Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1 (inkl. Kurzlösung)

3. Woche – Projektion auf orthogonale Basis, Bedeutung c_0, keine punktweise Konvergenz

A1 Projektion auf orthogonale Basis

In Ma1, Bsp. 6.28 haben Sie die Darstellung eines Vektors als Linearkombination von Vektoren einer Basis

$$\underline{v} = \lambda_1 \underline{b}^1 + \lambda_2 \underline{b}^2 + \dots$$

kennen gelernt und erfahren, dass die Faktoren λ_i im Falle einer orthogonalen Basis durch Projektion des Vektors $\underline{v}$ auf die Basisvektoren mit Hilfe von Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ und Vektornorm $\|.\|$ bestimmt werden:

$$\lambda_i = \frac{\langle \underline{v}, \underline{b}^i \rangle}{\|\underline{b}^i\|^2} \tag{0.1}$$

(a) Wiederholen Sie die Begriffe Vektorraum, orthogonale Basis, Skalarprodukt und Vektornorm.

(b) Woran erkennen Sie, dass zwei (Basis-)Vektoren im (Vektorraum) $\mathbb{R}^2$ zueinander orthogonal sind?

(c) Woran erkennen Sie, dass drei Vektoren im (Vektorraum) $\mathbb{R}^3$ eine **orthogonale** Basis bilden?

(d) Woran erkennen Sie, dass drei Vektoren im (Vektorraum) $\mathbb{R}^3$ eine **orthonormale** Basis bilden?

(e) In $C[-\pi, \pi]$ ist der Raum der auf $[-\pi, \pi]$ stetigen Funktionen.

  i. Woran erkennen Sie, ob die beiden Elemente dieses Vektorraums $\underline{b}^1 = \cos(x)$ und $\underline{b}^2 = \sin(x)$ zueinander orthogonal sind?

  ii. Welchen Unterraum des $C[-\pi, \pi]$ spannen diese beiden Vektoren auf, d.h. welche Funktionen lassen sich als Linearkombination dieser beiden Basisvektoren darstellen.

  iii. Wie bestimmen Sie für eine Funktion $f(x)$ aus dem Unterraum, s. (ii), die Koeffizienten λ_1, λ_2 bzgl. dieser Basis:

$$f(x) = \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x)?$$

Kurzlösung:

(a) ...

(b) $\langle \underline{b}^1, \underline{b}^2 \rangle = 0$.

(c) $\langle \underline{b}^i, \underline{b}^j \rangle = 0$ für $i \neq j$.

(d) $\langle \underline{b}^i, \underline{b}^j \rangle = \delta_{i,j}$ (Kronecker-Delta).

(e) i. $\langle \cos(x), \sin(x) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) \sin(x) \,\mathrm{d}\, x = 0$.

  ii. $\lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) = A \cos(x + \varphi), \quad A, \varphi \in \mathbb{R}$.

  iii. analog **??**.

$$\lambda_1 = \frac{\langle f(x), \cos(x) \rangle}{\langle \cos(x), \cos(x) \rangle}, \quad \lambda_1 = \frac{\langle f(x), \sin(x) \rangle}{\langle \sin(x), \sin(x) \rangle}$$

A2 [**Zusatz**] für Studiengang ET: **Legendre-Polynome**

Im Fach Theoretische Elektrotechnik werden Sie eine weitere Menge von (unendlich vielen) Funktionen verwenden (um diese zu überlagern), die sogenannten Legendre-Polynome. Diese sind auf dem Intervall $[-1, 1]$ zu einander orthogonal und wie folgt definiert:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\, x^n} \left((x^2 - 1)^n \right) \text{ mit } n = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) Geben Sie $P_0(x), P_1(x)$ und $P_2(x)$ an.

(b) Skizzieren Sie $P_0(x), P_1(x)$ und $P_2(x)$ im Intervall $[-1, 1]$.

