Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

inkl. Lösung

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2

13. Woche – homogen/inhomogen, Bernoulli, d'Alembert, Wronski

A1 Die DGL $\frac{y''}{y} = k^2$ [1] führt zur homogenen DGL $y'' - k^2 y = 0$ deren Lösung in zwei verschiedenen Formen angegeben werden kann (Bsp. 11.38):

$$i)\ y(x) = c_1\,\mathrm{e}^{kx} + c_2\,\mathrm{e}^{-kx} \quad \text{oder} \qquad ii)\ y(x) = C_1 \sinh(kx) + C_2 \cosh(-kx)$$

Die Konstanten der homogenen Lösung c_1, c_2 bzw. werden C_1, C_2 werden durch Anfangs- bzw. Randbedingungen festgelegt.
Welche der beiden Varianten i) oder ii) würden Sie wählen, wenn

(a) eine Anfangsbedingung lautet: $y(0) = 0$,

(b) eine Anfangsbedingung lautet: $y(\infty) = 0$?

Hinweis: Mit der günstigen Wahl steht eine der Konstanten sofort fest (ohne die zweite Anfangs- oder Rand-Bedingung zu betrachten).

Lösung:

(a) ii): $y(0) = C_1 \sinh(k0) + C_2 \cosh(-k0) \stackrel{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; C_2 = 0$,

(b) i): $y(\infty) = c_1\,\mathrm{e}^{k\infty} + c_2\,\mathrm{e}^{-k\infty} \stackrel{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; c_1 = 0$.

Z A2 Bestimmen Sie die partikuläre Lösung zu Bsp. 11.20 (harmonisch angeregtes RC-Glied)

$$RC \cdot u'(t) + u(t) = \cos(\omega t + \phi_q), \quad u_h(t) = D\,\mathrm{e}^{-t/(RC)}$$

mit Hilfe das Ansatzes nach Art der rechten Seite (also **nicht** so :-)).

Lösung: Rechte Seite ist Winkelfunktion, $\lambda = \omega\mathrm{i} \neq \lambda_1 = -\frac{1}{RC}$, also $s = 0$. Ansatz lautet

$$u_p(t) = a\cos(\omega t + \phi_q) + b\sin(\omega t + \phi_q),\ u_p'(t) = -a\omega\sin(\omega t + \phi_q) + b\omega\cos(\omega t + \phi_q)$$

und ergibt

$$\cos(\omega t + \phi_q)\,(RCb\omega + a) + \sin(\omega t + \phi_q)\,(-RCa\omega + b) \stackrel{!}{=} \cos(\omega t + \phi_q)$$
$$\Rightarrow b = RC\omega a, \quad a = \frac{1}{1 + (RC\omega)^2} \Rightarrow b = \frac{RC\omega}{1 + (RC\omega)^2}$$

Damit folgt

$$u(t) = D\,\mathrm{e}^{-t/(RC)} + \frac{1}{1 + (RC\omega)^2}\left(\cos(\omega t + \phi_q) + RC\omega\sin(\omega t + \phi_q)\right).$$

[1] Diese DGL taucht in Ma4 und in der Theoretischen Elektrotechnik bei der Lösung partieller DGL wieder auf.

Z A3 **Wenn Resonanz nicht beachtet wird**

Beobachten Sie, was passiert, wenn man bei einer DGL höherer Ordnung im Ansatz für die partikuläre Lösung Resonanz nicht beachtet und z.B. für Aufgabe 25.7 b $y''' - y' = -2x$ nur ansetzt $y_p = ax + b$.

Lösung: Ansatz: $y_p = ax + b, \Rightarrow y_p' = a, y_p'' = y_p''' = 0$

In DGL Einsetzen: $y''' - y' = 0 - a \overset{!}{=} -2x$ Widerspruch!

Merke: Ohne Berücksichtigung der Resonanz (partikuläres Lambda = homogenes Lambda: $\lambda_{krit} = 0 = \lambda_1$) kann der partikuläre Ansatz nicht die inhomogene DGL erfüllen.

Z A4 **Wenn bei Resonanz 'zu viel' angesetzt wird**

Der richtige Ansatz für Aufgabe 25.7 b $y''' - y' = -2x$ ist $y_p = (ax + b)x$. Beobachten Sie den Effekt, wenn quasi 'zu viel' angesetzt wird: $y_p = ax^2 + bx + c$

Lösung: Ansatz: $y_p = ax^2 + bx + c, \Rightarrow y_p' = 2ax + b, y_p'' = 2a, y_p''' = 0$

In DGL Einsetzen: $y''' - y' = 0 - 2ax - b \overset{!}{=} -2x$ liefert $a = 1, b = 0, c \in \mathbb{R}$ beliebig, folglich $y_p = x^2 + c$.

Merke: Mit einem 'Zu viel'-Ansatz erhält man auch eine richtige partikuläre Lösung, die jedoch nicht eindeutig ist ($c \in \mathbb{R}$ beliebig), da sie ein beliebiges Vielfaches der homogenen Lösung enthält.

Z A5 **Wronski-Determinante**

(a) Überprüfen Sie mit Hilfe der Wronski-Determinante, ob die Lösungen der homogenen DGL tatsächlich linear unabhängig sind für Aufgabe 2/25.5 i).

(b) Sind die Funktionen $\cos(x), \sin(x)$ linear abhängig?

(c) Sind die Funktionen $\cos(x), \sin(x), \cos(x + \varphi)$ linear abhängig?

(d) Wählen Sie 3 Funktionen, die Sie für linear abhängig halten und betrachten deren Wronski-Determinante.

Lösung:

(a)

$$W(x) = \det(e^x \cdot \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x+1 & x^2 + 2\,x \\ 1 & x+2 & x^2 + 4\,x + 2 \end{pmatrix}) = 2e^{3x} \neq 0$$

A6 Theoretische Elektrotechnik: Lösung der Radialgleichung

Gegeben ist die (für kugelsymmetrische Probleme der Elektrostatik) genutzte Differentialgleichung, s. Radialgleichung, für die Funktion $R(r)$:

$$r^2R'' + 2rR' = l(l+1)R(*)$$

(a) Klassifizieren Sie die DGL (Ordnung, linear/nichtlinear, konstante Koeffizienten oder nicht).

(b) Überprüfen Sie (durch einsetzten), ob

$$R_1(r) = r^l \quad \text{und} \quad R_2(r) = r^{-(l+1)}$$

die DGL (*) lösen.

(c) Kann es weitere (von den Lösungen in (b)) linear unabhängige Lösungen der DGL (*) geben? (Begründung!).

Lösung:

(a) DGL 2. Ordnung, linear, nicht-konstante Koeffizienten.

(b) R, R', R'' einsetzen $\rightarrow \checkmark$.
Alternativ: Ansatz $R = r^\lambda$ für Eulersche-DGL einsetzen,
$\rightarrow$ Lösungen der charakteristischen Gleichung: $\lambda_1 = l, \lambda_2 = -(l+1)$.

(c) Nein, da lineare DGL 2. Ordnung genau 2 linear unabhängige Lösungen hat, s. Satz 11.33 (VL 11_5).

A7 Zusatz: Bestimmen Sie die Lösungen λ der Gleichung

$$\lambda^2 = \mathrm{i}\omega\mu\kappa \qquad \text{mit } \omega, \mu, \kappa \in \mathbb{R}_+$$

und geben Sie unter Verwendung dieser $\mathrm{e}^{\lambda x}$ an.

Lösung: S. Theoretische Elektrotechnik: Lösung der Diffusionsgleichung.