Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1 (inkl. Kurzlösung)

9. Woche – Umkehrabbildung, reelles Doppelverhältnis, harmonische Funktion,

A1 Gegeben ist die Abbildung

$$s = \frac{1+z}{1-z} \quad \text{mit } z \in \mathbb{C}$$

Geben Sie die Umkehrabbildung an ($z = \ldots$).

Kurzlösung:

Siehe Regelungstechnik 1, VL13.

A2 [**Zusatz:**] **circle2circle – Kreisverwandtschaft**

Ein 'reelles Doppelverhältnis'

$$\frac{\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}}{\dfrac{z_3 - z}{z_2 - z}} = \alpha \textbf{ mit } \alpha \in \mathbb{R}$$

beschreibt alle Punkte z eines Kreises/einer Geraden durch z_1, z_2, z_3.
Zeigen Sie, dass das reelle Doppelverhältnis vierer Punkte unter Inversion $w = \frac{1}{z}$ konstant bleibt:

$$\frac{\dfrac{w_3 - w_1}{w_2 - w_1}}{\dfrac{w_3 - w_4}{w_2 - w_4}} = \ldots$$

Dies beweist, dass eine Gerade/ein Kreis auch bei Inversion in eine Gerade/einen Kreis übergeht.

Bemerkung: Das ist der Schlüssel zur Bestimmung derjenigen Möbius-Transformation (s. nächste Vorlesung), die drei gegebene Punkte auf drei gegebenen Bildpunkte abbildet.

Kurzlösung:

$$\frac{\dfrac{w_3 - w_1}{w_2 - w_1}}{\dfrac{w_3 - w_4}{w_2 - w_4}} = \frac{\dfrac{\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_1}}{\dfrac{1}{z_2} - \dfrac{1}{z_1}} \cdot \dfrac{z_1 z_3}{z_1 z_2}}{\dfrac{\dfrac{1}{z_3} - \dfrac{1}{z_4}}{\dfrac{1}{z_2} - \dfrac{1}{z_4}} \cdot \dfrac{z_4 z_3}{z_4 z_2}} = \frac{\dfrac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}}{\dfrac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2}} = \frac{\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}}{\dfrac{z_3 - z_4}{z_2 - z_4}}$$

Also ändert sich das (reelle) Doppelverhältnis vierer Punkte unter Inversion $w = \frac{1}{z}$ nicht.

Für Fortgeschrittene: Warum ist das Doppelverhältnis für z auf dem Kreis durch die drei Punkte z_1, z_2, z_3 überhaupt reell? 'Einfach' an den Peripheriewinkelsatz denken und an den Quotienten zweier komplexer Zahlen mit gleichem Winkel …

A3 VL-VORarbeit 1 – v_1 wird in der nächsten VL verwendet

(a) Ist $v_1(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ eine harmonische Funktion?
Welche Kurven werden durch $v_1(x,y)$=konstant beschrieben?

(b) Bei der Wahl $v_2 = \left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)^2$ wären die Iso-v-Linien (Kurven mit $v_2(x,y)$=konstant) radiale Strahlen in der z-Ebene. Ist $v_2(x,y)$ eine harmonische Funktion?

Zusatz: Für welche Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $f(v_1(x,y))$ harmonisch?

Kurzlösung: $\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = \ldots = 0$, Iso-v-Linien sind radiale Strahlen in der z-Ebene

A4 VL-VORarbeit 2 – wird in der nächsten VL verwendet

Gegeben ist

$$w = M(z) = \frac{z - z_0}{\overline{z_0} z - 1}$$

Zeigen Sie, dass $|w| = 1$ ist, für $|z| = 1$, also M den Einheitskreis der z-Ebene auf den Einheitskreis in der w-Ebene abbildet.

Kurzlösung: $|w|^2 = w\overline{w} = \ldots = 1$