Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. einiger Lösungen)

7. Woche – Sektorformel, ...

A1 2D-Gauß ⇒ Sektorformel zur Flächenberechnung

Verwenden Sie die Sektorformel Bem. 9.49 zur Berechnung der Fläche des ebenen Bereiches in Aufgabe 2/20.9 d (also mit $f(P) = 1$).

Lösung:

$$\underline{\gamma}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1+\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \qquad \varphi = -\pi \dots 0, \qquad \underline{\gamma}'(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2}\oint_\gamma \det(\underline{\gamma}, \underline{\gamma}')\,\mathrm{d}\,\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0} \cos(\varphi) + 1\,\mathrm{d}\,\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Bemerkung: Auf dem 'Rückweg' von $(1,0)$ nach $(-1,0)$ (um den Umlauf zu schließen) ist $\underline{\gamma} \parallel \underline{\gamma}' \Rightarrow$ Integration über 0.

Z A2 2D-Gauß zur Flächenberechnung ⇒ 3D-Gauß zur Volumenberechnung

Der Trick bei der Sektorformel Bem. 9.49 ist die Anwendung Satzes von Gauß im 2D-Fall mit Wahl eines günstigen Vektorfeldes $\underline{v}$, dessen Divergenz konstant ist. Wenden Sie diese Idee zur Volumenberechnung mit Hilfe des Satzes von Gauß in 3D an. Wie wählen Sie das Vektorfeld $\underline{v}$ in diesem Fall?

Lösung:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{div}\underline{v} = 3$$

Mit Satz von Gauß $\iiint_V \operatorname{div}\underline{v}\,\mathrm{d}\,V = \iint_{\partial V} \underline{v}\,\mathrm{d}\,A$ folgt

$$V = \frac{1}{3}\iint_{\partial V} \underline{v}\,\mathrm{d}\,A$$

A3 Fläche in Archimedischer Spirale

Berechnen Sie die Fläche, die von der Archimedischen Spirale

$$\underline{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{pmatrix}$$

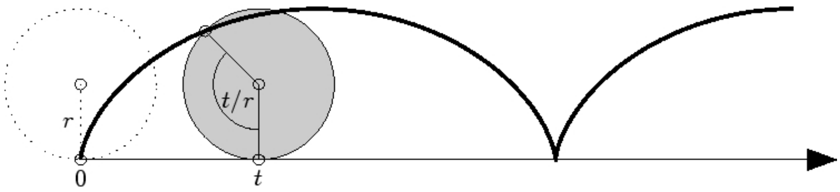
bei der ersten Umdrehung eingeschlossen wird.

Lösung: Anwendung Sektorformel:

$$\underline{\gamma}'(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(t) - t\sin(t) \\ \sin(t) + t\cos(t) \end{pmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{2}\oint_\gamma \det(\underline{\gamma}, \underline{\gamma}')\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} t^2\,\mathrm{d}\,t = \frac{4}{3}\pi^3$$

Z A4 Abrollen eines Rades: Bogenlänge und Fläche der Zykloide

Ein Rad mit Radius $r = 1$ rolle entlang einer Geraden. Betrachtet werde ein fester Punkt auf dem Rad.



(a) Leiten Sie die Kurve, die der Punkt beim Abrollen des Rades beschreibt, in Parameterdarstellung $x(t), y(t)$ her. Wählen Sie dazu als Parameter t die Strecke zwischen Startpunkt und momentanem Berührungspunkt des Rades (s. Skizze).

(b) Berechnen Sie die Länge der in (a) bestimmten Kurve für das einmalige Abrollen des Rades.

(c) Berechnen Sie die Fläche unter der in (a) bestimmten Kurve für das einmalige Abrollen des Rades.

Lösung: Mit Radius $r = 1$:

(a) Mittelpunkt des Rades ist bei $M = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$. Punkt des Rades ist bei $\underline{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$.

(b) Mit $\underline{\gamma}' = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ folgt

$$L = \int_\gamma \|\underline{\gamma}'\| \,\mathrm{d}\, t = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(t)} \,\mathrm{d}\, t = 2 \int_0^{2\pi} \sin(\frac{t}{2}) \,\mathrm{d}\, t = 8$$

(c) Um die Fläche in der richtigen Richtung zu umlaufen: 'Hinweg' von $(0, 0)$ nach $(2\pi, 0)$ mit $\underline{\gamma} \parallel \underline{\gamma}' \Rightarrow$ Integration über 0 und dann 'zurück' $t = 2\pi \ldots 0$:

$$A = \frac{1}{2} \oint_\gamma \det(\underline{\gamma}, \underline{\gamma}') \,\mathrm{d}\, \varphi = \frac{1}{2} \int_{2\pi}^{0} 2\cos(t) - 2 + t\sin(t) \,\mathrm{d}\, t = 3\pi$$

A5 Aufgabe 1.9 aus der LV Theoretische Elektrotechnik 1

Gegeben ist das Vektorfeld

$$\underline{F} = x^2 \underline{e}_x + y^2 \underline{e}_y + z^2 \underline{e}_z\,.$$

Berechnen Sie durch Anwendung eines Integralsatzes das Integral des Vektorfeldes $\underline{F}(\underline{r})$ über die Oberfläche des durch $\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$ aufgespannten Einheitswürfels(Kantenlänge: 1), dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt.

Lösung: 'Netto-Fluss'= 0.

Wiederholung Volumenintegral

A6 Aufgabe 2.4 aus der LV Theoretische Elektrotechnik 1
In einem Volumen der Gestalt einer Kugel mit dem Radius a gibt es eine Raumladungsdichte $\varrho_V = \varrho_0 \varrho^2$. Berechnen Sie die gesamte Ladung.
Hinweis: Hier wird anstelle der Kugelkoordinate r, s. Ma-VL, die Variable ϱ verwendet (während ϱ_V und $\varrho_0 \cdot \mathrm{cm}^2$ Raumladungsdichten bezeichnen).

Lösung: $Q = \frac{4}{5}\pi a^5 \varrho_0$.

Es greent so green ... :-)

A7 Zusatz: Green'sche Formel in der LV Theoretische Elektrotechnik 1
In TET 1, S. 84 finden Sie die Green'sche Formel aus Bem. 9.48 mit $u := g$ und $v := f$ wieder. Leiten Sie daraus die sogenannte 2. Green'sche Formel her:

Green2(f,g)=Green1(f,g)-Green1(g,f)=...

Lösung: :-)