Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)
inkl. Kurzlösung

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2 (inkl. Kurzlösung)
14. Woche – PDGL 2. Ordnung

A1 Im Fach Theoretische Elektrotechnik (TET) werden Sie dieses PDGL-Beispiel. betrachten.

(a) Klassifizieren Sie in dem Beispiel die PDGL (homogen/inhomogen) und die Zusatzbedingungen (homogen/inhomogen).

(b) Welche Aufgabe aus dem Ma4-Übungsprogramm behandelt eine PDGL mit der gleichen Klassifizierung?

Kurzlösung: Übung 12, A4

A2 Im Fach Theoretische Elektrotechnik werden Sie die sogenannte Diffusionsgleichung der Magneto-Quasistatik kennen lernen. Klassifizieren Sie den PDGL-Typ (elliptisch, parabolisch, hyperbolisch).

Kurzlösung: parabolisch

Separationsansatz in TET-Aufgaben

A3 Diese Aufgaben entsprechen den TET1-Übungsaufgaben 7.1 bis 7.3

(a) Überführen Sie die PDGL $\Delta\Psi(x,y,z)+k^2\Psi(x,y,z)=0$ in drei gewöhnliche Differentialgleichungen jeweils von x,y,z, wobei k eine Konstante ist.

(b) Überführen Sie die PDGL $\Delta\Psi(\rho,\varphi,z)+k^2\Psi(\rho,\phi,z)=0$ in drei gewöhnliche Differentialgleichungen jeweils von ρ,ϕ,z, wobei k eine Konstante ist.

(c) Überführen Sie die PDGL $\Delta\Psi(r,\vartheta,\varphi)=0$ in drei gewöhnliche Differentialgleichungen jeweils von r,ϑ,φ.

Hinweis:
Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten $\triangle = \underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)}_{=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$, vgl. Bem. 15.15, Laplace in Polarkoordinaten,

Laplace-Operator in Kugelkoordinaten $\triangle = \underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)}_{=\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}} + \frac{1}{r^2}\left(\underbrace{\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}}_{=\frac{1}{\tan\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}+\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$

Kurzlösung:

(a) $\psi(x,y,z)=\mathrm{F}(x)\mathrm{G}(y)\mathrm{H}(z)$

$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{F}}{\mathrm{d}x^2}=-k_x^2\mathrm{F}$, wobei k_x eine Konstante ist.

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{G}}{\mathrm{d}y^2} = -k_y^2\mathrm{G}, \text{ wobei } k_y \text{ eine Konstante ist.}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{H}}{\mathrm{d}z^2} = -k_z^2\mathrm{H}, \text{ wobei } k_z \text{ eine Konstante ist.}$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$$

(b) $\psi(\rho, \varphi, z) = \mathrm{F}(\rho)\mathrm{G}(\varphi)\mathrm{H}(z)$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{H}}{\mathrm{d}z^2} = -k_z^2\mathrm{H}, \text{ wobei } k_z \text{ eine Konstante ist.}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{G}}{\mathrm{d}\varphi^2} = -m^2\mathrm{G}, \text{ wobei } m \text{ eine Konstante ist.}$$

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{d}\rho}\right) - m^2\mathrm{F} + (k^2 - k_z^2)\rho^2\mathrm{F} = 0$$

(c) $\psi(r, \vartheta, \varphi) = \mathrm{F}(r)\mathrm{G}(\vartheta)\mathrm{H}(\varphi)$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{H}}{\mathrm{d}\varphi^2} = -m^2\mathrm{H}, \text{ wobei } m \text{ eine Konstante ist.}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{d}r}\right) = k\mathrm{F}, \text{ wobei } k \text{ eine Konstante ist.}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\mathrm{dG}}{\mathrm{d}\vartheta}\right) - \frac{m^2\mathrm{G}}{\sin\vartheta} = -k\mathrm{G}\sin\vartheta$$

In der TET wird diese Konstante $k = l(l+1)$ 'günstig gewählt' zur Verwendung von sogenannten Kugelflächenfunktionen.

PDGL 2. Ordnung: Schwingung einer Saite

A4 Die gedämpften Schwingungen einer eingespannten Saite der Länge ℓ werden durch die partielle Differentialgleichung

$$u_{tt} + 2\,c\,u_t = a^2\,u_{xx}$$

beschrieben. Dabei stellt $2c$ den auf die Längeneinheit bezogenen Dämpfungsfaktor dar; es gelte $0 < \ell\,c < a\,\pi$ (schwache Dämpfung).
Unter Verwendung des Separationsansatzes ermittle man die Lösung der Differentialgleichung, die folgenden Anfangs- und Randbedingungen genügt:

$$u(x,0) = f(x) = A\,\sin\frac{\pi}{\ell}x\ , \quad u_t(x,0) = g(x) = 0\ , \quad u(0,t) = u(\ell,t) = 0\ .$$

Kurzlösung:

$$u(x,t) = A\,e^{-ct}\left(\cos\omega_1\,t + \frac{c}{\omega_1}\sin\omega_1\,t\right)\sin\frac{\pi}{l}\,x \qquad \text{mit } \omega_1 := \sqrt{a^2(\frac{\pi}{\ell})^2 - c^2}.$$