TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Physik
Institut für Festkörper- und Materialphysik
Prof. Dr. Jochen Geck
Dr. Dominik Kraus
21.06.2018

Quantenphysik für Lehramt

SS 2018

4. Übungsblatt

Gruppe B

Aufgabe 4.1: Schwarzer Körper

a) Die Oberfläche eines schwarzen Körpers

- ... ist heißer als das Innere.
- ... absorbiert alle Strahlung, die auf sie fällt.
- ... reflektiert einen Teil der Strahlung, die auf sie fällt.

Markieren Sie die richtige Antwort.

b) Ein schwarzer Körper emittiert

- ... monochromatisches Licht.
- ... ein Strahlungsspektrum, das von Größe und Beschaffenheit der Oberfläche abhängt.
- ... ein Strahlungsspektrum, das nur von der Temperatur der Körpers abhängt.

Markieren Sie die richtige Antwort.

Aufgabe 4.2: Potentialbarriere

Betrachten Sie ein freies Teilchen mit Energie E, das sich in x-Richtung auf eine Potentialbarriere $V(x)$ zubewegt. Es gelte:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ V_0 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Setzen Sie folgende Wellenfunktion für das freie Teilchen an:

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_l(x) = Ae^{ik_lx} + Be^{-ik_lx} & \text{für } x < 0 \\ \psi_r(x) = Ce^{ik_rx} + De^{-ik_rx} & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

a) Wie lauten die Wellenvektoren k_l und k_r für $E > V_0$ und $E < V_0$? Begründen Sie, dass sowohl für $E > V_0$ als auch für $E < V_0$ nur $D = 0$ physikalisch sinnvoll ist.

b) Eine stetig differenzierbare Fortsetzung der Wellenfunktion bei $x = 0$ verlangt

$$\psi_l(0) = \psi_r(0) \qquad \text{und} \qquad \left.\frac{\partial \psi_l}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial \psi_r}{\partial x}\right|_{x=0}$$

Welche Bedingungen ergeben sich daraus für A, B, C und D?

c) Berechnen Sie den Reflexionskoeffizienten $R = \frac{|B|^2}{|A|^2}$ für $E < V_0$ und $D = 0$.

d) Berechnen Sie den Reflexionskoeffizienten $R = \frac{|B|^2}{|A|^2}$ für $E > V_0$ und $D = 0$.

Aufgabe 4.3: Tunneleffekt

Betrachten Sie ein freies Teilchen mit Energie E, dass sich in x-Richtung auf eine Potentialbarriere mit endlicher Breite a mit $a > 0$:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ V_0 & \text{für } x \geq 0 \quad \text{und } x < a \\ 0 & \text{für } x \geq a \end{cases}$$

zubewegt und nehmen Sie für die Wellenfunktion an:

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_l(x) = Ae^{ik_l x} + Be^{-ik_l x} & \text{für } x < 0 \\ \psi_m(x) = Ce^{ik_m x} + De^{-ik_m x} & \text{für } x \geq 0 \quad \text{und } x < a \\ \psi_r(x) = Fe^{ik_r x} & \text{für } x \geq a \end{cases}$$

a) Für $E < V_0$: Welche Bedingungen erhalten Sie für A,B, C, D und F unter der Annahme von stetig differenzierbaren Fortsetzungen (siehe Aufgabe 4.4) bei $x = 0$ und $x = a$?

b) Für $E < V_0$ ergibt sich der Transmissionskoeffizient $T = \frac{|F|^2}{|A|^2}$ zu

$$T = \left[1 + \frac{V_0^2 \sinh^2 \left[\frac{a}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)} \right]}{4E(V_0 - E)} \right]^{-1} .$$

Welcher Transmissionskoeffizient ergibt sich für ein Proton der Energie 500 keV, dass sich auf eine 50 fm breite Potentialbarriere der Höhe 600 keV zubewegt. Welcher Transmissionskoeffizient ergibt sich für ein Elektron der gleichen Energie?

Aufgabe 4.4: Schwarzkörperstrahlung

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die spektrale Energiedichte (Energie pro Volumenelement) eines schwarzen Körpers durch

$$\rho(\nu)d\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} d\nu$$

gegeben ist.

a) Berechnen Sie die Wellenlängendarstellung der spektralen Energiedichte $\rho(\lambda)d\lambda$. (Hinweis: $d\nu \neq d\lambda$).

b) Bei welcher Wellenlänge ist die spektrale Energiedichte maximal? (Anleitung: Der entstehende Ausdruck ist nicht analytisch lösbar. Benutzen Sie die numerische Lösung x=4.96511 für die Gleichung $\frac{xe^x}{e^x - 1} - 5 = 0$).

c) Bei welcher Wellenlänge ist die Abstrahlung der Sonne maximal (Oberflächentemperatur ~5780 K)? Wie verhält es sich bei der kosmischen Hintergrundstrahlung (~2,725 K)? Nehmen Sie jeweils einen perfekten schwarzen Körper an. Welche Mindesttemperatur brauchen Sie für ein Maximum im Röntgenbereich (λ <1 nm)?

Aufgabe 4.5: Stefan-Boltzmann-Gesetz

Integrieren Sie die Frequenzdarstellung der spektralen Energiedichte eines schwarzen Körpers $\rho(\nu)d\nu$ über alle Frequenzen von 0 bis ∞ (Anleitung: Benutzen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{e^x - 1}$, $\int_0^{\infty} x^n \exp(-ax) = \frac{n!}{a^{n+1}}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$). Welche Energiemenge ist in einem zylindrischen schwarzen Körper mit Radius 2.3 mm und Länge 8.6 mm bei einer Temperatur von $3 \cdot 10^6$ K gespeichert?