Übungen Atom- und Molekülphysik für Physiklehrer (Teil 1)

Aufgabe 1) Gegeben seien die folgenden zwei elektrischen Felder $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$ im Vakuum:

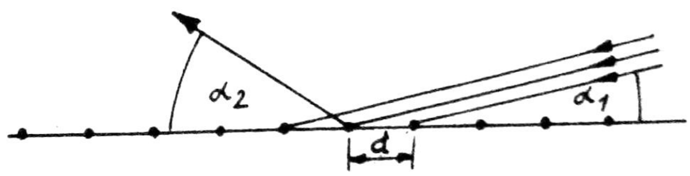
$$\vec{E}_1 = (E_{1,x}, E_{1,y}, E_{1,z}) = E_0\,(sin(kz - \omega t), -sin(kz - \omega t), 0)$$

$$\vec{E}_2 = (E_{2,x}, E_{2,y}, E_{2,z}) = E_0\,(sin(kz - \omega t), -cos(kz - \omega t), 0)$$

a) Diskutieren Sie die Polarisationszustände der beiden $\vec{E}$ - Felder!
b) Berechnen Sie die zugehörigen $\vec{B}$ - Felder!

Aufgabe 2) Auf ein Reflexionsgitter mit der Gitterkonstanten d = 0.1 mm fällt paralleles gelbes Licht (λ = 589 nm) unter dem Winkel $\alpha_1 = 2^o$ gegenüber der Gitterebene.

a) Unter welchem Winkel α_2 wird das Maximum erster Ordnung des gelben Lichtes beobachtet?
b) Muss der Beobachtungswinkel α_2 vergrößert oder verkleinert werden, wenn das Maximum des roten bzw. blauen Lichtes gleicher Ordnung gesehen werden soll?



Aufgabe 3) Welche Breite b muss ein Beugungsgitter der Gitterkonstanten d = 5 μm mindestens haben, damit es die beiden Natrium-D-Linien (λ_1 = 589.6 nm, λ_2 = 589.0 nm) im Spektrum erster Ordnung trennen kann?

Aufgabe 4) Eine Photokathode aus Caesium hat die Austrittsarbeit W_a. Sie wird mit Na-Licht der Wellenlänge λ bestrahlt. Welche Gegenspannung U muss man an die Anode der Photozelle anlegen, damit der Photostrom gerade verschwindet? Wie groß ist die Grenzwellenlänge λ_G?

W_a = 1,93 eV λ = 589nm

Aufgabe 5) : Licht mit einer homogenen Intensität von 10^{-2} W/m^2 fällt auf eine Festkörperoberfläche. Schätzen Sie die „klassisch“ zu erwartende Zeitverzögerung beim Photoeffekt folgendermaßen ab:

a) Berechnen Sie die Energie, die pro Sekunde auf ein Oberflächenatom des Festkörpers mit der Querschnittsfläche 10^{-20} m^2 fällt.

b) Wie lange würde es dauern, bis sich an diesem Atom eine Energie angesammelt hat, um ein Elektron mit der Austrittsarbeit von 1.7 eV herauszulösen.

Aufgabe 6) Ein Laser habe eine Strahlungsleistung von 1 mW bei λ = 632,8 nm und einen Strahlquerschnitt von 4 mm^2.

a) Wie groß ist die Anzahl der Photonen, die pro Sekunde auf 1 mm^2 treffen?
b) Vergleichen Sie die Intensität des Laserlichtes mit der des Sonnenlichts (I = 1,36 kW/m^2).

Aufgabe 7) Ein γ-Quant hat die Energie E= 1,33 MeV. Berechnen Sie die Masse m, den Impuls p, die Frequenz f und die Wellenlänge λ für dieses Quant!

Aufgabe 8) : Die Dissoziationsenergie des Chlormoleküls Cl_2 beträgt 239,7 kJ · mol^{-1} (= Energie zur Spaltung der Cl-Cl Bindung). Berechnen Sie Wellenlänge (in nm), die Wellenzahl (in cm^{-1}) und Frequenz eines Lichtstrahls, dessen Energie gerade ausreicht, um die Cl-Cl Bindung zu spalten. Welcher Spektralfarbe entspricht das?