(c) **Sehen** Sie in (b), dass $P_0(x), P_1(x)$ und $P_2(x)$ jeweils paarweise zueinander orthogonal sind? (Funktionen 'grafisch multiplizieren und integrieren' = Skalarprodukt)

Bemerkung: anstelle obiger Ableitungsdefinition ergeben sich die Legendre-Polynome auch aus folgendem rekursiven Zusammenhang:

$$(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \text{ mit } P_0(x) = 1, P_1(x) = x, n = 1, 2, \ldots$$

Kurzlösung:

(a) $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$

A3 **Optimal - in welchem Sinne?**

Die Fourier-Polynome verwenden **optimale** Fourier-Koeffizienten c_k, s. Bsp. 12.11
In welchem Sinne sind die Fourier-Koeffizienten c_k optimal?

Kurzlösung: c_k so, dass Abstand (L^2-Norm) $f(x) - P_n(x)$ minimal.

A4 c_0 **'sehen'!**

Betrachtet wird das Rechtecksignal im Bsp. 12.14 Nr. 2 .

(a) Lesen Sie aus dem Graphen des Signals seinen (zeitlichen) Mittelwert ab.

(b) Vergleichen Sie $c_0 = a_0$ mit (a).

(c) Zeichnen Sie zu $f(x)$ den Graphen von $P_0(x)$ dazu.

(d) Reflektieren Sie den Zusammenhang zwischen $c_0 = a_0$ und in der ET gebräuchlichen Begriffen wie Gleichstromanteil, DC-component und Offset.

Kurzlösung:

(d) $c_0 = a_0 =$ zeitlicher Mittelwert $=$ Gleichstromanteil $= \dots$

A5 [Zusatz:] Konvergenz aber nicht an jedem Punkt

Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten :-) der 2π-periodischen Funktion, die im Intervall $[-\pi, \pi]$ wie folgt gegeben ist:

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } 2x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad !$$

Skizzieren Sie f! In welchen Punkten $x \in [-\pi, \pi]$ konvergiert die Fourier-Reihe gegen $f(x)$?

Kurzlösung:

Skizze: ein Kamm mit 'Zinken' bei $-3 : 0.5 : 3$
f ist nur an endlich vielen Punkten ungleich Null $\Rightarrow$ alle a_k, b_k sind gleich Null.
Die Fourierreihe konvergiert also wunderbar, allerdings nicht für alle x gegen f ...
Sie konvergiert folglich nicht punktweise gegen f sondern nur im ...

A6 Verstehen durch Sehen

Die 2π-periodische Dreiecksfunktion $f(x) = |x|$ für $|x| \leq \pi$ (periodisch fortsetzen!) wird durch folgende Funktionenreihe dargestellt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \dots\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k_0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2} \end{aligned}$$

(a) Ist das eine Fourier-Reihe?

(b) Zeichnen Sie die Funktion $f(x)$ im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.

(c) Zeichnen Sie die ersten 3 Summanden $\frac{\pi}{2}, -\frac{4}{\pi}\cos x, -\frac{4}{\pi}\frac{\cos 3x}{3^2}$ und deren Summe im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$ und vergleichen Sie mit (b).

Kurzlösung:

(a) Ja!

A7 Konvergenz oder nicht

Für die 2π-periodische Rechteckfunktion $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } 0 \le x < \pi \\ -1, & \text{für } -\pi \le x < 0 \end{cases}$

lautet die Fourier-Reihe:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots\right) \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\left((2k+1)x\right)}{2k+1} \qquad (*) \end{aligned}$$

(a) Zeichnen Sie die 2π-periodische Rechteck-Funktion. Ist diese Funktion stetig?

(b) Jede endliche Summe von stetigen Funktionen, z.B. Sinus- und Cosinus-Funktionen ist stetig. Gilt dies auch für eine unendliche Summe von stetigen Funktionen wie die Fourier-Reihe?

(c) Die Fourier-Reihe $F(x)$ (*) konvergiert im quadratischen Mittel gegen die Funktion $f(x)$. Geben Sie die Funktionswerte $F(0)$ und $f(0)$ an. Überlegen Sie, ob die Reihe (*) auch punktweise gegen die Funktion $f(x)$ konvergiert, s. Ma3, Def. 12.10 .

Kurzlösung:

(a) nicht stetig.

(b) offenbar nicht.

(c) Da $F(0) = 0 \neq 1 = f(0)$ konvergiert die Fourier-reihe $F(x)$ **nicht punktweise** gegen $f(x)$, sondern nur **im quadratischen Mittel**.