



5. Übungsblatt

Gruppe A

Aufgabe 5.1: Pauli-Prinzip

a) Elektronen sind Fermionen und daher

- ... können sie in einem Atom nicht in allen Quantenzahlen übereinstimmen.
- ... werden sie durch eine Vielteilchenwellenfunktion beschrieben, die unter Vertauschung symmetrisch ist.
- ... können sie in beliebiger Menge in ein Volumen bestimmter Größe gepackt werden.

Markieren Sie die richtige Antwort.

b) Photonen sind Bosonen und daher

- ... werden ihre Energiezustände nach der Fermi-Verteilung besetzt.
- ... werden sie durch eine Vielteilchenwellenfunktion beschrieben, die unter Vertauschung antisymmetrisch ist.
- ... können sie in beliebiger Menge in ein Volumen bestimmter Größe gepackt werden.

Markieren Sie die richtige Antwort.

Aufgabe 5.2: Schwarzkörperstrahlung

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die spektrale Energiedichte (Energie pro Volumenelement) eines schwarzen Körpers durch

$$\rho(\nu)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} d\nu$$

gegeben ist.

- Berechnen Sie die Wellenlängendarstellung der spektralen Energiedichte $\rho(\lambda)d\lambda$. (Hinweis: $d\nu \neq d\lambda$).
- Bei welcher Wellenlänge ist die spektrale Energiedichte maximal? (Anleitung: Der entstehende Ausdruck ist nicht analytisch lösbar. Benutzen Sie die numerische Lösung $x=4.96511$ für die Gleichung $\frac{xe^x}{e^x - 1} - 5 = 0$).
- Bei welcher Wellenlänge ist die Abstrahlung der Sonne maximal (Oberflächentemperatur ~ 5780 K)? Wie verhält es sich bei der kosmischen Hintergrundstrahlung ($\sim 2,725$ K)? Nehmen Sie jeweils einen perfekten schwarzen Körper an. Welche Mindesttemperatur brauchen Sie für ein Maximum im Röntgenbereich ($\lambda < 1$ nm)?

Aufgabe 5.3: Optische Falle

Lasergekühlte Atome können mit Hilfe einer geeigneten Anordnung von Laserstrahlen in sog. optischen Fallen gefangen werden. In guter Näherung können dabei die Fallenpotentiale als harmonisch angenommen werden, d.h.

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}m\omega_x^2x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2y^2 + \frac{1}{2}m\omega_z^2z^2.$$

Betrachten Sie hier den eindimensionalen Fall, d.h.

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega_x^2x^2.$$

Die Wellenfunktion der Eigenzustände besitzt folgende Form:

$$\psi_n = \left(2^n n! \sqrt{2\pi} \Delta x\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{4} \left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2\right] H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}\Delta x}\right).$$

$H_n(x)$ ist dabei das Hermite-Polynom n -ter Ordnung ($H_0(x) = 1, H_1(x) = x, \dots$).

- Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion für den Grundzustand ($n = 0$) eine Lösung der statioären Schrödinger-Gleichung für ein Teilchen im Potential $V(x)$ ist und bestimmen Sie Δx .
- Wie groß ist die Energie des Grundzustands (ψ_0) und die des ersten angeregten Zustands (ψ_1)?

Aufgabe 5.4: Kastenpotential

Betrachten Sie eine Materiewelle der Energie E in einem unendlichen Kastenpotential

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x \leq 0 \\ 0 & \text{für } x > 0 \text{ und } x < d \\ \infty & \text{für } x \geq d. \end{cases}$$

- Nehmen Sie $\psi(x) = A \sin(kx)$ als Ansatz für die Wellenfunktion innerhalb des Kastens und finden Sie einen Ausdruck für alle möglichen Werte von k und der zugehörigen Gesamtenergie.
- Zeigen Sie, dass für große n die relative Differenz der Energieniveaus im unendlichen Kastenpotential durch

$$\frac{E_{n+1} - E_n}{E_n} \approx \frac{2}{n} \quad (1)$$

gegeben ist. Wie deuten Sie dies im Vergleich zur klassischen Physik?

Aufgabe 5.5: Thermische De-Broglie-Wellenlänge

Quantenmechanische Ununterscheidbarkeit wird im Allgemeinen relevant, wenn die de-Broglie-Wellenlänge des Teilchens größer als der Abstand zu anderen Teilchen ist. Betrachten Sie ein ideales Gas, für das die mittlere kinetische Energie der Teilchen durch

$$E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m} = \frac{3}{2}k_B T$$

gegeben ist.

- Wie lautet die De-Broglie-Wellenlänge für ein Teilchen mit dieser mittleren kinetischen Energie in Abhängigkeit von der Temperatur?
- Ein typischer Gitterabstand in einem Festkörper beträgt $d=0,3 \text{ nm}$. Betrachten Sie Natrium mit einem (freien) Leitungselektron pro Atom. Unterhalb welcher Temperatur werden quantenmechanische Effekte für die Leitungselektronen relevant?
- Unterhalb welcher Temperatur ist dies für die Atomkerne der Natriumatome der Fall?