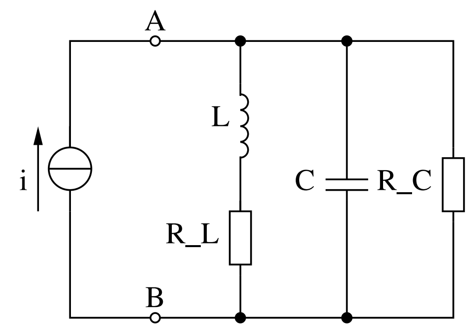
Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1 (inkl. Kurzlösung)

11. Woche – Möbius or not & Kreisverwandtschaft

A1 Möbius or not?

Geben Sie für die unten abgebildete Schaltung (Aufgabe III-5.12 aus dem Aufgabenheft zur Vorlesung Dynamische Netzwerke) den Eingangsleitwert $\underline{Y}_{AB}(s)$ mit $s = i\omega$ an. Ist das eine gebrochen lineare Funktion in s, also eine **Möbius**-Transformation (und damit zu erwarten, dass eine Gerade wie die imaginäre Achse auf eine Gerade oder einen Kreis abgebildet wird, Bem. 13.54)?



$i(t) = \widehat{I}\cos\omega t$

Kurzlösung:

$$Y_{AB}(s) = sC + G_C + \frac{1}{sL + R_L} = \frac{s^2LC + s(R_LC + G_CL) + G_CR_L + 1}{sL + R_L}$$

keine gebrochen lineare Funktion in s. Die Ortskurve des Leitwertes ist kein Kreis und keine Gerade.

Achtung: 'Möbius $\Rightarrow$ Ortkurve ist (Halb-)Gerade oder Kreis' aber **NICHT** umgekehrt. Im Beispiel Übung 6, A5 ist $f(s) = \frac{C\,R\,s}{C^2\,R^2\,s^2+3\,C\,R\,s+1}$, also KEINE Möbius-Transformation. Trotzdem ist die Ortskurve ein Kreis.

A2 Möbius^{-1} = Möbius?

Gegeben ist die Möbius-Transformation

$$s = \frac{1+z}{1-z} \quad \text{mit } z \in \mathbb{C}$$

Geben Sie die Umkehrabbildung an ($z = \ldots$). Ist das ebenfalls eine Möbius-Transformation?

Kurzlösung:

Siehe Regelungstechnik 1, VL13.

A3 [Zusatz:] circle2circle – Kreisverwandtschaft

Ein 'reelles Doppelverhältnis', s. Satz 13.56

$$\frac{\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}}{\dfrac{z_3 - z}{z_2 - z}} = \alpha \textbf{ mit } \alpha \in \mathbb{R}$$

beschreibt alle Punkte z eines Kreises/einer Geraden durch z_1, z_2, z_3.
Zeigen Sie, dass das reelle Doppelverhältnis vierer Punkte unter Inversion $w = \frac{1}{z}$ konstant bleibt:

$$\frac{\dfrac{w_3 - w_1}{w_2 - w_1}}{\dfrac{w_3 - w_4}{w_2 - w_4}} = \dots$$

Dies beweist, dass eine Gerade/ein Kreis auch bei Inversion in eine Gerade/einen Kreis übergeht.

Bemerkung: Das ist der Schlüssel zur Bestimmung derjenigen Möbius-Transformation, die drei gegebene Punkte auf drei gegebenen Bildpunkte abbildet.