Aufgabe 9) Um welchen Betrag ΔE kann sich die Energie E eines Lichtquants beim Compton-Effekt im Höchstfall ändern?

a) E_1 = 25 keV (Röntgenstrahlung)
b) E_2 = 2,5 eV (Sichtbares Licht)

Aufgabe 10) Ein Photon, das von einem Atom ausgesandt wird, überträgt auf dieses einen Rückstoßimpuls.

a) Wie groß ist die kinetische Energie, die dabei an das Atom abgegeben wird, wenn f die Frequenz des Photons und M die Masse des Atoms ist?

b) Wie groß ist die Rückstoßenergie, die bei der Aussendung der Quecksilberspektrallinie mit der Wellenlänge λ = 253,7 nm auf ein ^{202}Hg-Atom übertragen wird?

c) Welche Energie hat das Photon?

Aufgabe 11) Zwischen zwei horizontal liegenden Kondensatorplatten, die den Abstand l voneinander haben, befindet sich ein Öltröpfchen (Dichte ρ_1, Durchmesser d). Bei der angelegten Spannung U schwebt das Tröpfchen. Zwischen den Platten befindet sich Luft (Dichte ρ_2).

Wie viel Elementarladungen (Anzahl N) sitzen auf dem Tröpfchen?

$l = 8{,}0$ mm $d = 1{,}2$ µm $\rho_1 = 0{,}86$ g/cm^3 $\rho_2 = 1{,}4$ g/m^3 $U = 127$ V

Aufgabe 12) Ein Strahl von Silberatomen (Masse: 107,9 u) im Grundzustand ($5\ ^2S_{1/2}$) fliegt mit einer Geschwindigkeit von 500 m/s durch ein inhomogenes Magnetfeld (Stern-Gerlach-Versuch). Der Feldgradient von $dB/dz = 10^3$ Tesla/m steht senkrecht zur Flugrichtung der Atome. In Flugrichtung besitzt das Magnetfeld eine Ausdehnung von 4 cm. Ein Auffangschirm ist 10 cm hinter dem Ende des Magnetfeldes aufgestellt. Berechnen sie die Komponente des magnetischen Moments der Silberatome in Richtung des Magnetfeldes, wenn die gemessene Aufspaltung auf dem Schirm 2 mm beträgt.

Hinweis: Das magnetische Moment des Silberatoms im Grundzustand ist in guter Näherung "verknüpft" mit dem Spin des äußeren 5s-Elektrons.

Aufgabe 13) Welche Energie benötigt ein α-Teilchen mindestens, um einem Goldkern (Z=79, A = 197) so nahe zu kommen, das beide Kerne sich berühren? Berücksichtigen Sie nur die Coulomb-Abstoßung bei der Berechnung!

Hinweis: Näherungsweise kann man für die Kernradien ansetzen: $r = r_0 A^{1/3}$ mit $r_0 = 1{,}4$ fm.

Aufgabe 14) Beim Germanium wird eine Schwellenenergie von15,2 MeV für das Auftreten der anormalen Rutherford-Streuung von α-Teilchen gemessen. Welcher Kernradius ergibt sich daraus? ?

Aufgabe 15) Berechnen Sie die De-Broglie-Wellenlänge λ eines Elektrons als Funktion seiner kinetischen Energie E_k im relativistischen Bereich! Welche Näherungsformeln ergeben sich für $\lambda(E_k)$ als Ergebnis für $E_k << m_e c^2$ und für $E_k >> m_e c^2$?

Hinweis: Gehen Sie bei der Lösung von der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung $E = c\sqrt{(mc)^2 + p^2}$ mit $m_0 = m_e$ aus!

Aufgabe 16) In einem Transmissionselektronenmikroskop ist 100 keV ein typischer Wert für die kinetische Energie der Elektronen. Berechnen Sie die De-Broglie-Wellenlänge λ dieser Elektronen. Warum muss man relativistisch rechnen? Was ergäbe sich bei einer nichtrelativistischen Berechnung?

