

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1 (inkl. Kurzlösung)

5. Woche – Fourier-Reihe, Fourier- und Laplace-Transformation

Fourier-Reihe

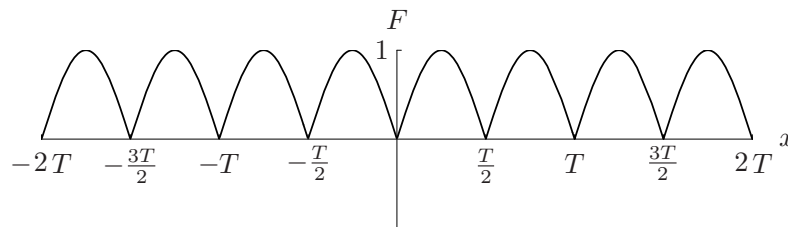
A1 Gerade/ungerade Fortsetzung

Bilden Sie für folgende Funktionen die angegebene periodische Fortsetzung, skizzieren Sie diese und geben Sie **nur den Ansatz** zur Berechnung der Koeffizienten deren Fourier-Reihe an.

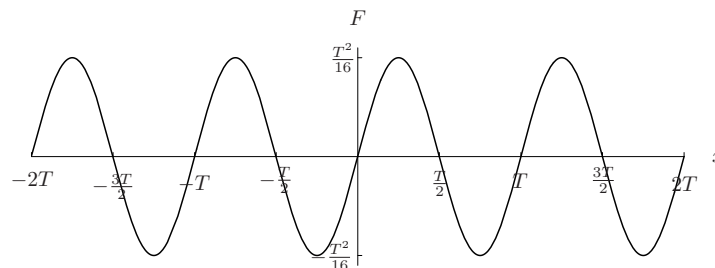
- (a) $f(x) = \sin(\frac{2\pi x}{T})$ für $0 < x < \frac{T}{2}$; gerade Fortsetzung zu T -periodischer Funktion,
 (b) $f(x) = x(\frac{T}{2} - x)$ für $0 < x < \frac{T}{2}$; ungerade Fortsetzung zu T -periodischer Funktion.

Kurzlösung:

(a) Skizze:



(b) Skizze:



Fourier-Transformation

A2 Hin- und Rück-Transformation für gerade Signale

Berechnen Sie mit Hilfe der Fourier-Transformation das Spektrum des Signals $f(t)$ und mit Hilfe der **inversen Fourier-Transformation** das zum Spektrum $G(\omega)$ gehörige Zeitsignal.

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad G(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Reflektieren Sie den Unterschied zwischen Hin- und Rück-Transformation für gerade Funktionen.

Kurzlösung:

$$F(\omega) = 2 \frac{\sin \omega}{\omega}, \quad g(t) = \frac{2}{2\pi} \frac{\sin t}{t}$$

A3 [Zusatz:] Differentiation im Frequenzbereich

Leiten Sie die Regel [Differentiation, Ma3, Bem. 13.7](#) der Fourier-Transformation für $n = 1$ her, in dem Sie von einem Signal und seiner Fourier-Transformierten $g(t) \circ \bullet G(\omega)$ ausgehen und die inverse Fourier-Transformation von $G'(\omega)$ durch partielle Integration ermitteln (analog der Herleitung der 1. Differentiationsregel in der VL).

Kurzlösung:

$$g(t) \circ \bullet G(\omega) \Leftrightarrow g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{inverse Fourier-Transformation})$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{G'(\omega)}_{u'} \underbrace{e^{i\omega t}}_v d\omega = \dots = \underset{(*)}{0} - itg(t) \quad \text{q.e.d.}$$

(*) Wegen Satz von Plancherel hat mit $g(t)$ auch $G(\omega)$ eine endliche L_2 -Norm, woraus folgt, dass $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} G(\omega) = 0$.

