Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291), A2: Simon Puteanus

inkl. Lösung

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2

10. Woche - Motivation: Optimierung mit Nebenbedingung

Z A1 Maximum, Minimum oder Sattel auf Kurve

Wenn die Nebenbedingung(en) eine Kurve als 'zulässige Punkte' beschreibt, können wir anhand der Funktionswerte der Zielfunktion f entscheiden, welche der 'kritischen Punkte' (das sind die Punkte, die die notwendige Bedingung erfüllen) Minima, Maxima oder Sattel sind, s. z.B. s. Bsp. 10.23 A.

Entscheiden Sie, welche der folgenden Reihenfolgen von Minima (m), Maxima (M) und Sattel (S) auf einer **geschlossenen** Kurve möglich sind:

(a) m M m M
(b) m M m M m
(c) M m m M m
(d) m S M m M
(e) m S M S M
(f) m S S M m M

Lösung: (b) und (c) sind nicht möglich, da zwei Minima nebeneinander wären.
(e) ist nicht möglich, da zwischen zwei Maxima ein Minimum sein muss.

A2 Anwendung Optimierung

In den ersten beiden Semester müssen fast alle Studierenden der Fakultät Elektrotechnik das Modul Informatik belegen. Dies besteht aus einer Prüfung im ersten Semester und einer Prüfung sowie Projektarbeit im 2. Semester. Es besteht die Möglichkeit, die Projektarbeit nicht zu schreiben, solange die Noten aus den Prüfungen gut genug sind.
Ist die Projektarbeit bestanden, ist die Note des Moduls das arithmetische Mittel aus den beiden Prüfungen, also:

$$N = \frac{P_1 + P_2}{2}$$

Ist die Projektarbeit nicht bestanden, ergibt sich die Note folgendermaßen:

$$N = 0,2 \cdot P_1 + 0,2 \cdot P_2 + 0,6 \cdot 5$$

Um die Projektarbeit zu bestehen sind 60 Stunden Arbeitszeit vornöten.
Die Note der Prüfung im ersten Semester lässt sich wie folgt aus dem Arbeitsaufwand fürs Selbststudium berechnen.

$$P_1 = 6 \cdot e^{-\frac{t_1}{50}}$$

Die Note der Prüfung im 2. Semester lässt folgendermaßen berechnen:
Projektarbeit bestanden:

$$P_2 = 6 \cdot e^{-\frac{t_2}{10}}$$

Projektarbeit nicht bestanden:

$$P_2 = 6 \cdot e^{-\frac{t_2}{50}}$$

Wobei die Variablen t_1 und t_2 in Stunden angegeben werden.

Aufgabe Du möchtest in dem Modul eine möglichst gute Note schreiben und hast über das Jahr 100 Arbeitsstunden Zeit, die du in das Modul stecken kannst. Wie teilst du diese Zeit optimal auf, um eine möglichst gute Gesamtnote zu kriegen.

Lösung: Es ist eine Fallunterscheidung (Projektarbeit bestanden / nicht bestanden) nötig: ...

Fazit Es lohnt sich die Projektarbeit zu schreiben.

A3 Zusatz: $T_1(\underline{x}) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow$ Iterationsvorschrift

Gegeben ist eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$.

(a) Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $(\underline{x_0}, F(\underline{x_0}))$ an: $F(\underline{x}) = \ldots$, vgl. VL 10.1.

(b) Bestimmen Sie die 'Nullstelle' dieser Tangentialebene, indem Sie $F(\underline{x}) \stackrel{!}{=} 0$ setzen und nach $\underline{x}$ umstellen (die Jacobimatrix sei in $\underline{x_0}$ invertierbar).

(c) Vergleichen Sie mit der Iterationsvorschrift in VL 10.26!

Lösung:

(a)

$$F(\underline{x}) = F(\underline{x}_0) + J_F(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0)$$

(b)

$$F(\underline{x}) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \underline{x} = \underline{x}_0 - J_F^{-1}(\underline{x}_0)F(\underline{x}_0)$$

(c) Auffallende Ähnlichkeit! Offenbar bestimmt die Iterationsvorschrift

$$\underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k - J_F^{-1}(\underline{x}^k)F(\underline{x}^k)$$

die Nullstelle der Tangentialebene der Funktion F am k-ten Iterationspunkt $\underline{x}^k$.

A4 Zusatz: Klausuraufgabe aus der LV Prozessidentifikation

Für das statische Modell

$$y = f(u) = a_1 + a_2 u^2$$

wurden folgende Messwerte erfasst:

u_i	-1	0	1	2
y_i	2	10	6	4

Bestimmen Sie die Parameter a_1 und a_2 mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate!

Geben Sie Ihren Rechenweg mit <u>Zwischenergebnissen</u> nachvollziehbar an!

Lösung:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad y = f(u) = 7 - u^2$$