Aufgabe 17) Ein Ensemble von Na-Atomen mit der Teilchenzahldichte n werde auf die Temperatur T abgekühlt. Wie tief muss T werden, damit die De-Broglie-Wellenlänge λ der Na-Atome größer wird als der mittlere Abstand zwischen den Atomen? (Zahlenbeispiel: $n=10^{12}/cm^3$). Sind die Atome dann noch unterscheidbar?

Aufgabe 18 : In dem nach ihnen benannten Experiment richteten Clinton Davisson und Lester Germer einen Strahl von Elektronen senkrecht auf die Oberfläche eines Nickel-Kristalls und
beobachteten die Beugung der Elektronen an der Oberfläche in Abhängigkeit vom Winkel.

a) Wie groß ist die Wellenlänge der Elektronen, wenn sie durch die Spannung U_B = 54 V beschleunigt werden?
b) Unter welchen Winkeln gegenüber der Senkrechten treten allgemein Intensitätsmaxima in der beobachteten Beugung auf?
c) Welcher Wert ergibt sich für die Gitterkonstante des Nickel-Kristalls, wenn bei der angegebenen Beschleunigungsspannung ein 1. Beugungsmaximum bei $\Phi = 50^\circ$ auftritt?
d) Viele bedeutende Entdeckungen geschehen mehr oder minder durch Zufall. Was wäre passiert, wenn Davisson und Germer die Beschleunigungsspannung $U_B < 30$ V gewählt hätten?

Aufgabe 19) Berechnen Sie die Wellenlängen des Wasserstoffspektrums im sichtbaren Spektralbereich (380 nm bis 780 nm)!

Aufgabe 20) Berechnen Sie nach dem Bohrschen Atommodell die Bindungsenergie im Wasserstoffatom, bei dem sich das Elektron auf der Bahn n=1000 befindet. Wie groß ist der Radius dieser Bahn?

Aufgabe 21) Um welchen Faktor wächst der Radius der Bohr'schen Bahn, wenn dem H-Atom vom Grundzustand aus die Energie

a) 12.09 eV
b) 13.387 eV
c)

Zugeführt wird?

Aufgabe 22) Welche Temperatur müsste atomares Wasserstoffgas besitzen, damit seine mittlere thermische Energie ausreicht, um ein Elektron aus dem Grundzustand in den ersten angeregten Zustande anzuregen?

Aufgabe 23) Berechnen Sie die Energien für die ersten beiden Bohrschen Bahnen im Positronium! Wie groß ist die Wellenlänge des Photons, das bei einem Übergang von n=2 nach n=1 emittiert wird? Hinweise: Das Positronium ist ein gebundenes System aus einem Elektron und einem Positron. Beide haben dieselbe Masse aber entgegengesetzte Ladung. Das Positronium ist also vergleichbar mit dem Wasserstoffatom, nur dass das schwere Proton durch ein leichteres Positron ersetzt wurde.

Aufgabe 24) Bestimmen Sie die Wellenlänge der Lyman-α-Linie für Tritiumatome und für das Positronium.

Aufgabe 25) Welche Energie E und welche Wellenlänge λ haben die langwelligste und kurzwelligste Linie des He^+ - Spektrums, die beim Übergang zum Grundzustand auftreten können?

Aufgabe 26) Berechnen Sie (relativistisch) mit Hilfe der Heisenbergschen Unschärferelation $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$ die kinetische Energie, die ein Elektron hätte, wenn es sich ausschließlich in einem ${}^{40}_{20}Ca$ - Atomkern (Radius: $3.5 \cdot 10^{-15}$ m) aufhielte. Kann das Elektron durch die Coulomb-Wechselwirkung mit der Kernladung (Z=20) im Kern festgehalten werden?

Bestimmen sie durch analoge Rechnungen die kinetische Energie eines Elektron in der Atomhülle im Wasserstoff (Radius: $0.5 \cdot 10^{-10}$ m). Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der Bindungsenergie des Grundzustands des Wasserstoffatoms.

