Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291) inkl. Kurzlösung

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1 (inkl. Kurzlösung)
3. Woche – Fourier-Reihen, Spektrum und Parseval

Fourier-Reihen Periode 2π

Als Faustregel gilt:

- ist f stetig (durch periodische Fortsetzung) auf $\mathbb{R}$, so ist $|c_k| \sim \frac{1}{k^2}$
- ist f n-mal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$, so ist $|c_k| \sim \frac{1}{k^{2+n}}$

A1 $c_k \sim \frac{1}{k^?}$

Sie kennen aus Übung2, A8 bereits die Fourier-Reihe der 2π-periodische Rechteckfunktion $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } 0 \le x < \pi \\ -1, & \text{für } -\pi \le x < 0 \end{cases}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots\right) \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2k+1)x\right)}{2k+1} \end{aligned}$$

und aus Übung2, A5 die Fourier-Reihe der 2π-periodische Dreiecksfunktion $f(x) = |x|$ für $|x| \le \pi$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \dots\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left((2k+1)x\right)}{(2k+1)^2} \end{aligned}$$

(a) Zeichnen Sie die 2π-periodische Dreiecks- und Rechteck-Funktion. Welche der beiden Funktionen ist stetig?

(b) Betrachten Sie die Proportionalität der Fourier-Koeffizienten beider Reihen bzgl. k und vergleichen Sie mit der obigen Faustregel.

Kurzlösung:

(a) Dreieck stetig, Rechteck nicht stetig.

(b) Rechteck-Reihe $c_k \sim \frac{1}{k}$ $\rightsquigarrow$ unstetig ; Dreieck-Reihe $c_k \sim \frac{1}{k^2}$ $\rightsquigarrow$ stetig. Faustregel bestätigt.

A2 a_k, b_k $\rightsquigarrow$ **stetig oder nicht**

Betrachtet wird die folgende Fourier-Reihe einer reellen Funktion $f(x)$

$$F(x) = \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\tfrac{4}{k^2}\cos(kx) - \tfrac{4\pi}{k}\sin(kx)\right).$$

(a) Machen Sie sich klar, dass die reellen Fourier-Koeffizient a_k bzw. b_k den geraden bzw. den ungeraden Anteil der rellen Funktion $f(x) = f_g(x) + f_u(x)$ widerspiegeln.
Hinweis: Nutzen Sie Bem. 12.13 . Welchen Wert nimmt ein Integral über eine ungerade Funktion über einen symmetrischen Integrationsbereich an?

(b) Identifizieren Sie in obiger Reihe die a_k bzw. b_k. Betrachten Sie deren Verhalten für $k \to \infty$ und machen Sie mit Hilfe obiger Faustregel eine Aussage darüber, ob der gerade oder ungerade Anteil eine stetige Funktion ist.

Kurzlösung:

(a)

$$F(x) = \underbrace{\frac{4}{3}\pi^2}_{a_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\underbrace{\tfrac{4}{k^2}}_{a_k} \cos(kx) \underbrace{-\tfrac{4\pi}{k}}_{b_k} \sin(kx) \Big).$$

(b) Wegen $a_k \sim \frac{1}{k^2}$ ist der gerade Anteil der Funktion stetig (ist bei periodischer Fortsetzung von auf $(-\pi, \pi]$-stetigen Funktionen immer so). Mit $\sum \frac{1}{k^2}$ existiert eine konvergierende Majorante, die gleichmäßige Konvergenz absichert und damit Unstetigkeit ausschließt.

A3 Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Geradheit/Ungeradheit

Betrachtet wird folgende Funktion: $f_{2\pi}(x) = x^2$ auf dem Intervall $(0, 2\pi]$.

(a) Setzen Sie die Funktion direkt zu einer 2π-periodischen Funktion $f(x)$ fort und skizzieren Sie die Funktionskurve von $f(x)$. Stellen Sie fest, welche der Eigenschaften Stetigkeit, Differenzierbarkeit (jeweils stückweise oder auf ganz $\mathbb{R}$) bzw. Geradheit/Ungeradheit die Funktion $f(x)$ besitzt.

(b) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten von $f(x)$ und stellen Sie die Fourierreihe auf.

Kurzlösung:

(a) $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $(0, 2\pi]$.

direkte period. Fortsetzung:

$$f(x) = f_{2\pi}(x - 2\pi n) = (x - 2\pi n)^2, 2n\pi < x < 2(n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}$$

Die Funktion $f(x)$ ist stückweise stetig und stückweise glatt, aber weder gerade noch ungerade.

