Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1 (inkl. Kurzlösung)
7. Woche – Gebiet in $\mathbb{C}$?, Anwendung Fourier-/Laplace-Transformation

A1 Gebiete in $\mathbb{C}$?

Bei welchen der folgenden Teilmengen der komplexen Ebene handelt es sich um ein **Gebiet**, s. Def. 13.18?

(a) Punkt $z = 0$,

(b) abgeschlossene Einheitskugel $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| \leq 1\}$,

(c) reelle Achse $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im}(z) = 0\}$,

(d) Vereinigung zweier 'Kugeln' $\{z \in \mathbb{C}\colon |z-1| < 1 \vee |z+1| < 1\}$.

Kurzlösung:

In keinem der Fälle (a)-(d) handelt es sich um ein Gebiet.

A2 [Zusatz:] Inversion kompl. Sinusfunktion

Vollziehen Sie die Umkehrfunktion des komplexen Sinus nach, s. VL nach 13.27.

Kurzlösung:

$$\begin{aligned} w = \sin(z) \Rightarrow \cos(z) &= \pm(1-w^2)^{\frac{1}{2}} && \text{wegen } \sin^2(z) + \cos^2(z) = 1 \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} &= \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z) = \dots && |\log(.) \\ \mathrm{i}z &= \dots \\ z &= \dots \end{aligned}$$

Wiederholung: Laplace/Fourier-Transformation von Strömen und Spannungen

A3 Gegeben sei das Spannungssignal an einem Kondensator $u(t)$ und somit dessen Fourier-Transformierte $U(\omega)$ mit $u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ U(\omega)$ bzw. dessen Laplace-Transformierte $U(s)$ mit $u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ U(s)$.

(a) Ermitteln Sie durch Anwendung der Differentiations-Regel der Fourier-Transformation Satz. 13.6 die Fourier-Transformierte des Kondensator-Stromes
$i(t) = C\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,t} \circ\!\!-\!\!\bullet$?
Geben Sie den Quotienten $\frac{U(\omega)}{I(\omega)}$ an und vergleichen Sie mit dem im Fach Dynamische Netzwerke genutzten komplexen Widerstand.

(b) Ermitteln Sie durch Anwendung der Differentiations-Regel der Laplace-Transformation Bsp. 13.12 bzw. Satz 13.13 die Laplace-Transformierte des Kondensator-Stromes
$i(t) = C\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,t} \circ\!\!-\!\!\bullet$?
Geben Sie unter der Annahme, dass $u(0) = 0$, den Quotienten $\frac{U(s)}{I(s)}$ an und vergleichen Sie mit dem im Fach Systemtheorie genutzten 'symbolischen Widerstand'.

Kurzlösung:

(a) $I(\omega) = Ci\omega\, U(\omega) \quad \Rightarrow \frac{U(\omega)}{I(\omega)} = \frac{1}{i\omega C}.$

(b) $I(s) = C\,(s\,U(s) - u(0)) \quad \overset{u(0)=0}{\Rightarrow} \frac{U(s)}{I(s)} = \frac{1}{sC}.$

Zusatz: Umform-Training

A4 Gegeben ist folgender Ausdruck einer komplexen Variablen s, dabei seien C_1, C_2, R_2, R_3 reelle Konstanten:

$$f(s) = \frac{\frac{1}{sC_2}}{R_3 + \frac{1}{sC_2}} \cdot \frac{R_2 \parallel \left(R_3 + \frac{1}{sC_2}\right)}{\frac{1}{sC_1} + \left[R_2 \parallel \left(R_3 + \frac{1}{sC_2}\right)\right]}$$

Dabei ist $a \parallel b$ eine Notation, die durch $\frac{ab}{a+b}$ aufgelöst wird bzw. durch $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

(a) Formen Sie den Ausdruck so um, dass Zähler und Nenner nur noch positive Potenzen von s enthalten (das ist für Systemtheorie und Regelungstechnik nützlich).

