

# Praktikumsversuch

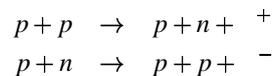
## Lebensdauer von Myonen

jeweils freitags 8.00 Uhr, Andreas-Schubert-Bau E20 (Erdgeschoss) bzw. O15a (Keller)

Myonen ( $\mu$ -Leptonen) aus der Höhenstrahlung werden in einem Kupfer- oder Szintillatorblock gestoppt. Mit Hilfe von Plastiksintillatoren und elektronisch gemessenen verzögerten Koinzidenzen wird für die gestoppten Teilchen das Zerfallsgesetz und die mittlere Lebensdauer  $\mu$  bestimmt.

### 1 Myonen aus der Höhenstrahlung

Der Praktikumsversuch untersucht Myonen aus der Höhenstrahlung. Die primäre Höhenstrahlung besteht zu 85% aus hochenergetischen Protonen (mit Energien bis zu  $10^{11}$  GeV). Bei Zusammenstößen dieser Protonen mit Atomkernen der Erdatmosphäre entstehen u. a. geladene Pionen. Die einfachsten Reaktionen sind:



Die geladenen Pionen zerfallen zu 100% über die schwache Wechselwirkung (Abb. 1) mit einer mittleren Lebensdauer von  $2,60 \cdot 10^{-8}$  s in ein Myon und ein Neutrino:

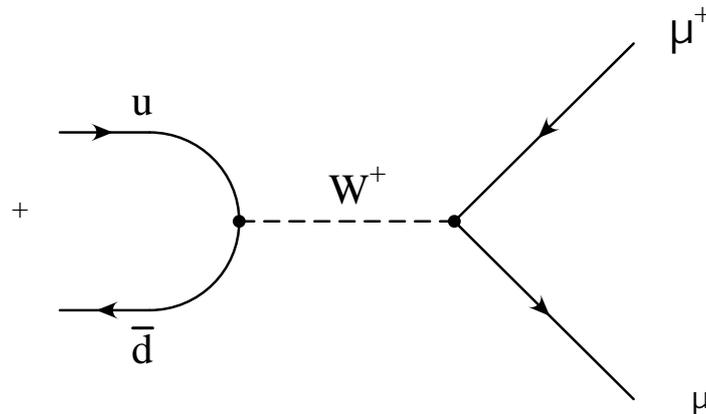
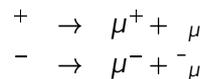


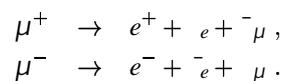
Abbildung 1: Feynman-Diagramm des  $\pi^+$ -Zerfalls

Der positive Ladungsüberschuss der primären Höhenstrahlung spiegelt sich im  $\mu^+/\mu^-$ -Verhältnis wieder, welches 1,25 bis 1,3 beträgt.

Das positiv (negativ) geladene Myon zerfällt mit einer mittleren Lebensdauer von

$$\mu = (2,19703 \pm 0.00004) \cdot 10^{-6} \text{s}$$

in zwei Neutrinos und ein Positron (Elektron)



Aus dieser Lebensdauer lässt sich gemäss

$$G_{\mu}^{-1} = G_F^2 \cdot \frac{m_{\mu}^5}{192 \cdot 3}$$

die Kopplungskonstante  $G_F$  der schwachen Wechselwirkung bestimmen.  
Das Zerfallsgesetz ist exponentiell und lautet

$$N(t) = N(t_0)e^{-(t-t_0)/\tau}$$

Myonen werden in ca. 10 km Höhe erzeugt. Auf Grund ihrer hohen Energie bewegen sie sich relativistisch und erreichen somit die Erdoberfläche. Die auf der Erdoberfläche ankommende Höhenstrahlung besteht zu über 70% aus Myonen. Der Fluss der Myonen auf Meereshöhe beträgt ca.  $170 \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}$ . Die im Praktikumsversuch eingesetzten Stoppblöcke haben eine Fläche von  $0,6 \text{ m} \times 0,36 \text{ m}$  im Aufbau 1 und  $0,1 \text{ m} \times 2,0 \text{ m}$  im Aufbau 2. Damit erwartet man eine Myonen-Zählrate von etwa  $35 \text{ s}^{-1}$  in beiden Aufbauten.

