Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

inkl. Lösung

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. einiger Lösungen)
8. Woche – Taylor, Jacobi-Matrix + Kettenregel, inplizite Funktion

A1 Taylor, Taylor, Taylor

(a) **eindimensional**

i. Geben Sie eine Funktion $f(x)$ an, deren Taylor-Entwicklung 2. Ordnung (um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$) $T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ ist.

ii. Geben Sie den 'Fehler' (Differenz zwischen Funktion und Taylornäherung) $R_2(x) = f(x) - T_2(x)$ sowie seine erste und zweite Ableitung an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ an ;-).

(b) **zweidimensional**

i. Geben Sie eine Funktion $f(\underline{x})$ an, deren Taylor-Entwicklung 2. Ordnung (um den Entwicklungspunkt $\underline{x}_0 = \underline{0}$) $T_2(\underline{x}) = 1 + x + y + \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2}$ ist.

ii. Geben Sie den 'Fehler' $R_2(\underline{x}) = f(\underline{x}) - T_2(\underline{x})$ sowie seinen Gradienten und seine Hesse-Matrix an der Entwicklungsstelle $\underline{x}_0 = 0$ an ;-).

Lösung:

(a) i. z.B. $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ oder $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + 7x^3$;-)

ii. $R_2(0) = (f - T_2)(0) = 0$ sowie $R_2'(0) = (f - T_2)'(0) = 0$ und $R_2''(0) = (f - T_2)''(0) = 0$, s. auch Ma1 Folien 4_4 ;-)

(b) i. z.B. $f(x) = 1 + x + y + \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2} + 7x^3 + x^2y^2 + 2y^5$;-)

ii. $R_2(\underline{0}) = (f - T_2)(\underline{0}) = 0$ sowie $\nabla R_2(\underline{0}) = \nabla(f - T_2)(\underline{0}) = \underline{0}$ und $H_{R_2}(0) = H_{f-T_2}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, s. auch Ma2 Folien 10_1 ;-)

Z A2 Who is who?

(a) Kettenregel: Geben Sie für das Beispiel 10.6 n, m und k entsprechend der Nomenklatur in Satz 10.5 an.

(b) Implizite Funktion: Geben Sie für das Beispiel 10.8 n und m entsprechend der Nomenklatur in Satz 10.11 an.

Lösung:

(a) $n = 2, m = 2, k = 1$

(b) $n = 2, m = 1$

Z A3 Kettenregel - Polarkoordinaten

Betrachtet wird die Funktion $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(r, \varphi)$, Funktion P in Bsp. 8.29, Polarkoordinaten sowie deren Umkehrfunktion $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = f^{-1}(x, y)$, s. Funktion g in Beispiel 10.6.
Verwenden Sie beide Funktionen in Satz 10.5, Kettenregel und ermitteln Sie das Produkt der beiden Jacobi-Matrizen (von f und f^{-1}). Das Ergebnis steht laut Kettenregel vorher fest (Welche Funktion h stellt die Verkettung von f und f^{-1} dar? ;-)) !

Lösung:

$$J_f = \frac{\partial f}{\partial(r, \varphi)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = f^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan y/x \end{pmatrix}, \quad J_{f^{-1}} = \frac{\partial(r,\varphi)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r} \end{pmatrix}, \text{ s. Beispiel 10.6}$$

$$J_f \cdot J_{f^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A4 Kartesische K. ↔ Kugelkoordinaten - eindeutig?

Überprüfen Sie, in welchen Fällen die Kugelkoordinaten eine (eindeutige) Funktion der kartesischen Koordinaten sind, indem Sie den Satz über implizite Funktionen Satz 10.11 anwenden!

Bringen Sie also die explizite Form $\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\underline{x}} = K(\underbrace{r, \varphi, \theta}_{\underline{y}})$ (Bsp. 8.29) in die implizite Form $\underline{x} - K(\underline{y}) = f(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{0}$. Überprüfen Sie nun die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen.

Lösung: Die Jacobi-Matrix $J_{f,\underline{y}} = \frac{\partial f}{\partial(r,\varphi,\theta)}$ ist gleich der Jacobi-Matrix der Kugelkoordinaten, s. Bsp. 8.28. Diese ist singulär, wenn die Funktionaldeterminante $\det(J_{f,\underline{y}}) = r^2 \cos\theta$ verschwindet, also für $r = 0$ oder $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ ('Nord- und Süd-pol'). In allen anderen Fällen sind die Kugelkoordinaten eine eindeutige Funktion der kartesischen.