A4 [Zusatz:] Anwendung Verschiebungs- und Differentiations-Regel

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad h(t) = t \cdot g(t)$$

- (a) Nutzen Sie das Spektrum des Signals $f(t)$ aus Aufgabe **A2** und die [Verschiebungsregel, Ma3, Bem. 13.7](#), um die Fourier-Transformierte des Signals $g(t)$ zu ermitteln.
- (b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Differentiationsregel, s. **Zusatz1**, das Spektrum des Signals $h(t)$.

Hinweis: Für (b) ist es praktisch, $\frac{e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{-i\omega}$ anstatt $2 \frac{\sin \omega}{\omega}$ zu nutzen.

Kurzlösung:

- (a) $F(\omega) = 2 \frac{\sin \omega}{\omega}$, $g(t) = f(t - 1)$ Verschiebung um $t_0 = 1 \rightsquigarrow G(\omega) = F(\omega) e^{-i\omega}$
- (b)

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{-i} \frac{d}{d\omega} G(\omega) \\ &= -\frac{1}{\omega^2} + e^{-2i\omega} \left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{2i}{\omega} \right) \end{aligned}$$

Laplace-Transformation

A5 Konvergenzgebiet, Fourier-Laplace

- (a) Schraffieren Sie das Konvergenzgebiet der Laplace-Transformation der Funktionen in [Bsp. 13.10](#) in der komplexen s -Ebene.
- (b) Angenommen die Laplace-Transformierte eines Signals $f(t)$ existiert (konvergiert) auch für $\operatorname{Re}(s) = 0$ also für $s = i\omega$, was der Fourier-Transformierten des Signals entspricht. Kennzeichnen Sie in der komplexen s -Ebene die Kurve, auf der $\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{F}(f)(\omega)$.

Kurzlösung:

- (a) Immer eine 'rechte' Halbebene.
- (b) Die imaginäre Achse: die 'Frequenzachse' ist also bei der Laplace-Transformation senkrecht.

A6 Aufg. 3.4 aus dem Übungsheft Systemtheorie Die Laplace-Transformierte eines Signals $x(t)$ sei durch $X(s)$ gegeben. Man zeige die Gültigkeit folgender Regel der Laplace-Transformation:

- (a) $\mathcal{L}(x(at))(s) = \frac{1}{a} \mathcal{L}(x(t))\left(\frac{s}{a}\right)$
bzw. in Systemtheorie-Notation $x(at) \circ \bullet \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad (a > 0, \text{ Ähnlichkeitssatz}),$

Vergleichen Sie (a) mit der Skalierungseigenschaft der Fourier-Transformation, s. [Bem. 13.7](#).

Kurzlösung:

(a) $\mathcal{L}(x(at)) = \int_0^{\infty} x(at) e^{-st} dt \quad \text{Substitution } at = t', t = \frac{t'}{a}, dt = \frac{dt'}{a} \quad \dots$

A7 'Beidseitige' Laplace-Transformation

Angenommen, es gäbe ein Laplace-Transformation $\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{L}}$, die auch 'negative' Zeiten nutzt:

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{L}}(f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Geben Sie diese 'beidseitige' Laplace-Transformierte folgender Signale UND deren Konvergenzgebiet in der komplexen s -Ebene an:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{\alpha t}, & t \geq 0 \end{cases}, \quad g(t) = \begin{cases} -e^{\alpha t}, & t < 0 \\ 0, & t \geq 0 \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Reflektieren Sie die segensreiche Einschränkung auf 'positive' Zeiten in der Definition der Laplace-Transformation Ma3, Def. 13.7 in Bezug auf die eindeutige Umkehrbarkeit der Laplace-Transformation.

Kurzlösung:

$\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{L}}(f)(s) = \overset{\leftrightarrow}{\mathcal{L}}(g)(s) = \frac{1}{s-\alpha}$ aber einmal ist das Konvergenzgebiet $\operatorname{Re}(s) > \alpha$ und im zweiten Fall $\operatorname{Re}(s) < \alpha$.