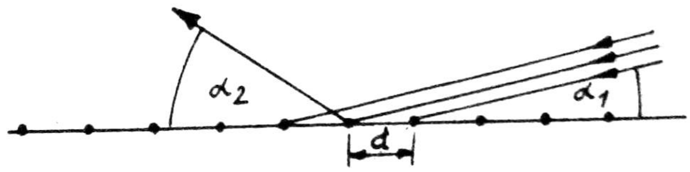
Übungen Atom- und Molekülphysik für Physiklehrer SS 2019

(Teil 1)

Aufgabe 1) Auf ein Reflexionsgitter mit der Gitterkonstanten d = 0.1 mm fällt paralleles gelbes Licht (λ = 589 nm) unter dem Winkel $\alpha_1 = 2^{o}$ gegenüber der Gitterebene.

a) Unter welchem Winkel α_2 wird das Maximum erster Ordnung des gelben Lichtes beobachtet?
b) Muss der Beobachtungswinkel α_2 vergrößert oder verkleinert werden, wenn das Maximum des roten bzw. blauen Lichtes gleicher Ordnung gesehen werden soll?



Aufgabe 2) Welche Breite b muss ein Beugungsgitter der Gitterkonstanten d = 5 µm mindestens haben, damit es die beiden Natrium-D-Linien (λ_1 = 589.6 nm, λ_2 = 589.0 nm) im Spektrum erster Ordnung trennen kann?

Aufgabe 3) Eine Photokathode aus Caesium hat die Austrittsarbeit W_a. Sie wird mit Na-Licht der Wellenlänge λ bestrahlt. Welche Gegenspannung U muss man an die Anode der Photozelle anlegen, damit der Photostrom gerade verschwindet? Wie groß ist die Grenzwellenlänge λ_G?

W_a = 1,93 eV λ = 589nm

Aufgabe 4) : Licht mit einer homogenen Intensität von 10^{-2} W/m^2 fällt auf eine Festkörperoberfläche. Schätzen Sie die „klassisch“ zu erwartende Zeitverzögerung beim Photoeffekt folgendermaßen ab:

a) Berechnen Sie die Energie, die pro Sekunde auf ein Oberflächenatom des Festkörpers mit der Querschnittsfläche 10^{-20} m^2 fällt.

b) Wie lange würde es dauern, bis sich an diesem Atom eine Energie angesammelt hat, um ein Elektron mit der Austrittsarbeit von 1.7 eV herauszulösen.

Aufgabe 5) Ein Laser habe eine Strahlungsleistung von 1 mW bei λ = 632,8 nm und einen Strahlquerschnitt von 4 mm^2.

a) Wie groß ist die Anzahl der Photonen, die pro Sekunde auf 1 mm^2 treffen?
b) Vergleichen Sie die Intensität des Laserlichtes mit der des Sonnenlichts (I = 1,36 kW/m^2).

Aufgabe 6) Ein γ-Quant hat die Energie E= 1,33 MeV. Berechnen Sie die Masse m, den Impuls p, die Frequenz f und die Wellenlänge λ für dieses Quant!

Aufgabe 7) : Die Dissoziationsenergie des Chlormoleküls Cl_2 beträgt 239,7 $kJ \cdot mol^{-1}$ (= Energie zur Spaltung der Cl-Cl Bindung). Berechnen Sie Wellenlänge (in nm), die Wellenzahl (in cm^{-1}) und Frequenz eines Lichtstrahls, dessen Energie gerade ausreicht, um die Cl-Cl Bindung zu spalten. Welcher Spektralfarbe entspricht das?