Z A5 $f(x, y) = x - y^3 = 0$ **- eindeutig nach y auflösbar?**

(a) Wenden Sie den Satz über implizite Funktionen Satz 10.11 an, um zu entscheiden, ob die Funktion $f(x, y) = x - y^3 = 0$ in der Umgebung des Punktes $(0, 0)$ eindeutig nach y auflösbar ist.

(b) Zeichnen Sie die Funktion $y = x^3$ und deren Umkehrfunktion.

(c) Stellt (b) einen Widerspruch zu Ihrem Ergebnis von (a) dar, also ein 'Gegenbeispiel' zum Satz über implizite Funktionen? ;-)

Lösung:

(a) $(0, 0)$ ist ein gültiger Punkt, da $f(0, 0) = 0$. $J_{f,y} = f_y = -3y^2$ somit $f_y(0, 0) = 0, \Rightarrow$ Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen NICHT erfüllt.

(b) Die Umkehrfunktion existiert: $y = x^{\frac{1}{3}}$ (auch um den Punkt $(0, 0)$).

(c) Natürlich nicht! Das ist eben ein 'Wenn-Dann'-Satz. Er liefert nur hinreichende Bedingungen (im Gegensatz zu 'Genau-Dann-Wenn'-Sätzen, mit Bedingungen, die hinreichend UND notwendig sind).

A6 Zusatz: Anwendung Taylor(implizite Funktion)

Aus der email eines Doktoranden der Fak. ET (vom 21.3.24):

Ich bin tatsächlich auch schon über eine Frage gestolpert. Was kann ich denn machen, wenn ich eine Funktion Taylor-Approximieren will, wie z.B. die hier.

$$i(u) = i_0 \left(\mathrm{e}^{\alpha_A \cdot f \cdot u} - \mathrm{e}^{\alpha_C \cdot f \cdot u} \right)$$

aber mich eigentlich der Zusammenhang u(i) interessiert und nicht i(u), aber ich nicht die Umkehrfunktion von i(u) analytisch bestimmen kann?

(a) Formen Sie die obige Gleichung $i = \ldots$ in die '=0'-Form um und überzeugen Sie sich, dass diese implizite Gleichung von $(i, u) = (i_0, 0)$ erfüllt wird.

(b) Geben Sie die lineare Appoximation der vom Doktoranden gewünschten Funktion $u(i)$ um $u_0 = 0$ an.

Lösung:

(a) $F(i, u) := i - \ldots = 0$:-), $i(0) = i_0$ ✓

(b)

$$T_1(i) = 0 + u'|_{i=i_0} \cdot (i - i_0) = -\frac{F_i}{F_u}\bigg|_{i_0,u_0} \cdot (i - i_0) = \frac{1}{i_0 f(\alpha_A \,\mathrm{e}^{\alpha_A f u} - \alpha_C \,\mathrm{e}^{\alpha_C f u})}\bigg|_{u_0=0} \cdot (i - i_0)$$

$$= \frac{1}{i_0 f(\alpha_A - \alpha_C)} \cdot (i - i_0)$$

Z A7 Zusatz: Tailor your ODE!

Sie wollen eine gewöhnliche Differentialgleichung (DGL) finden, deren Lösungen auf von Ihnen vorgegebenen Kurven verlaufen.

(a) Wählen Sie eine mit $\Phi(x, y) = C,\ C \in \mathbb{R}$ parametrisierte Kurvenschar (z.B. Schar der Kreis-Kurven: $x^2 + y^2 = C$).

(b) Geben Sie die DGL dieser Kurvenschar an.
Bemerkung: Das ist quasi das inverse Problem zur Lösung von DGLn (Gegeben und Gesucht vertauscht).

Lösung:

(a) Z.B. Schar der Höhenlinien eines Sattels (Hyperbeln) $z = x^2 - y^2 = \Phi(x, y) = C$.

(b) DGL (VL 9_6): $\Phi_x + \Phi_y y' = \underbrace{2x}_{p} + \underbrace{2y}_{q} y' = 0$.