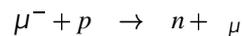
Die Energieverteilung der Myonen hat ihr Maximum bei ca. 2 GeV.

Das Zerfallsspektrum in Abhängigkeit von der Zeit läßt sich bestimmen, indem man Myonen aus der Höhenstrahlung in einem Material stoppt und die Zeit zwischen Eintritt des Myons in den Stopper und Emission des Zerfallselektrons bzw. Positrons mißt.

Weitergehende Erläuterungen zum Myon-Zerfall sowie Einführungen in die Teilchenphysik sind in [1]-[6] zu finden.

## Der $\mu^-$ -Einfang

Ein in Materie zur Ruhe kommendes negatives Myon wird vom elektromagnetischen Feld eines Atoms eingefangen und erreicht in weniger als  $10^{-12} \text{ s}$  den Grundzustand des Atoms (K-Schale). Die Wellenfunktion des Myons überlappt mit der des Kernes, so dass das Myon durch den Kern absorbiert werden kann. Der Einfang des negativen Myons



tritt in diesem Fall mit dem freien Zerfall in Konkurrenz. Durch den  $\mu^-$ -Einfang verkürzt sich die effektive Lebensdauer der  $\mu^-$ . Sie ergibt sich zu:

$$\frac{1}{\tau_{\text{eff}}} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_{\text{Einfang}}} \quad (1)$$

wobei  $\tau_{\text{Einfang}}$  die Lebensdauer beim  $\mu^-$ -Einfang ist. Da die Myonen der Höhenstrahlung aus einem Gemisch von positiven und negativen Myonen bestehen, erwartet man folgendes Zeitverhalten für die Anzahl der zerfallenen Myonen:

$$N(t) = N(\mu^-, t_0)e^{-(t-t_0)/\tau_{\text{eff}}} + N(\mu^+, t_0)e^{-(t-t_0)/\tau_0}, \quad (2)$$

denn die positiven Myonen erleiden keinen Einfang.

Kern bzw. Material	mittl. Lebensdauer $\mu^-$ [ $\mu\text{s}$ ]
Szintillator	$\approx 2,1 \pm 0,1$
Al	$0,865 \pm 0,004$
Cu	$0,1636 \pm 0,0008$
Pb	$0,0746 \pm 0,0006$

Tabelle 1: Effektive Lebenszeiten von  $\mu^-$  für einige Materialien

In Tabelle 1 sind die Werte der effektiven Lebensdauer von  $\mu^-$  in einigen ausgewählten Materialien wiedergegeben. Als Stopper stehen im Praktikumsversuch Kupfer und Szintillatormaterial zur Verfügung. Für das Zeitspektrum mit einer Zeit  $> 1 \mu\text{s}$  ist der Anteil der  $\mu^-$ -Zerfälle in Kupfer vernachlässigbar. Danach misst man nur noch  $\mu^+$ -Zerfälle. Im Szintillator-Stopper liegen die Zeitverteilungen von  $\mu^+$ - und  $\mu^-$ -Zerfällen so dicht beieinander, dass im Praktikumsversuch der Mittelwert beider Lebensdauern ermittelt wird.

## Verständnisfragen I

1. Welche Elementarteilchen gibt es? Wo ordnet man das Myon ein?
2. Welche Kräfte beschreiben die Wechselwirkung der Elementarteilchen?
3. Welche Erhaltungsgrößen gibt es? Warum hat man diese eingeführt?
4. Welche fundamentalen Kopplungskonstanten gibt es?
5. Welche Gleichung beschreibt den Energieverlust von Myonen in Materie?
6. Wie kann man Myonen nachweisen?
7. Wie ist die Myon-Lebensdauer definiert?
8. Warum müssen die Myonen in diesem Versuch gestoppt werden?
9. Warum zerfallen positive Myonen in Materie mit der gleichen Lebensdauer wie freie Myonen?
10. Warum sind die mittleren Lebendauern freier  $\mu^+$  und  $\mu^-$  gleich?