Aufgabe 8) Um welchen Betrag ΔE kann sich die Energie E eines Lichtquants beim Compton-Effekt im Höchstfall ändern?

a) E_1 = 25 keV (Röntgenstrahlung)
b) E_2 = 2,5 eV (Sichtbares Licht)

Aufgabe 9) Ein Photon, das von einem Atom ausgesandt wird, überträgt auf dieses einen Rückstoßimpuls.

a) Wie groß ist die kinetische Energie, die dabei an das Atom abgegeben wird, wenn f die Frequenz des Photons und M die Masse des Atoms ist?

b) Wie groß ist die Rückstoßenergie, die bei der Aussendung der Quecksilberspektrallinie mit der Wellenlänge λ = 253,7 nm auf ein ^{202}Hg-Atom übertragen wird?

c) Welche Energie hat das Photon?

d) Was hat diese Aufgabe mit dem Begriff "Laserkühlung" zu tun ?

Aufgabe 10) Zwischen zwei horizontal liegenden Kondensatorplatten, die den Abstand l voneinander haben, befindet sich ein Öltröpfchen (Dichte ρ_1, Durchmesser d). Bei der angelegten Spannung U schwebt das Tröpfchen. Zwischen den Platten befindet sich Luft (Dichte ρ_2).

Wie viel Elementarladungen (Anzahl N) sitzen auf dem Tröpfchen?

l = 8,0 mm d = 1,2 μm ρ_1 = 0,86 g/cm^3 ρ_2 = 1,4 g/m^3 U = 127 V

Aufgabe 11) Ein Strahl von Silberatomen (Masse: 107,9 u) im Grundzustand ($5\ ^2S_{1/2}$) fliegt mit einer Geschwindigkeit von 500 m/s durch ein inhomogenes Magnetfeld (Stern-Gerlach-Versuch). Der Feldgradient von $dB/dz = 10^3$ Tesla/m steht senkrecht zur Flugrichtung der Atome. In Flugrichtung besitzt das Magnetfeld eine Ausdehnung von 4 cm. Ein Auffangschirm ist 10 cm hinter dem Ende des Magnetfeldes aufgestellt. Berechnen sie die Komponente des magnetischen Moments der Silberatome in Richtung des Magnetfeldes, wenn die gemessene Aufspaltung auf dem Schirm 2 mm beträgt.

Hinweis: Das magnetische Moment des Silberatoms im Grundzustand ist in guter Näherung "verknüpft" mit dem Spin des äußeren 5s-Elektrons.

Aufgabe 12) Welche Energie benötigt ein α-Teilchen mindestens, um einem Goldkern (Z=79, A = 197) so nahe zu kommen, das beide Kerne sich berühren? Berücksichtigen Sie nur die Coulomb-Abstoßung bei der Berechnung!

Hinweis: Näherungsweise kann man für die Kernradien ansetzen: $r = r_0 A^{1/3}$ mit r_0 = 1,4 fm.

Zusatzfrage: Wie kommt man auf diese Näherungsformel für den Kernradius?

Zusatzfrage: Was versteht man unter anormalen Rutherford-Streuung?

Aufgabe 13) Berechnen Sie die De-Broglie-Wellenlänge λ eines Elektrons als Funktion seiner kinetischen Energie E_k im relativistischen Bereich! Welche Näherungsformeln ergeben sich für $\lambda(E_k)$ als Ergebnis für $E_k \ll m_e c^2$ und für $E_k \gg m_e c^2$?

Hinweis: Gehen Sie bei der Lösung von der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung :

$E = c\sqrt{(m_0 c)^2 + p^2}$ mit $m_0 = m_e$ aus!

Aufgabe 14) In einem Transmissionselektronenmikroskop ist 100 keV ein typischer Wert für die kinetische Energie der Elektronen. Berechnen Sie die De-Broglie-Wellenlänge λ dieser Elektronen. Warum muss man relativistisch rechnen? Was ergäbe sich bei einer nichtrelativistischen Berechnung?

Aufgabe 15) Ein Ensemble von Na-Atomen mit der Teilchenzahldichte n werde auf die Temperatur T abgekühlt. Wie tief muss T werden, damit die De-Broglie-Wellenlänge λ der Na-Atome größer wird als der mittlere Abstand zwischen den Atomen? (Zahlenbeispiel: $n=10^{12}/cm^3$). Sind die Atome dann noch unterscheidbar?