Fourierkoeffizienten: Aus Periodizitätsgründen ($\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x+2\pi)}$) läßt sich das Integrationsintervall bei der Berechnung der Koeffizienten von $[-\pi, \pi]$ auf $[0, 2\pi]$ verschieben.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x^2\,dx = \frac{4}{3}\pi^2$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos(kx) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} x^2\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\tfrac{2x}{k^2}\cos(kx) + (\tfrac{x^2}{k} - \tfrac{2}{k^3})\sin(kx)\right]_0^{2\pi} = \frac{4}{k^2}.$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(kx) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} x^2\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\tfrac{2x}{k^2}\sin(kx) - (\tfrac{x^2}{k} - \tfrac{2}{k^3})\cos(kx)\right]_0^{2\pi} = -\frac{4\pi}{k}.$$

Folglich ist die Fourierreihe:

$$f(x) = \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\tfrac{4}{k^2}\cos(kx) - \tfrac{4\pi}{k}\sin(kx)\right).$$

Fourier-Reihen Periode T

A4 Gegeben: Signal, gesucht: Periodendauer bzw. Grundfrequenz

Bestimmen Sie die Periode T und die Fourierkoeffizienten a_k, b_k $k \in \mathbb{N}$ der Funktion

$$u(t) = u_a\cos(2\pi f_a t) + u_b\cos(2\pi f_b t)$$

für die Fälle

(a) $f_b = 2f_a$ (b) $f_b = \frac{3}{2}f_a$[1].

(Hinweis: Der Weg über die Berechnung der a_k, b_k mittels der Integralformel ist nicht der kürzeste. Die reelle Fourierreihe steht schon da!)

Kurzlösung:

Bestimmen eine Grundfrequenz f_0, von der die im Signal enthaltenen Frequenzen **ganze** Vielfache sind. (Die Periodendauer ist dann $T = \frac{1}{f_0}$.)
(a) $f_0 = f_a$ also $a_1 = u_a, a_2 = u_b, a_k = 0$ für $k \neq 1, 2$ und $b_k = 0$ für alle k.

A5 Zusammenhang a_k, b_k, c_k und 'komplexer Zeiger' und 'Phasor'

Geben Sie für das folgende Signal die Koeffizienten der reellen UND der komplexen Fourierreihe sowie den in der VL Dynamische Netzwerke genutzten 'komplexen (Effektivwert-) Zeiger' $\underline{U}$ an:

$$u(t) = \hat{U}\cos(2\pi f_0 t + \varphi) \text{ mit } f_0 = \frac{1}{T}$$

[1]Das Konzept des nicht klingenden aber gehörten Grundtons wird im Orgelbau verwendet, s. Residualton

Für Studiengang ET: Im Fach Theoretische Elektrotechnik werden Sie den 'Phasor' kennen lernen. Geben Sie den Phasor für obiges Signal als Funktion von c_1 an.

Kurzlösung:

Per Additionstheorem steht die reelle Fourier'reihe' praktisch da. Und die reellen Fourierkoeffizienten sind ablesbar. Koeffizienten nicht-vorhandener Summanden sind Null.

$$u(t) = \hat{U}\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \underbrace{\hat{U}\cos\varphi}_{a_1}\cos(2\pi f_0 t)\underbrace{-\hat{U}\sin\varphi}_{b_1}\sin(2\pi f_0 t)$$

Komplexe Fourier'reihe':

$$u(t) = \hat{U}\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = 2\,\mathrm{Re}\{\frac{\hat{U}}{2}e^{i(2\pi f_0 t+\varphi)}\} = 2\,\mathrm{Re}\{\underbrace{\frac{\hat{U}e^{i\varphi}}{2}}_{c_1}e^{i2\pi f_0 t}\}$$

Also ist

$$c_1 = \frac{\hat{U}e^{i\varphi}}{2} = \frac{\hat{U}(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{2} = \frac{a_1}{2} - i\frac{b_1}{2}$$

'komplexer (Effektivwert-)Zeiger':

$$u(t) = \hat{U}\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\{\underbrace{\frac{\hat{U}e^{i\varphi}}{\sqrt{2}}}_{\underline{U}}e^{i2\pi f_0 t}\}$$

also:

$$\underline{U} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}e^{i\varphi} = \sqrt{2}c_1 = \frac{a_1}{\sqrt{2}} - i\frac{b_1}{\sqrt{2}}$$

Merke: Bis auf verschiedene Faktoren entsprechen der 'komplexe (Effektivwert-)Zeiger)' und der 'Phasor' c_1: komplexer (Effektivwert-)Zeiger $\underline{U} = \sqrt{2}c_1$; Phasor $\underline{U} = 2c_1$.