## 2 Messprinzip und Messaufbau 1

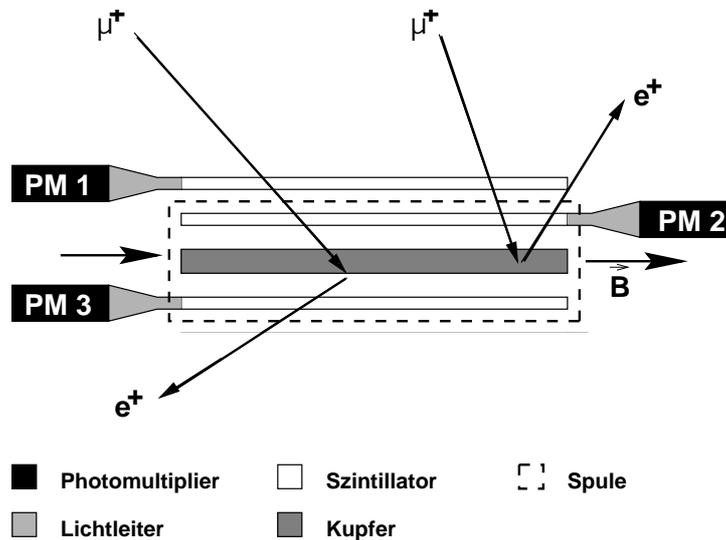


Abbildung 2: Prinzip-Skizze des Versuches

Der Versuchsaufbau besteht aus zwei Kupferplatten der Dicke 1 cm sowie zwei Szintillatoren oberhalb und einem unterhalb der Kupferplatten (im Folgenden werden die Signale und die Spektren, die von den beiden oberen Szintillatoren registriert werden, mit 'oben' und die vom unteren Szintillator registrierten Signale/Spektren mit 'unten' gekennzeichnet).

Ein im Kupfer-Target gestopptes Myon ist durch das Signal  $1\bar{2}\bar{3}$  gekennzeichnet, d.h. Detektor 1 und 2 sprechen an, nicht jedoch Detektor 3. Dies wird als Startsignal zur Zeitmessung in einem TDC (Time-to-Digital-Converter) genommen.

Als Stoppsignal für den TDC wird das Signal  $2\bar{3}$  für das nach oben emittierte Positron und  $\bar{2}3$  für das nach unten emittierte Positron benutzt, siehe Abb. 2.

Mit dem Startsignal im TDC wird ein Zeitfenster von  $10 \mu\text{s}$  geöffnet, innerhalb dessen die Stoppsignale eintreffen müssen. Dadurch werden auch zufällige Koinzidenzen (z.B. durch den niederenergetischen Anteil der Höhenstrahlung, wie Elektronen) erheblich verringert.

Die Signale der Photomultiplier werden mittels Diskriminator in einheitlich geformte Signale mit einer Ausgangsbreite

Signal	Rate [ $s^{-1}$ ]
1, 2, 3, 4	65...85
12, 34	20...25
$2\bar{3}$ , $\bar{2}3$	40...70
$12\bar{3}$	2...3

Tabelle 2: Typische Raten im Experimentieraufbau 1

von 40 ns umgewandelt. Außerdem unterdrückt der Diskriminator Signale mit geringem Signalpegel  $> -100$  mV (z.B. Rauschen).

Die Koinzidenzeinheit liefert die benötigten Koinzidenzsignale. Der TDC setzt das Zeitfenster und wandelt die Zeit zwischen Start- und Stoppsignal in ein digitales Signal um. Die Ereignisse werden vom PC ausgelesen und gespeichert. Für die Auswertung steht ein oberes und ein unteres Zeitspektrum mit je 256 Kanälen zur Verfügung. Die Breite eines Kanals ist  $1 \mu s/24,000$ .

Die Einstellung der PM's muss am Praktikumstag optimiert werden. Weitere Details des Versuchsaufbaus finden sich in [7].

Die Datenaufnahme und Auswertung erfolgt mit einem Programm des Programm-Paketes LabView. Typische Zählraten für die Detektoranordnung sind in Tabelle 2 aufgeführt.

Zerfallene positive Myonen werden in der Größenordnung  $1 \text{ min}^{-1}$  im oberen Spektrum und  $0,5 \text{ min}^{-1}$  im unteren Spektrum nachgewiesen.

