Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. einiger Lösungen)

12. Woche – DGL 1. Ordnung: separabel / linear / eindeutige Lsg.

A1 Was ist eigentlich die Relaxationszeit?

Gegeben ist die folgende DGL aus der LV Theoretische Elektrotechnik, Folie 159:

- Einerseits Maxwell: $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho_V}{\varepsilon_0} \to \operatorname{div}\vec{J} = \frac{\kappa \cdot \rho_V}{\varepsilon_0} \neq 0$
- Andererseits Stationarität: $\operatorname{div}\vec{J} = -\frac{\partial \rho_V}{\partial t} \overset{!}{=} 0$ (Widerspruch?)
- Differentialgleichung für die Volumenladungsdichte ρ_V

$$\dot{\rho_V} + \frac{\kappa}{\varepsilon_0} \cdot \rho_V = 0$$

(a) Geben Sie die Lösung der DGL für eine gegebene Anfangsvolumenladungsdichte $\varrho_V(0) = \varrho_{V0} \neq 0$ an und skizzieren Sie diese.

(b) Geben Sie $\lim_{t\to\infty} \varrho_V(t)$ an.

(c) Geben Sie die Zeit t an, für die gilt: $\varrho_V(t) = \varrho_{V0}\,\mathrm{e}^{-1}$ und markieren Sie diese in der Skizze aus (a). Hinweis: $\mathrm{e}^{-1} \approx 37\%$.

(d) In der LV EMF haben Sie am 28.5.24 (damals für Sie noch nicht verstehbar) erfahren, dass $\tau = \frac{\varepsilon}{\kappa}$ die sogenannte Relaxationszeit ist. Erklären Sie den Begriff jetzt unter Verwendung von (c).

Lösung:

(a)

- Lösung: $\rho_V(t) = \rho_{V0} \cdot \mathrm{e}^{-\kappa/\varepsilon_0 \cdot t}$
- Für Kupfer: $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{As/(Vm)}$ und $\kappa_{Cu} = 58 \times 10^6\,\mathrm{S\,m^{-1}} \to$ Zeitkonstante zur Erreichung des Gleichgewichtes:

$$\tau_{Cu} = \frac{\varepsilon_0}{\kappa_{Cu}} \cong 1.5 \times 10^{-19}\,\mathrm{s}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN
TET: Stationäres Elektrisches Strömungsfeld
Theoretische Elektrotechnik und EMV / H.G. Krauthäuser

Folie

(b) $\lim_{t\to\infty} \varrho_V(t) = 0\,.$

(c) $\varrho_V(t) = \varrho_{V0}\,\mathrm{e}^{-1}$ für $t = \frac{\varepsilon}{\kappa}\,.$

(d) Die Relaxationszeit ist die Zeitkonstante τ der Exponentialfunktion $\mathrm{e}^{-t/\tau}$ und gibt die Zeit an, bei der eine Größe (die obiger DGL gehorcht) auf ca. 37% des Startwertes abgeklungen ist.
Hinweis: Gebräuchlicher ist die Formulierung: die Zeit, bei der die Lösung der inhomogenen DGL $\tau\dot{\varrho} + \varrho = K$ (die sogenannte Sprungantwort) 63% des Endwertes erreicht hat (das ist die 63%-Regel zum Ablesen von Zeitkonstanten) ...

Z A2 Klassifikation DGL 1. Ordnung: separabel, linear
Klassifizieren Sie die Aufgaben U2/24.15 a-f,n:
Welche DGL sind separabel (Gruppe I) und welche sind linear (Gruppe II).
Fertigen Sie ein Venn-Diagramm an.

A3 Wahr oder falsch
Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an!

( ) Die DGL $y'(t) = f(x, y(t))$ ist linear, wenn f linear in x ist.

( ) Die DGL $y'(t) = f(x, y(t))$ ist linear, wenn f linear in $y(t)$ ist.

( ) Die DGL $y'(t) = f(x, y(t))$ ist linear, wenn $f = a(x)y(t) + g(x)$ ist.

Z A4 Fahrplan: Lösung inhomogener DGL 1. Ordnung (mit Anfangsbedingung)
Ordnen Sie die folgenden Arbeitsschritte in der richtigen Reihenfolge:

- (Anpassen des konstanten Faktors C der homogenen Lösung, so dass die Anfangsbedingung erfüllt ist),
- Überlagerung von homogener und partikulärer Lösung zur 'allgemeinen' Lösung
- Bestimmung der homogenen Lösung z.B. mit Trennung der Variablen (TdV)
- Bestimmung einer partikulären Lösung durch Variation der Konstanten (VdK).

Z A5 Allgemein statt Konkret: VdK
In der VL sieht man am konkreten Bsp. 11.20 wie sich die DGL zur Bestimmung der 'variierten' Konstanten durch Aufheben gewisser Terme ergibt. Schreiben Sie dies allgemein auf, in dem Sie

(a) Den Ansatz $y_p(x) = K(x) \cdot y_h(x)$ ableiten,

(b) in die lineare DGL $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$ einsetzen und

(c) berücksichtigen, dass $y_h(x)$ die homogene DGL $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$ erfüllt.