(b) Ersetzen Sie in (a) s durch $i\omega$ und geben für Zähler und Nenner Real- und Imaginärteil an $f(i\omega) = \frac{a+ib}{c+id}$.

(c) Wie würden Sie vorgehen, wenn Sie von (b) Betrag und Phase angeben sollen?

(d) Wie würden Sie vorgehen, wenn Sie von (b) Real- und Imaginär-Teil angeben sollen?

Zusatz: Geben Sie die elektrische Schaltung an, für die $f(s)$ der sogenannte 'doppelte Spannungsteiler' (eine Spannung wird zweimal geteilt) ist.

Kurzlösung:

(a)

$$f(s) = \frac{sC_1R_2}{s^2C_1R_2C_2R_3 + s(C_1R_2 + C_2(R_2+R_3)) + 1}$$

(b)

$$f(i\omega) = \frac{\overbrace{0}^{a} + i\,\overbrace{\omega C_1R_2}^{b}}{\underbrace{1-\omega^2C_1R_2C_2R_3}_{c} + i\,\underbrace{\omega(C_1R_2 + C_2(R_2+R_3))}_{d}}$$

(c) Z.B. Betrag und Phase von Zähler und Nenner ermitteln, dann ...

(d) Konjugiert komplex erweitern ...

Hinweis: Man beachte die unterschiedliche Notation Ma vs. ET3:
Ma: komplexe Zahl f, Betrag $|f|$, ET3: komplexe Zahl $\underline{f}$, Betrag f.

A5 Gegeben ist folgendes Gleichungssystem in den Unbekannten U_2 und U_3. Dabei sind U_1 und R, C (gegebene) Konstanten und s ist eine komplexe Variable:

$$sC(U_1 - U_2) + \frac{U_3 - U_2}{R} = 0 \qquad | \cdot R \tag{0.1}$$

$$\frac{U_1 - U_3}{R} + \frac{U_2 - U_3}{R} - sCU_3 = 0 \qquad | \cdot R \tag{0.2}$$

(a) Geben Sie das Gleichungssystem sowohl in der Form

$$\begin{aligned} \ldots \cdot U_2 + \ldots \cdot U_3 &= \ldots \\ \ldots \cdot U_2 + \ldots \cdot U_3 &= \ldots \end{aligned}$$

als auch in der Matrix-mal-Vektor-Form $\begin{pmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \end{pmatrix} \cdot U_1$ an.

(b) Lösen Sie das Gleichungssystem NUR FÜR U2 ggf. mit der Cramerschen Regel, s. Ma1 Ü15 A6.

(c) Geben Sie den Ausdruck $\frac{U_2}{U_1}$ so an, dass Zähler und Nenner nur positive Potenzen von s enthalten (das ist mitunter für das Fach Dynamische Netzwerke nützlich).

(d) Ersetzen Sie in (c) s durch $i\omega$ und geben Sie für Zähler und Nenner Real- und Imaginärteil an: $\frac{U_2}{U_1} = \frac{a + ib}{c + id}$

(e) In diesem Fall stimmen (zufällig) die Realteile von Zähler und Nenner überein. Geben Sie die Nullstelle(n) ω_0 des Realteils an. Begründen Sie, weshalb $\frac{U_2}{U_1}$ für $\omega = \omega_0$ reell ist.

Zusatz: Geben Sie die elektrische Schaltung (mit Eingangsspannung U_1 und Ausgangsspannung U_2) an, für die (**??**-**??**) das Gleichungssystem der **Knotenspannungsanalyse** darstellt.