Aufgabe 27) Ein Teilchen befindet sich in einem Kastenpotential mit unendlich hohen Wänden. Die Wände befinden sich bei $-x_0$ und x_0. Berechnen Sie die Eigenwerte E_n der Energie und die zugehörige Wellenfunktion $\Psi_n(x)$!

Hinweis: $\int \cos^2(x)dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x) \cdot \cos(x)) + C$

Aufgabe 28) Ein Elektron befindet sich in einem Kastenpotential mit unendlichen hohen Wänden, dessen halbe Breite x_0 gleich dem Bohrschen Wasserstoffradius r_0 ist. Welche Wellenlänge hat ein Lichtquant, das beim Übergang des Elektrons vom ersten angeregten Zustand in den Grundzustand emittiert wird?

$r_0 = 0{,}5292 \cdot 10^{-10}$ m

Aufgabe 29) Ein harmonischer Oszillator (Teilchenmasse m, Eigenfrequenz ω_0) hat das Potential: $E_p(x) = \frac{1}{2} m \varpi_0^2 x^2$.

a) Die Funktion $\Psi_n(x) = A \cdot x \cdot e^{-\alpha \cdot x^2}$ ist eine Lösung der Schrödinger-Gleichung. Welchen Wert muß α haben?
b) Welcher Energieeigenwert E_n gehört zu dieser Wellenfunktion?
c) Welchem Energieniveau n entspricht diese Energie?
d) Stellen sie die Wahrscheinlichkeitsdichte w(x) für diese Wellenfunktion dar!

Hinweis: $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

Aufgabe 30)

a) Welche Schwingungsamplitude x_0 hätte ein klassischer harmonischer Oszillator der Masse m, dessen Schwingungsenergie gleich der Energie $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$ des quantenmechanischen Grundzustandes ist?
b) Welche Wahrscheinlichkeitsdichte $w_1(x)$ für den Aufenthalt an einer Stelle x hat der klassische harmonische Oszillator?
c) Stellen Sie $w_1(x)$ zusammen mit der quantenmechanischen Aufenthaltswahrscheinlichkeit $w_0(x) = \frac{1}{x_0\sqrt{\pi}} e^{-(\frac{x}{x_0})^2}$ in einem Diagramm dar!

Hinweis:

Die klassische Funktion $w_1(x)$ ergibt sich aus der Vorschrift: $w_1(x) \propto \frac{1}{|v_x|}$ und

$\int_{-\infty}^{+\infty} w_1(x)\, dx = 1$.

Weiterhin wird benötigt: $\int \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = \arcsin(\frac{x}{x_0}) + C$

Aufgabe 31) Ein Elektron mit der Masse m = $9.15 \cdot 10^{-31}$ kg mit der kinetischen Energie E befindet sich in einem rechteckigen Potentialtopf der Tiefe $E_0 = 2 \cdot E = 1$ eV und der Breite a. Wie groß ist die Eindringtiefe δx des Teilchens in die Potentialbereiche x<0 und x>a, bei der die Aufenthaltswahrscheinlichkeit W(x) für x = a+ δx bzw. x = - δx auf 1/e des maximalen Wertes am Rand des Topfes gesunken ist?

Aufgabe 32) Beim Alpha-Zerfall eines Atomkernes wird ein α - Teilchen aus einem Atomkern emittiert. Zur Beschreibung dieses radioaktiven Zerfalls soll folgendes Modell zum Einsatz kommen:

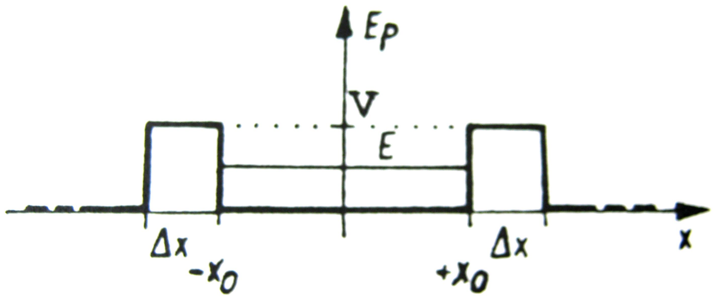
Ein α - Teilchen (Masse m_α) ist bei der Energie E in einem Potentialtopf mit den Wänden endlicher Dicke quasistationär gebunden (Modell des Atomkerns). Betrachten sie das System näherungsweise so, als wenn sich das α - Teilchen im Topf als eine ebene Welle darstellen läst, die an den Potentialtopfwänden reflektiert wird und zum Teil rechts und links durch die Wand tunnelt.