Aufgabe 16) In dem nach ihnen benannten Experiment richteten Clinton Davisson und Lester Germer einen Strahl von Elektronen senkrecht auf die Oberfläche eines Nickel-Kristalls und beobachteten die Beugung der Elektronen an der Oberfläche in Abhängigkeit vom Winkel.

a) Wie groß ist die Wellenlänge der Elektronen, wenn sie durch die Spannung $U_B = 54$ V beschleunigt werden?

b) Unter welchen Winkeln gegenüber der Senkrechten treten allgemein Intensitätsmaxima in der beobachteten Beugung auf?

c) Welcher Wert ergibt sich für den regelmäßigen Gitterabstand des Nickel-Atome, wenn bei der angegebenen Beschleunigungsspannung ein 1. Beugungsmaximum bei $\Phi = 50^\circ$ auftritt?

d) Viele bedeutende Entdeckungen geschehen mehr oder minder durch Zufall. Was wäre passiert, wenn Davisson und Germer die Beschleunigungsspannung $U_B < 30$ V gewählt hätten?

Aufgabe 17) Berechnen Sie nach dem Bohrschen Atommodell die Bindungsenergie im Wasserstoffatom, bei dem sich das Elektron auf der Bahn n=1000 befindet. Wie groß ist der Radius dieser Bahn?

Aufgabe 18) Berechnen Sie die Wellenlängen des Wasserstoffspektrums im sichtbaren Spektralbereich (380 nm bis 780 nm)!

Aufgabe 19) Um welchen Faktor wächst der Radius der Bohr'schen Bahn, wenn dem H-Atom vom Grundzustand aus die Energie

a) 12.09 eV
b) 13.387 eV

Zugeführt wird?

Aufgabe 20) Welche Temperatur müsste atomares Wasserstoffgas besitzen, damit seine mittlere thermische Energie ausreicht, um ein Elektron aus dem Grundzustand in den ersten angeregten Zustande anzuregen?

Aufgabe 21) Berechnen Sie die Energien für die ersten beiden Bohrschen Bahnen im Positronium! Wie groß ist die Wellenlänge des Photons, das bei einem Übergang von n=2 nach n=1 emittiert wird? Hinweise: Das Positronium ist ein gebundenes System aus einem Elektron und einem Positron. Beide haben dieselbe Masse aber entgegengesetzte Ladung. Das Positronium ist also vergleichbar mit dem Wasserstoffatom, nur dass das schwere Proton durch ein leichteres Positron ersetzt wurde.

Aufgabe 22) Welche Energie E und welche Wellenlänge λ haben die langwelligste und kurzwelligste Linie des He^+ - Spektrums, die beim Übergang zum Grundzustand auftreten können?

Aufgabe 23) Berechnen Sie mit Hilfe der Heisenbergschen Unschärferelation $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$ die (relativistische) kinetische Energie, die ein Elektron hätte, wenn es sich ausschließlich in einem ${}^{40}_{20}Ca$ - Atomkern (Radius: $3.5 \cdot 10^{-15}$ m) aufhielte. Könnte das Elektron durch die Coulomb-Wechselwirkung mit der Kernladung (Z=20) so vollständig im Kern festgehalten werden?

Bestimmen sie durch analoge Rechnungen die kinetische Energie eines Elektron in der Atomhülle im Wasserstoff (Radius: $0.5 \cdot 10^{-10}$ m). Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der Bindungsenergie des Grundzustands des Wasserstoffatoms.

Aufgabe 24) Ein Teilchen befindet sich in einem Kastenpotential mit unendlich hohen Wänden. Die Wände befinden sich bei $-x_0$ und x_0. Berechnen Sie die Eigenwerte E_n der Energie und die zugehörige Wellenfunktion $\Psi_n(x)$!