Kurzlösung:

(a)

$$\begin{pmatrix} sCR + 1 & -1 \\ -1 & sCR + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sCR \\ 1 \end{pmatrix} \cdot U_1$$

(b)

$$U_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} sCR & -1 \\ 1 & sCR + 2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} sCR + 1 & -1 \\ -1 & sCR + 2 \end{pmatrix}} \cdot U_1$$

(c)

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{s^2(CR)^2 + 2sCR + 1}{s^2(CR)^2 + 3sCR + 1}$$

Hinweis: Man beachte die unterschiedliche Notation Ma vs. ET3:
Ma: komplexe Zahl U, Betrag $|U|$, ET3: komplexer Zeiger $\underline{U}$, Betrag U.

A6 Gegeben ist folgender Ausdruck einer komplexen Variablen s; dabei seien R, C (gegebene) Konstanten:

$$f(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} \cdot \frac{\frac{1}{sC} \parallel \left(R + \frac{1}{sC}\right)}{R + \left[\frac{1}{sC} \parallel \left(R + \frac{1}{sC}\right)\right]}$$

Dabei ist $a \parallel b$ eine Notation, die durch $\frac{ab}{a+b}$ aufgelöst wird bzw. durch $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

(a) Formen Sie den Ausdruck so um, dass Zähler und Nenner nur noch positive Potenzen von s enthalten.

(b) Ersetzen Sie in (a) s durch $i\omega$ und geben für Zähler und Nenner Real- und Imaginärteil an $f(i\omega) = \frac{a+ib}{c+id}$.

(c) Geben Sie (a) für $s = 0$ und $s \to \infty$ sowie (b) für $\omega = 0$ und $\omega \to \infty$ an. Sie dürfen sich ruhig an Ma1 AB9 A5 erinnern :-)

Zusatz: Geben Sie die elektrische Schaltung an, für die $f(s)$ der sogenannte 'doppelte Spannungsteiler' (eine Spannung wird zweimal geteilt) ist.

(d) Vergleichen Sie (c) mit den Werten des Spannungsteilers, wenn Sie die Kondensatoren C im Netzwerk aus 'Zusatz' einmal durch einen Leerlauf und einmal durch einen Kurzschluss ersetzen.

Kurzlösung:

(a)

$$f(s) = \frac{1}{s^2(CR)^2 + 3sCR + 1}$$

(b)

$$f(i\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2(CR)^2 + 3i\omega CR}$$

(c) $f(s = 0) = 1$, $\lim_{s\to\infty} f(s) = 0$. Diese Werte 'sieht' man oft leicht am Netzwerk, in dem jeder Kondensator durch Leerlauf bzw. Kurzschluss ersetzt wurde. Das ist also eine mögliche Plausibilitätskontrolle.

A7 Gegeben ist folgender Ausdruck einer komplexen Variablen s; dabei seien R, C (gegebene) Konstanten:

$$f(s) = \frac{R \parallel \frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC} + R + R \parallel \frac{1}{sC}}$$

Dabei ist $a \parallel b$ eine Notation, die durch $\frac{ab}{a+b}$ aufgelöst wird bzw. durch $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

(a) Formen Sie den Ausdruck einmal so um, dass Zähler und Nenner nur noch positive Potenzen von s enthalten und einmal so, dass der Zähler $= 1$ ist.

(b) Ersetzen Sie in (a) s durch $i\omega$ und geben Sie das Ergebnis in folgender Form an $f(i\omega) = \frac{1}{c+id}$.

(c) Geben Sie (a) für $s = 0$ und $s \to \infty$ sowie (b) für $\omega = 0$ und $\omega \to \infty$ an.

Zusatz: Geben Sie die elektrische Schaltung an, für die $f(s)$ ein Spannungsteiler ist.

(d) Denken Sie sich weitere Aufgaben aus, indem Sie die komplexen Widerstände des Spannungsteilers oder des doppelten Spannungsteilers (A2 bzw. A4) variieren, wiederholen Sie das Umformtraining. Sie können Ihr Ergebnis mit diesem Programm kontrollieren (die Lösung dieser Aufgabe steht dort im Quelltext hinter 'Phantasie 2').