Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. Lösungen)
11. Woche – DGL 1. Ordnung, eindeutige Lsg.

Z A1 $y'(x) = f(x)$ **vs.** $y'(x) = f\,(y(x))$
Sie haben in der VL 11.2 die allgemeine Form der DGL 1. Ordnung $y'(x) = f\,(x, y(x))$ kennen gelernt. Welchen der beiden Spezialfälle $y'(x) = f(x)$ oder $y'(x) = f\,(y(x))$ können Sie bereits lösen und wie?

Lösung: $y' = f(x)$ ist zu lösen mit

$$y(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}\,x + C \quad \text{bzw. } y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(x')\,\mathrm{d}\,x' + y(x_0) \quad \text{AWA.}$$

Integration quasi als 'Umkehroperation' zur Differentiation.

A2 Für Fortgeschrittene: **Existenz und Eindeutigkeit der Lösung**

(a) Welche Lösung hätte die Anfangswertaufgabe (AWA) 24.9 b mit der Anfangsbedingung $y(1) = -1$?
Erfüllt diese AWA die Bedingung für Eindeutigkeit der Lösung aus Satz 11.7?
Lösung: Sowohl die Lösung $y(x) = \frac{1}{4}(x+C)^2 - 1$, mit $C = -1$ (für $x \geq 1$, da $y \geq -1$!) als auch die Lösung $y \equiv -1$ erfüllen diese AWA. Die Lösung ist nicht eindeutig.
Die DGL erfüllt bei $y = -1$ **nicht** Bedingung im Satz 11.7 2: die Wurzelfunktion $\sqrt{y+1}$ hat dort keine beschränkte Ableitung (f hat keine beschränkte partielle Ableitung bzgl. y).

(b) Erfüllt die AWA 24.9 g die Bedingung aus Satz 11.7? Welchen Wert nimmt die Lösung für $x = 2$ an?
Lösung: Die AWA mit der Anfangsbedingung $x_0 = 0, y_0 = -1$ erfüllt die Bedingungen in Satz 11.7. Jedoch ist das durch den Satz garantierte Existenzintervall endlich: die Lösung dieser AWA $y(x) = -(1 - \dfrac{2}{3}x^3)^{-1/2}$ existiert nur für $-\sqrt[3]{3/2} < x < \sqrt[3]{3/2}$. Sie hat eine 'endliche Fluchtzeit', heißt geht bereits für $x = \sqrt[3]{3/2}$ gegen unendlich und existiert eben nicht mehr für $x = 2$.

Z (c) Bei Aufgabe 24.12 b) $xy' + (y+1)\ln x = 0, \quad y(1) = -1$ 'sieht' man sofort eine Lösung $y \equiv -1$ die auch noch die Anfangsbedingung erfüllt. Erfüllt die DGL in einem Intervall um $x = 1$ Bedingung im Satz 11.7 und ist damit die 'gesehene' Lösung sicher die Einzige?
Lösung: Die DGL $y' = -(y+1)\ln(x)/x$ erfüllt überall die Bedingungen im Satz 11.7 (nur in $x = 0$ nicht). Um den gegebenen Anfangswert $x = 1$ sind die Bedingungen erfüllt und damit ist die 'gesehene' Lösung (in einem Intervall um $x = 1$) sicher die Einzige.

Zusatz: Wiederholung Kurvenintegrale: Aufgabe 1.4 aus der LV Theoretische Elektrotechnik 1
Gegeben ist die Vektorfunktion $\underline{F}(\underline{r})$ sowie die orientierten Wege W_1 und W_2:

$$\begin{aligned}
&\underline{F}(\underline{r}) = y\underline{e}_x - x\underline{e}_y + (x+y+z)\underline{e}_z \\
&W_1 : \underline{r}(t) = \underline{e}_x + t\underline{e}_z && (0 \le t \le 1) \\
&W_2 : \underline{r}(t) = \cos(2\pi t)\underline{e}_x + \sin(2\pi t)\underline{e}_y + t\underline{e}_z && (0 \le t \le 1).
\end{aligned}$$

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$a) \int_{W1} \underline{F}(\underline{r}) \cdot \mathrm{d}\underline{r} \qquad b) \int_{W1} \underline{F}(\underline{r}) \times \mathrm{d}\underline{r} \qquad c) \int_{W2} \underline{F}(\underline{r}) \cdot \mathrm{d}\underline{r} \qquad d) \int_{W2} \underline{F}(\underline{r}) \times \mathrm{d}\underline{r}.$$

Lösung: a) $\frac{3}{2}$ b) $-\underline{e}_x$ c) $\frac{1}{2} - 2\pi$ d) $-\pi\underline{e}_x + (1-\pi)\underline{e}_y$