### Verständnisfragen II

1. Wie funktioniert ein Szintillator?
2. Wie funktioniert ein PM? Was passiert, wenn die Hochspannung erhöht wird?
3. Was macht der Diskriminator?
4. Was bedeutet Koinzidenz?
5. Wieviel Energie verliert ein Myon typischerweise im Szintillator?
6. Warum ist eine genaue Einstellung der Photomultiplier für die Lebensdauermessung wichtig?

## 3 Messaufbau 2

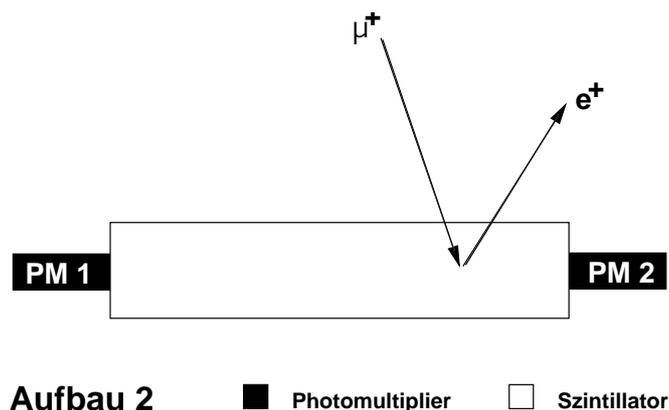


Abbildung 3: Prinzip-Skizze des Aufbaus 2

Der Aufbau besteht aus einem Block von Plastikszintillatoren mit der Gesamtgröße  $2,0 \times 0,1 \times 0,1 \text{ m}^3$  (Material NE

110 der Firma Nuclear Enterprise, hergestellt 1981, zu diesem Block umgebaut 2005). An beiden Enden ist je ein Photomultiplier angebracht, mit nur je einem Pad aus weichem Plastikmaterial (ca. 10 mm dick) als Lichtleiter. Die Ausgangssignale der Multiplier werden auf je einen Diskriminator mit der einstellbaren Schwelle der Größenordnung 100 mV geschickt. Die resultierenden Signale 1 und 2 werden in eine Koinzidenzeinheit geschickt. Das Koinzidenzsignal  $1 \cdot 2$  zeigt an, dass ein Teilchen der Höhenstrahlung durchgeflogen ist oder gestoppt wurde oder dass ein Teilchen der Umwelt-Radioaktivität gestoppt wurde. Alle Koinzidenzen  $1 \cdot 2$  werden als Startsignal eines TDC mit 256 Kanälen der Kanalbreite  $1/(24,000 \text{ MHz})$  geschickt. Zerfällt ein gestopptes Myon innerhalb von  $10 \mu\text{s}$  im Szintillatorblock, gibt das Zerfallselektron mit großer Wahrscheinlichkeit ein Lichtsignal, das wieder über beide Photomultiplier zur Koinzidenz  $(1 \cdot 2)_{\text{verz}}$  führt, deren Signal als Stopp des TDC verwendet wird (verz = verzögert). Die Gesamtheit der verzögerten Koinzidenzen führt zum Lebensdauerspektrum der positiven und negativen Myonen.

## 4 Bestimmung der Lebensdauer - Einführung zu statistischen Methoden

Die einfachste Methode, ein exponentielles Zerfallsgesetz auszuwerten, wäre das logarithmische Auftragen der Messwerte und das Zeichnen einer Ausgleichsgeraden. Statistische Methoden liefern zusätzlich eine Aussage über die Fehler des bestimmten Ergebnisses und sind i.A. verlässlicher als „Papier und Bleistift“. In der aktuellen Forschung auf dem Gebiet der Teilchenphysik sind die im Folgenden beschriebenen Methoden unerlässlich, somit soll hier ein erster Einblick gewährt werden.