A6 Brücke zur $j\omega-$Rechnung

Gegeben ist die Darstellung des **reellen** Signals

$$P_1(t) = \sum_{k=-1}^{1} c_k e^{\mathrm{i}k\omega t} \quad \text{mit } c_0 = 0 \text{ und } c_1 \in \mathbb{C}$$

Wenden Sie Satz 12.24 an zur Differentiation bzw. Integration dieses Signals an und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit ET3 Folien 1 - 10++.

Kurzlösung:

$$\frac{\mathrm{d}\,P_1(t)}{\mathrm{d}\,t} = \sum_{k=-1}^{1}\mathrm{i}k\omega c_k e^{\mathrm{i}k\omega t} = \mathrm{i}\omega c_1 e^{\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{i}\omega\overline{c_1}e^{-\mathrm{i}\omega t} \quad c_{-1} = \overline{c_1} \text{ da reelles Signal}$$

$$\int P_1(t)\,\mathrm{d}\,t = \sum_{\substack{k=-1\\k\neq 0}}^{1}\frac{1}{\mathrm{i}k\omega}c_k e^{\mathrm{i}k\omega t} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega}c_1 e^{\mathrm{i}\omega t} - \frac{1}{\mathrm{i}\omega}\overline{c_1}e^{-\mathrm{i}\omega t} = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\mathrm{i}\omega}c_1 e^{\mathrm{i}\omega t}\right)$$

Spektrum und Parseval

A7 Spektrum c_k: k-Achse = Frequenz-Achse

(a) Machen Sie sich klar, dass jeder Fourier-Koeffizient c_k bzw. X_k einer bestimmten Frequenz zugeordnet ist. $|c_k|$ bzw. $|X_k|$ entsprechen der (halben) Amplitude einer im Signal (als Summand) enthaltenen harmonischen Schwingung welcher Frequenz?

(b) Machen Sie sich klar, dass die 'k-Achse' des **Spektrums** ($|c_k|$ bzw.) $|X_k|$ eine Frequenz-Achse ist und markieren Sie k-Werte und Frequenzwerte an einem Zahlenstrahl (eine x-Achse mit zwei Beschriftungen).

Kurzlösung:

(a) c_k gehört zu $\cos(kx)$; X_k gehört $\cos(k\frac{2\pi}{T}x) = \cos(k\omega_0 x)$.

A8 [Zusatz:] Parseval'sche Formel und Effektivwert

Gegeben sind die reelle und die komplexe Fourierreihe eines Signals:

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) + b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x}$$

(a) Verwenden Sie beide Reihendarstellungen um das Quadrat des Effektivwerts (den sogenannten quadratischen Mittelwert), s. ET3 Folie 1 - 4 des Signals zu berechnen:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}\,t}$$
$$U^2 = \frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{T}\int_0^T \sum \ldots \cdot \sum \ldots \mathrm{d}\,t$$

Orthogonalität der Basisfunktionen nutzen!

(b) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Parsevalschen Formel (s. Systemtheorie 1) und der Parseval'schen Gleichung (Ma3, Satz 12.19) .

Kurzlösung:

(a) Rechnen mit reeller Fourierreihe:

$$
\begin{aligned}
U^2 &= \frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)\right] \cdot \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)\right] \mathrm{d}\,t \\
&= a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Merke:
Effektivwertquadrate der einzelnen Harmonischen addieren sich zum Effektivwertquadrat des Signals.
Rechnen mit komplexer Fourierreihe (da das Signal reell ist, gilt: $u(t) = u(t)^*$, $*$=konjugiert komplex):

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)^* \cdot u(t)\,\mathrm{d}\,t &= \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{-\infty}^{\infty} c_n^* e^{-in\omega_0 t} \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}\,\mathrm{d}\,t \\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \qquad (0.1)
\end{aligned}
$$

(b) Parseval besagt, dass man die 'Gesamt-Leistung' eines Signals $\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}\,t$ im Zeit- oder Frequenzbereich bestimmen kann. Das 'Spektrum' c_k verrät also, wie die Gesamtleistung auf die verschiedenen Frequenzen verteilt ist.