Lösung:

(a) $y_p(x) = K(x) \cdot y_h(x) \;\Rightarrow\; y_p'(x) = K'(x)y_h(x) + K(x)y_h'(x)$

(b) $a(x)\left[K'(x)y_h(x) + K(x)y_h'(x)\right] + b(x)K(x)y_h(x) = c(x)$

(c) $a(x)K'(x)y_h(x) + K(x)\underbrace{\left[a(x)y_h'(x) + b(x)y_h(x)\right]}_{=0\text{, da homogene Lsg.}} = c(x) \;\Rightarrow\; K'(x) = \frac{c(x)}{a(x)}\frac{1}{y_h(x)}$

Z A6 Zusatz: **Allgemein statt Konkret: Bernoulli-DGL**

In der VL sieht man am konkreten Bsp. 11.24 dass der Ansatz $u(t) = (y(t))^{1-\alpha}$ zu einer lineararen DGL führt. Schreiben Sie dies allgemein auf, in dem Sie

(a) Den Ansatz $u(t) = (y(t))^{1-\alpha}$ ableiten,

(b) darin $y'(t)$ mit der rechten Seite der Bernoulli-DGL der Form $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)\,(y(t))^{\alpha}$ ersetzen und

(c) die lineare DGL für $u(t)$ angeben.

Lösung:

(a) $u(t) = (y(t))^{1-\alpha} \;\Rightarrow\; u'(t) = (1-\alpha)\,(y(t))^{-\alpha}\,y'(t)$

(b) $u'(t) = (1-\alpha)\,(y(t))^{-\alpha}\,y'(t) = (1-\alpha)\,(y(t))^{-\alpha}\,[a(t)y(t) + b(t)\,(y(t))^{\alpha}]$

(c) $u'(t) = (1-\alpha)[a(t)\,\underbrace{(y(t))^{1-\alpha}}_{=u(t)} + b(t)] = (1-\alpha)\,[a(t)u(t) + b(t)]$

A7 Zusatz: **Tailor your ODE!**

Sie wollen eine DGL finden, deren Lösungen auf von Ihnen vorgegebenen Kurven verlaufen.

(a) Wählen Sie eine mit $\Phi(x, y) = C,\ C \in \mathbb{R}$ parametrisierte Kurvenschar (z.B. Schar der Kreis-Kurven: $x^2 + y^2 = C$).

(b) Geben Sie die (exakte) DGL dieser Kurvenschar an.

Bemerkung: Das ist quasi das inverse Problem zur Lösung exakter DGLs (Gegeben und Gesucht vertauscht).

Lösung:

(a) Z.B. Schar der Höhenlinien eines Sattels (Hyperbeln) $z = x^2 - y^2 = \Phi(x, y) = C$.

(b) (exakte) DGL: $\Phi_x + \Phi_y y' = \underbrace{2x}_{p}\,\underbrace{-2y}_{q}\,y' = 0$.

Z A8 Zusatz: **Potentialfunktion, implizite Funktion, exakte DGL**

Wir haben im Laufe des Semesters quasi drei mal Ähnliches gemacht: bei Kurvenintegralen 2. Art spielt eine Potentialfunktion $\Phi \overset{z.B.}{=} \Phi(x, y)$ eine Rolle, s. Satz 9.29; bei impliziten Funktion geht es um ein $f = 0$ (wir wollen hier mal $\Phi(x, y) = 0$ verwenden), s. Satz 10.11; und bei exakten DGL geht es um $\Phi(x, y) = c$, s. VL 11.4.

Erstellen Sie sich eine Übersicht zu diesen drei Anwendungen quasi ein und derselben Sache.

Lösung:

Thema	Gegeben	Fragestellung	Gesucht	Zusammenhang
Kurvenintegral	$\underline{F}$	$\int_{\underline{a}}^{\underline{b}} \underline{F}\,\mathrm{d}\,\underline{s} \overset{?}{=} \Phi(\underline{b}) - \Phi(\underline{a})$	Φ	$\underline{F} = \operatorname{grad}\Phi$ wenn $\operatorname{rot}\underline{F} = \underline{0}$
Implizite Funktion	$\Phi(x, y) = 0$	$y \overset{?}{=} y(x)$	ja/nein bzw. $y'(x)$	$y'(x) = -\frac{\Phi_x}{\Phi_y}$ wenn $\Phi_y \neq 0$
Exakte DGL	$p + qy'(x) = 0$	Existiert implizite Lsg.?	$\Phi(x, y) = c$	$p = \Phi_x, q = \Phi_y$ wenn $p_y = q_x$

Oder kompakter

Kurvenintegral:	$\operatorname{grad}\Phi$	$\Rightarrow \Phi$
Implizite Funktion:	$\Phi = 0$	$\Rightarrow$ DGL $\Rightarrow y'$
Exakte DGL:	DGL	$\Rightarrow \Phi = c$