x(r, \varphi) \\ y(r, \varphi) \end{pmatrix}$$

- i. Zeichnen Sie von einem beliebigen Punkt in der  $(x, y)$ -Ebene ausgehend z.B. von

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{r}(r = 2, \varphi = \frac{\pi}{2}) \quad (*)$$

die sogenannte Parameterlinie  $\underline{\gamma}(r) = \begin{pmatrix} x(r, \varphi = \text{konstant}) \\ y(r, \varphi = \text{konstant}) \end{pmatrix}$ .

Das ist die mit  $r$  parametrisierte Linie also die Kurve, entlang der  $r$  von dem gewählten Punkt aus zunimmt.

Zeichnen Sie analog  $\underline{\gamma}(\varphi)$  mit  $r = \text{konstant}$ .

- ii. Zeichnen Sie die Vektoren  $\frac{\partial}{\partial r}\underline{r}(r, \varphi)$  und  $\frac{\partial}{\partial \varphi}\underline{r}(r, \varphi)$ , an einen beliebigen Punkt in der  $(x, y)$ -Ebene z.B. an  $(*)$  und vergleichen Sie diese Vektoren mit den Richtungen, in denen  $r$  bzw.  $\varphi$  (von diesem Punkt aus) zunimmt.

- (b) Machen Sie sich anhand der Kugelkoordinaten klar,

- i. was die Parameterlinien  $\underline{\gamma}(\varphi) = \underline{K}(r = \text{konstant}, \varphi, \theta = \text{konstant})$  und  $\underline{\gamma}(\theta)$  sind,
- ii. in welcher Richtung  $\varphi$  bzw.  $\theta$  zunehmen und
- iii. in welcher Richtung  $\frac{\partial}{\partial \varphi}\underline{r}(\varphi, \theta)$  bzw.  $\frac{\partial}{\partial \theta}\underline{r}(\varphi, \theta)$  zeigen, vgl. [Bsp 9.35](#).

Übrigens sind die Spaltenvektoren der Jacobi-Matrix der Kugelkoordinaten nichts anderes als  $\frac{\partial}{\partial r}\underline{K}(r, \varphi, \theta)$ ,  $\frac{\partial}{\partial \varphi}\underline{K}(r, \varphi, \theta)$  und  $\frac{\partial}{\partial \theta}\underline{K}(r, \varphi, \theta)$ , s. [Bsp. 8.29](#).

**Merke:** Sie können also zukünftig mit Hilfe der rechten Hand die Reihenfolge im Kreuzprodukt so planen, dass der Flächennormalenvektor  $\underline{r}_u \times \underline{r}_v$  in die gewünschte Richtung zeigt.

**Lösung:**

- (a) i.  $r$ -Linie: radialer Strahl (z.B.  $\varphi = \text{konstant} = \frac{\pi}{2}$ ),  $\varphi$ -Linie: Kreis (z.B.  $r = 2$ ).  
ii.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}\underline{r}(r, \varphi) &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} & \frac{\partial}{\partial \varphi}\underline{r}(r, \varphi) &= \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial r}\underline{r}(2, \frac{\pi}{2}) &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \frac{\partial}{\partial \varphi}\underline{r}(2, \frac{\pi}{2}) &= \begin{pmatrix} -2 \sin \frac{\pi}{2} \\ 2 \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Merke:**  $\underline{r}_r$  und  $\underline{r}_\varphi$  sind tangential an den ' $r$  bzw.  $\varphi$ -Linien' (= Richtungen, in denen  $r$  bzw.  $\varphi$  zunimmt).

