

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1 (inkl. Kurzlösung) 5. Woche – Laplace-Transformation, Partialbruchzerlegung

Laplace-Transformation

A1 Ermitteln Sie die Lösung der folgenden DGL mit Hilfe der Laplace-Transformation

$$\dot{x}(t) + 5x(t) = \mathbf{1}(t) \quad \text{mit } x(0) = 0.$$

Gehen Sie dabei analog [Bsp. 13.14](#) vor:

- Geben Sie die Laplace-Transformierte der DGL an.
- Lösen Sie (a) nach $X(s)$ auf.
- Ermitteln Sie die Partialbruchzerlegung von (b) und
- Rücktransformieren Sie (c).

Kurzlösung:

- $sX(s) + 5X(s) = \frac{1}{s}$
- $X(t) = \frac{1}{5}(\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t)e^{-5t})$.

A2 Überprüfen Sie den **Faltungssatz** [Satz 13.15](#) für die in der Tabelle gegebenen Signale $f(t), g(t)$, indem Sie

- Faltung $(f * g)(t)$ berechnen,
- die Laplace-Transformierten der drei Signale $f(t), g(t)$ und $(f * g)(t)$ ermitteln (ggf. Tabellen nutzen) und
- überprüfen, ob das Produkt der ersten beiden Laplace-Transformierten $\mathcal{L}(f)(s) \cdot \mathcal{L}(g)(s)$ gleich der dritten $\mathcal{L}(f * g)(s)$ ist.

	$f(t)$	$g(t)$
(a)	$\mathbf{1}(t)$	$\mathbf{1}(t)$
(b)	$\mathbf{1}(t)$	$t \mathbf{1}(t)$
(c)	$\mathbf{1}(t)$	$g(t)$
(d)	$\delta(t)$	$g(t)$

Hinweise: Für (c,d) ist $g(t)$ ein beliebiges Signal mit $g(t) \circlearrowright G(s)$.
 $\delta(t)$ ist der [Dirac-Impuls](#).

Merke: Faltung im Zeitbereich \circlearrowright Produkt im Bildbereich.

Kurzlösung:

	$f(t)$	$g(t)$	$(f * g)(t)$	$\mathcal{L}(f)(s)$	$\mathcal{L}(g)(s)$	$\mathcal{L}(f * g)(s)$	$\mathcal{L}(f)(s) \cdot \mathcal{L}(g)(s) = \mathcal{L}(f * g)(s)$
(a)	$\mathbf{1}(t)$	$\mathbf{1}(t)$	$t \mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	✓
(b)	$\mathbf{1}(t)$	$t \mathbf{1}(t)$	\dots	\dots	\dots	\dots	✓
(c)	$\mathbf{1}(t)$	$g(t)$	$\int_0^t g(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s}$	$G(s)$	$\dots, (*)$	✓
(d)	$\delta(t)$	$g(t)$	$g(t)$	1	$G(s)$	$G(s)$	✓

(*) **Ableitungsregel** 'rückwärts' = Integrationsregel.

Partialbruchzerlegung (PBZ)

A3 PBZ für einfache Pole

Man zerlege $f(z)$ in Partialbrüche.

$$f(z) = \frac{(3-i)z - 5}{(z+i)(z-2)}$$

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Wert, den Sie erhalten, wenn Sie einen Pol von $f(z)$ streichen und in den 'Rest' die Polstelle einsetzen.

Kurzlösung:

$$f(z) = \frac{3}{z+i} - \frac{i}{z-2}.$$

Zusatz: A ist das später so gefragte **Residuum**

Die Funktion $f(z)$ soll in Partialbrüche zerlegt werden.

(a)

$$f(z) = \frac{\text{Zähler}}{(z - z_{\text{Pol}})(\text{Nenner-Rest})} = \frac{A}{(z - z_{\text{Pol}})} + \dots$$

(b)

$$f(z) = \frac{\text{Zähler}}{(z - z_{\text{Pol}})^2(\text{Nenner-Rest})} = \frac{A}{(z - z_{\text{Pol}})} + \frac{B}{(z - z_{\text{Pol}})^2} + \dots$$

Geben Sie für (a) und (b) ein Verfahren (eine allgemeine Formel) zur Berechnung von A an. Sie dürfen

- $f(z)$ mit geeigneten Termen multiplizieren,
- ggf. nach einer geeigneten Variablen ableiten und
- einen geeigneten Wert für z einsetzen.

Kurzlösung:

- (a) $A = f(z)(z - z_{\text{Pol}}) \Big|_{z=z_{\text{Pol}}}$,
- (b) $A = \frac{d}{dz} f(z)(z - z_{\text{Pol}})^2 \Big|_{z=z_{\text{Pol}}}$.

A ist das später so gefragte Residuum.

Kurven in der komplexen Ebene

A4 Ortskurven

In der VL Dynamische Netzwerke lernen Sie Ortskurven kennen - das sind Kurven, die Orte in der komplexen Ebene verbinden, die von einer reellen Variablen, z.B. von $t \in \mathbb{R}$ in der Geradengleichung $z = z_0 + tz_1$ abhängen.

- (a) Zeichnen Sie die Ortskurve von $z = z_0 + tz_1$ für zwei selbst gewählte komplexe Zahlen z_0, z_1 für $t \geq 0$.
- (b) Zeichnen Sie die Ortskurve von $z = R + i\omega L$ für (konstante) reelle $R, L > 0$ mit (variablem) $\omega \geq 0$.
- (c) Zeichnen Sie die Ortskurve von $z = R + i\omega L$ für (konstante) reelle $\omega, L > 0$ mit (variablem) $R \geq 0$.

Kurzlösung:

- (a) 'schräge' Halbgerade von z_0 in Richtung z_1 .
- (b) 'senkrechte' Halbgerade.
- (c) 'waagerechte' Halbgerade.