$m_\alpha = 6{,}643 \cdot 10^{-27}$ kg

$x_0 = 7{,}30 \cdot 10^{-15}$ m

$\Delta x = 15{,}47 \cdot 10^{-15}$ m

E = 4,78 MeV V = 33,9 MeV



a) Skizzieren sie den prinzipiellen Verlauf der Wellenfunktion für dieses Modell.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Schrödingergleichung das Verhältnis der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten des Teilchens zwischen Außenwand und Innenwand des Topfes näherungsweise aus dem exponentiellen Abfall der Wellenfunktion im Bereich der Wand.

c) Verwenden Sie das Ergebnis aus Aufgabe b) als Wahrscheinlichkeit P_T für das Tunnel des Teilchens bei einem Aufprall auf die Wand. Wie häufig muss das Teilchen gegen diese Wand prallen, bis es im Durchschnitt einmal durch die Wand tunnelt?

d) Schätzen sie mit Hilfe des Ergebnisses aus Aufgabe c) die durchschnittliche Lebensdauer τ_0 des „Atomkerns“ ab. Hinweis: Die Zeit, die zwischen zwei aufeinander folgenden Wandstößen des α- Teilchens vergeht, ist klassisch zu berechnen.

Aufgabe 33) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hält sich das Elektron im Grundzustand des Wasserstoffatoms im Proton (Radius r_p = 0.895 fm) auf? Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, das sich das Elektron im Grundzustand eines wasserstoffähnlichen Uranions im ^{238}U-Kern (Radius r_u = 5.86fm) aufhält?

Hinweise: Verwenden sie in beiden Fällen die nichtrelativistische Wellenfunktion. Es kann weiterhin davon ausgegangen werden, dass innerhalb des kleinen Kernradius die Wellenfunktion als nahezu konstant angesehen werden kann.

$$\psi_{1,0,0}(r) = \frac{(Z)^{3/2}}{\sqrt{\pi}(a_0)^{3/2}} \cdot e^{-r \cdot Z / a_0}$$

Aufgabe 34) Betrachten Sie ein Wasserstoffatom im Grundzustand. Wo ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Aufenthalt des Elektrons am größten? (In welchem Abstand vom Kern hält sich das Elektron am wahrscheinlichsten auf?)

Hinweis: Die 1*s*-Wellenfunktion des Wasserstoffatoms lautet:

$$\psi_{1,0,0}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(a_0)^{3/2}} \cdot e^{-r/a_0}$$

Aufgabe 35) Berechnen Sie den Erwartungswert (Mittelwert) $\overline{|\vec{r}|}$ für den 1*s* – Zustand im Wasserstoffatom!

Hinweis: Die 1*s*-Wellenfunktion des Wasserstoffatoms lautet:

$$\psi_{1,0,0}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(a_0)^{3/2}} \cdot e^{-r/a_0}$$

Und es gilt: $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-\lambda x} dx = n! \cdot \lambda^{-(n+1)}$

Aufgabe 36) Zeigen Sie, dass für die Komponenten des quantenmechanischen Bahndreh-impulsoperators

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix}$$

die folgende Vertauschungsrelation gilt:

$$[L_x, L_y] = L_x L_y - L_y L_x = i\hbar L_z$$

Hinweise: Für den Drehimpuls gilt: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Dies lässt sich als Determinante schreiben:

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

Die quantenmechanische Formulierung erhält man durch Übergänge zu Operatoren:

$$\begin{aligned} \vec{r} &\rightarrow \vec{r} \\ \vec{p} &\rightarrow -i\hbar\vec{\nabla} \\ \vec{r} \times \vec{p} &\rightarrow -i\hbar\vec{r} \times \vec{\nabla} \end{aligned}$$
