Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2

14. Woche – falscher Ansatz nach Art der rechten Seite, DGL-System

Z A1 DGL n-ter Ordnung ⇒ DGL-System

(a) Überführen Sie die DGL aus Aufgabe 2/25.5 b) in ein DGL-System, entsprechend Bem 11.42.
Bemerkung: Dieses Verfahren wird u.a. in der Regelungstechnik genutzt, um DGLn (höherer Ordnung) in ein System von DGLn 1. Ordnung zu überführen. Die dabei entstehende Systemmatrix A mit der speziellen Form (Einsen in der Nebendiagonale) wird auch in der sogenannten Regelungsnormalform verwendet.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte der Systemmatrix A und vergleichen Sie diese mit den Nullstellen des Charakteristischen Polynoms der DGL 2. Ordnung (2/25.5 b).

Lösung:

(a) $\underline{u}' = A \cdot \underline{u}$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Die Eigenwerte von A sind $\lambda = 0, -1, 2$ und stimmen mit den Nullstellen des charakteristischen Polynoms der DGL 3. Ordnung überein.

Z A2 Romeo & Juliet

Die Beziehung von Romeo & Juliet hängt entscheidend von den Eigenwerten der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ab, s. Bsp. 11.41.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix für alle 6 Fälle und vergleichen Sie diese mit den zugehörigen Phasenporträts in Folie 11_7_3

(b) Ermitteln Sie in den ersten beiden Fällen auch die Eigenvektoren und zeichnen Sie in die Phasenporträts Pfeile (der Bewegungsrichtung) an die Linien.

(c) Warum ist die Zukunft eines Paares 'sicherer Liebhaber' ($a, d < 0$ und $b, c > 0$) für $ad - bc > 0$ langweilig?

Lösung:

(b) Für $ad - bc > 0$ liegen alle Eigenwerte in der linken Halbebene. Folglich gehen alle Lösungen gegen 0: Null Liebe/Hass ;-)

A3 Wenn naiver Ansatz anstatt Putzer

Beobachten Sie, was passiert, wenn man bei einem DGL-System mit mehrfachen Eigenwerten anstelle des Putzer-Algorithmus einen naiven Ansatz (fälschlig analog DGL höherer Ordnung $y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + c_3 x e^{\lambda_2 x}$) verwendet, also in Aufgabe 26.1 c den falschen Ansatz:

$$\underline{y}_h = c_1 \underline{v}_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 \underline{v}_2 e^{\lambda_2 x} + c_3 \underline{v}_2 x e^{\lambda_2 x}$$

Dabei sind $\lambda_i, \underline{v}_i$ Eigenwert-Eigenvektor-Paare und λ_2 ist doppelter Eigenwert. Setzen Sie den dritten Teil in das DGL-System ein. Löst er tatsächlich das homogene DGL-System?

Lösung:

Dritter Teil im Ansatz: $\underline{y}_{h3} = \underline{v}_2 x e^{2x}, \Rightarrow \underline{y}'_{h3} = \underline{v}_2 (2x+1) e^{2x}$

In DGL $\underline{y}' = A\underline{y}$ einsetzen:

$$\begin{aligned} E\underline{v}_2(2x+1)\cancel{e^{2x}} &= A\underline{v}_2 x \cancel{e^{2x}} && | - A\underline{v}_2 x \\ \underbrace{(2E-A)\underline{v}_2}_{=0,\text{Def. EW/EV}}\, x + \underline{v}_2 &= \underline{0} \\ \underline{v}_2 &= \underline{0} && \lightning\,\text{Widerspruch!} \end{aligned}$$

Der dritte Teil des naiven Ansatzes löst die homogene DGL **nicht**.

A4 Zusatz: Wiederholung DGL 1. Ordnung: **Homogen - inhomogen**

Nur bei **linearen** DGL hat es Sinn, von homogen und inhomogen zu sprechen.
Ordnen Sie 'homogen' und 'inhomogen' zu und geben je ein Beispiel an!

$y'(t) = a(x)y(t) + g(x)$: ...

$y'(t) = a(x)y(t)$: ...

A5 Zusatz: Wiederholung lineare DGL: **Wahr oder falsch**

Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an!

( ) Die homogene Lösung löst die homogene und die inhomogene DGL.

( ) Die homogene Lösung löst die homogene DGL.

( ) Die partikuläre Lösung löst die homogene und die inhomogene DGL.

( ) Die partikuläre Lösung löst die inhomogene DGL.

( ) Mit jeder homogenen Lösung $y_H(t)$ ist auch $C \cdot y_H(t)$ homogene Lösung.

( ) Mit jeder partikulären Lösung $y_P(t)$ ist auch $C \cdot y_P(t)$ partikuläre Lösung.

( ) Mit jeder partikulären Lösung $y_P(t)$ ist auch $y_P(t) + C \cdot y_H(t)$ partikuläre Lösung.

Lösung: ...

A6 Zusatz: Wiederholung **Oberflächenintegral**

Vollziehen Sie die folgende Rechnung aus der LV Theoretische Elektrotechnik 2, Folie 76, mit $\underline{k} = k\underline{e}_z$ nach:

– Weiterhin rechnet man leicht aus ($\mathrm{K_R}$: Kugel mit Radius R):

$$\frac{\sin \mathrm{kR}}{\mathrm{kR}} = \frac{1}{4\pi \mathrm{R}^2} \oiint\limits_{\mathrm{O(K_R)}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\vec{\mathrm{k}}\cdot\vec{\mathrm{r}}'} \mathrm{d}^2\mathrm{r}' = \frac{1}{4\pi \mathrm{R}^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\vec{\mathrm{k}}\cdot\vec{\mathrm{r}}'} \mathrm{R}^2 \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

TET: Elektromagnetische Wellen VIi - Allgemeine Lösung
Theoretische Elektrotechnik und EMV / H.G. Krauthäuser

Folie 8 von 10

Lösung:

Offenbar Kugelkoordinaten mit ϑ : Polabstand: $\rightsquigarrow \underline{k} \cdot \underline{r}' = kR\cos\vartheta$

Substitution: $z = kR\cos\vartheta$, $\rightsquigarrow \mathrm{d}\,z = -kR\sin\vartheta\,\mathrm{d}\,\vartheta$

und $\frac{1}{\mathrm{j}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}kR} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}\right) = \sin(kR)$