Hinweise:

- Überlegen sie sich zuerst, ob es vielleicht sinnvoll wäre, das Koordinatensystem auf der x-Achse zu verschieben !
- $$\int \cos^2(x)dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x) \cdot \cos(x)) + C$$
- $$\int \sin^2(x)dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x) \cdot \cos(x)) + C$$

Aufgabe 25) Ein Elektron befindet sich in einem Kastenpotential mit unendlichen hohen Wänden, dessen halbe Breite x_0 gleich dem Bohrschen Wasserstoffradius r_0 ist. Welche Wellenlänge hat ein Lichtquant, das beim Übergang des Elektrons vom ersten angeregten Zustand in den Grundzustand emittiert wird? Was hat diese Aufgabe eigentlich mit einem Atom zu tun?

$r_0 = 0{,}5292 \cdot 10^{-10}$ m

Aufgabe 26) Ein harmonischer Oszillator (Teilchenmasse m, Eigenfrequenz ω_0) hat das Potential: $E_p(x) = \frac{1}{2} m \varpi_0^2 x^2$.

a) Die Funktion $\Psi_n(x) = A \cdot x \cdot e^{-\alpha \cdot x^2}$ ist eine Lösung der Schrödinger-Gleichung. Welchen Wert muß α haben?

b) Welcher Energieeigenwert E_n gehört zu dieser Wellenfunktion?

c) Welchem Energieniveau n entspricht diese Energie?

d) Stellen sie die Wahrscheinlichkeitsdichte w(x) für diese Wellenfunktion dar!

e) Was hat diese Aufgabe eigentlich mit einem Atom zu tun?

Hinweis: $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

Aufgabe 27)

a) Welche Schwingungsamplitude x_0 hätte ein klassischer harmonischer Oszillator der Masse m, dessen Schwingungsenergie gleich der Energie $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$ des quantenmechanischen Grundzustandes ist?

b) Welche Wahrscheinlichkeitsdichte $w_1(x)$ für den Aufenthalt an einer Stelle x hat der klassische harmonische Oszillator?

c) Stellen Sie $w_1(x)$ zusammen mit der quantenmechanischen Aufenthaltswahrscheinlichkeit $w_0(x) = \frac{1}{x_0\sqrt{\pi}} e^{-(\frac{x}{x_0})^2}$ in einem Diagramm dar!

Hinweis: Die klassische Funktion $w_1(x)$ ergibt sich aus der Vorschrift: $w_1(x) \propto \frac{1}{|v_x|}$

und : $\int_{-\infty}^{+\infty} w_1(x)\, dx = 1$

Weiterhin wird benötigt: $\int \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = \arcsin(\tfrac{x}{x_0}) + C$

Aufgabe 28) Beim Alpha-Zerfall eines Atomkernes wird ein α - Teilchen aus einem Atomkern emittiert. Zur Beschreibung dieses radioaktiven Zerfalls soll folgendes Modell zum Einsatz kommen:

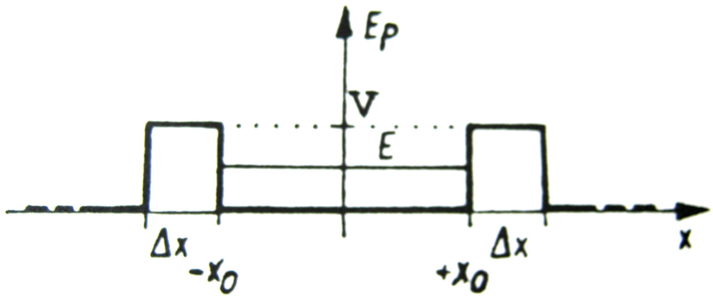
Ein α - Teilchen (Masse m_α) ist bei der Energie E in einem Potentialtopf mit den Wänden endlicher Dicke quasistationär gebunden (Modell des Atomkerns). Betrachten sie das System näherungsweise so, als wenn sich das α - Teilchen im Topf als eine ebene Welle darstellen läst, die an den Potentialtopfwänden reflektiert wird und zum Teil rechts und links durch die Wand tunnelt.