### 4.1 Die Maximum-Likelihood-Methode

Das Maximum-Likelihood-Prinzip ist eine Schätzmethode, die dazu dient, aus gemessenen Daten  $\{x_1, \dots, x_n\}$  eine unbekannte Größe  $a$  (hier die Lebensdauer der Myonen) abzuschätzen. Dazu muss die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung  $P(\vec{x}|a)$  der Messwerte in Abhängigkeit der gesuchten Größe  $a$  bekannt sein. Die Likelihood-Funktion  $L(a|x_1, \dots, x_N)$  ist dann das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten der Messwerte:

$$L(a|x_1, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N P(x_i|a) \quad (3)$$

Die Funktion  $L(a)$  ist für gegebene Messwerte  $x_i$  eine Funktion des gesuchten Parameters  $a$  und gibt die Wahrscheinlichkeit an (a-posteriori-Wahrscheinlichkeit), bei einer gegebenen Wahl des Parameters  $a$  gerade diese Messwerte zu erhalten. Die beste Schätzung von  $a$  ist derjenige Wert  $\hat{a}$ , welcher  $L(a)$  zu einem Maximum macht, d. h. welcher die Wahrscheinlichkeit maximiert, gerade den beobachteten Satz von  $x_i$ -Werten zu erhalten. In der Praxis ist es einfacher, den Logarithmus von  $L$  zu maximieren. Dies führt zu der Gleichung:

$$\left. \frac{d \ln L}{d a} \right|_{a=\hat{a}} = 0 \quad (4)$$

#### 4.1.1 Anwendung der Max-Log-Likelihood-Methode auf das exponentielle Zerfallsgesetz

Gehorcht ein Prozess dem exponentiellen Zerfallsgesetz, beträgt die Wahrscheinlichkeitsdichte, in Abhängigkeit der mittleren Lebensdauer  $\tau$  eine Zerfallszeit  $t_i$  zu messen

$$P(t_i | \tau) = \frac{1}{\tau} e^{-t_i/\tau} \quad (5)$$

(das Integral über alle möglichen Zerfallszeiten von 0 bis  $\infty$  ergibt gerade 1). Diese Wahrscheinlichkeitsdichte ist richtig für beliebige („ungebinnte“) Messwerte der Zeit (Unterschied zu Methode 2 und 3). Die folgenden Gleichungen beziehen sich also auf  $N$  unabhängige Messwerte  $t_i$  ( $i = 1 \dots N$ ). Daraus soll die mittlere Lebensdauer  $\tau$  bestimmt werden. Die logarithmische Likelihood Funktion beträgt:

$$\begin{aligned} \ln L &= \ln \left( \prod_{i=1}^N \left( \frac{1}{\tau} e^{-t_i/\tau} \right) \right) = \sum_{i=1}^N \ln \left( \frac{1}{\tau} e^{-t_i/\tau} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \left( -\frac{t_i}{\tau} - \ln \tau \right) \end{aligned}$$

Differentiation und Null-Setzen ergibt:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d \ln L}{d \hat{\tau}} \right|_{\hat{\tau}} &= \left( \frac{t_i}{\hat{\tau}^2} - \frac{1}{\hat{\tau}} \right) \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \hat{\tau} &= \frac{1}{N} \sum t_i \end{aligned} \quad (6)$$

Der beste Schätzwert für die Lebensdauer ist also gerade der Mittelwert aus allen gemessenen Zeiten.

Kann man die Zerfallszeiten nur bis zu einer Zeit  $T$  beobachten, so muss die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion entsprechend modifiziert werden (um eine Normierung auf 1 zu erreichen):

$$P(t_i | T) = \frac{1}{N} e^{-t_i} \frac{1}{1 - e^{-T}} \quad (7)$$

Daraus ergibt sich der Logarithmus der Likelihood Funktion zu:

$$\ln L = \sum \left( -\frac{t_i}{\hat{\tau}} - \ln(1 - e^{-T/\hat{\tau}}) \right)$$

Durch Differentiation und Null-Setzen erhält man für  $\hat{\tau}$ :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d \ln L}{d \hat{\tau}} \right|_{\hat{\tau}} &= \left( \frac{t_i}{\hat{\tau}^2} - \frac{1}{\hat{\tau}} + \frac{1}{\hat{\tau}^2} \frac{T e^{-T/\hat{\tau}}}{1 - e^{-T/\hat{\tau}}} \right) \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \hat{\tau} &= \frac{1}{N} \sum t_i + \frac{1}{N} \sum \frac{T e^{-T/\hat{\tau}}}{1 - e^{-T/\hat{\tau}}} \\ \hat{\tau} &= \frac{1}{N} \sum t_i + \frac{T e^{-T/\hat{\tau}}}{1 - e^{-T/\hat{\tau}}} \end{aligned} \quad (8)$$

Die transzendente Gleichung für  $\hat{\tau}$  kann nur numerisch, bzw. graphisch gelöst werden, was mit heutigen Rechenmethoden kein Problem ist.