$m_\alpha = 6{,}643 \cdot 10^{-27}$ kg

$x_0 = 7{,}30 \cdot 10^{-15}$ m

$\Delta x = 15{,}47 \cdot 10^{-15}$ m

E = 4,78 MeV V = 33,9 MeV



a) Skizzieren sie den prinzipiellen Verlauf der Wellenfunktion für dieses Modell.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Schrödingergleichung das Verhältnis der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten des Teilchens zwischen Außenwand und Innenwand des Topfes näherungsweise aus dem exponentiellen Abfall der Wellenfunktion im Bereich der Wand.

c) Verwenden Sie das Ergebnis aus Aufgabe b) als Wahrscheinlichkeit P_T für das Tunnel des Teilchens bei einem Aufprall auf die Wand. Wie häufig muss das Teilchen gegen diese Wand prallen, bis es im Durchschnitt einmal durch die Wand tunnelt?

d) Schätzen sie mit Hilfe des Ergebnisses aus Aufgabe c) die durchschnittliche Lebensdauer τ_0 des „Atomkerns“ ab. Hinweis: Die Zeit, die zwischen zwei aufeinander folgenden Wandstößen des α- Teilchens vergeht, ist klassisch zu berechnen.

Aufgabe 29) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hält sich das Elektron im Grundzustand des Wasserstoffatoms im Proton (Radius r_p = 0.895 fm) auf ? Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, das sich das Elektron im Grundzustand eines wasserstoffähnlichen Uranions im $^{238}_{92}U$ -Kern (Radius r_u = 5.86 fm) aufhält?

Hinweise: Verwenden sie in beiden Fällen die nichtrelativistische Wellenfunktion. Es kann weiterhin davon ausgegangen werden, dass innerhalb des kleinen Kernradius die Wellenfunktion als nahezu konstant angesehen werden kann.

$$\psi_{1,0,0}(r) = \frac{(Z)^{3/2}}{\sqrt{\pi}\,(a_0)^{3/2}} \cdot e^{-r \cdot Z / a_0}$$

Aufgabe 30) Was ist der Unterschied zwischen der "radialen Wellenfunktion" und der "radialen Aufenthaltswahrscheinlichkeit"?

Betrachten Sie dazu ein Wasserstoffatom im Grundzustand. Wo ist die "radialen Wellenfunktion" am Größten und in welchem Abstand zum Kern hält es sich am wahrscheinlichsten auf ? Diskutieren sie die Unterscheide!

Hinweis: Die 1*s*-Wellenfunktion des Wasserstoffatoms lautet:

$$\psi_{1,0,0}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(a_0)^{3/2}} \cdot e^{-r/a_0}$$

Aufgabe 31) Berechnen Sie den Erwartungswert (Mittelwert) $\overline{|\vec{r}|}$ für den 1*s* – Zustand im Wasserstoffatom! Warum ist der berechnete Wert nicht identisch mit dem Wert aus der vorhergehenden Aufgabe?

Hinweis: Die 1*s*-Wellenfunktion des Wasserstoffatoms lautet:

$$\psi_{1,0,0}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(a_0)^{3/2}} \cdot e^{-r/a_0}$$

Und es gilt: $\int_0^\infty x^n e^{-\lambda x} dx = n! \cdot \lambda^{-(n+1)}$

Aufgabe 32) Zeigen Sie, dass für die Komponenten des quantenmechanischen Bahndreh-impulsoperators

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix}$$

die folgende Vertauschungsrelation gilt:

$$\left[L_x, L_y\right] = L_x L_y - L_y L_x = i\hbar L_z$$

Hinweise: Für den Drehimpuls gilt: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Dies lässt sich als Determinante schreiben:

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

Die quantenmechanische Formulierung erhält man durch Übergänge zu Operatoren:

$$\begin{aligned} \vec{r} &\rightarrow \vec{r} \\ \vec{p} &\rightarrow -i\hbar\vec{\nabla} \\ \vec{r} \times \vec{p} &\rightarrow -i\hbar\vec{r} \times \vec{\nabla} \end{aligned}$$