Im Praktikumsversuch muss bekannt sein, was die mittlere Zerfallszeit in jedem Kanal ist (die Kanalmitte ist eine gute Näherung) und wieviele Kanäle für die Mittelwertbildung genommen werden. Nimmt man z. B. die Kanäle 19 bis 118, d. h. 100 Kanäle, ist  $T = 4,167 \mu\text{s}$ . Mit diesem Wert für  $T$  muss  $\hat{\tau}$  nach obiger Gleichung aus  $\sum t_i / N$  ermittelt werden.

In dieser Methode werden statt  $N$  unterschiedlicher Zeiten  $N_i$  Ereignisse in Kanal  $i$  mit einer Zeit  $t_i$  registriert. Jeder Messwert hat den statistischen Fehler  $\sqrt{N_i}$ . Bei  $K$  Kanälen ergibt sich mit der Gesamtanzahl  $N = \sum N_i$  für  $\hat{\tau}$  und den Fehler (aus Fehlerfortpflanzung):

$$\hat{\tau} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^K N_k \cdot t_k + \text{Korrekturterm} \quad (9)$$

$$\Delta \hat{\tau} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum N_k \cdot t_k^2} \quad (10)$$

#### 4.1.2 Anwendung der Max-Log-Likelihood-Methode auf eine Poissonverteilung

Die Wahrscheinlichkeit bei einem mittleren Erwartungswert  $f$ ,  $N \neq f$  Ereignisse zu beobachten, wird durch die Poissonverteilung beschrieben. Erwartet man bei einem festen  $f$  also  $f_i$  Einträge in Zeitkanal  $i$ , so bestimmt die folgende Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung die Wahrscheinlichkeit, tatsächlich  $N_i$  Einträge gemessen zu haben. Die Verteilung ist

$$P(N_i | f_i) = \frac{f_i^{N_i} \cdot e^{-f_i}}{N_i!} \quad (11)$$

Die Standardbreite der Poissonverteilung für die beobachteten  $N_i$  um ihren Mittelwert  $f_i$  herum beträgt

$$\Delta N_i = \sqrt{f_i} \quad (12)$$

Im Gegensatz zur ersten Methode betrachten wir jetzt Bins von Zeiten  $(t_i, t_i + \Delta t)$ . Gebraucht wird die Wahrscheinlichkeit, in einem bestimmten Kanal  $i$   $N_i$  Ereignisse zu messen. Diese Wahrscheinlichkeit wird mit einer Poissonverteilung um einen Erwartungswert  $f_i$  angenommen. Dieser Erwartungswert hängt von Lage und Breite des betrachteten Kanals ab  $(t_i, \Delta t)$ , sowie von dem gewählten Parameter  $N_0$  und der Normierung  $N_0$  der Exponentialfunktion  $f = \frac{N_0}{\Delta t} \cdot e^{-t/\Delta t}$ . Der Erwartungswert  $f_i$  ist eine Funktion dieser vier Parameter,  $f_i = f_i(t_i, \Delta t, N_0)$ . Mit  $N$  Ereignissen in insgesamt  $K$  Bins im Histogramm gilt:

$$f_i(t_i, \Delta t, N_0) = \int_{t=t_i}^{t_i+\Delta t} \frac{N_0}{\Delta t} e^{-t/\Delta t} dt \approx \frac{N_0}{\Delta t} \cdot e^{-(t_i+\Delta t/2)/\Delta t} \cdot \Delta t \quad (13)$$

$$N_0 = N_0(\Delta t) = \frac{N}{e^{-t_1/\Delta t} - e^{-(t_K+\Delta t)/\Delta t}} \quad (14)$$

$$\text{herzuleiten aus } N = \sum_{i=1}^K N_i = \int_{t=t_1}^{t_K+\Delta t} \frac{N_0}{\Delta t} e^{-t/\Delta t} dt \quad (15)$$

$$(16)$$

Damit gilt für die Wahrscheinlichkeit, im Kanal  $i$   $N_i$  Einträge zu messen:

$$P(N_i | f_i) = \frac{f_i^{N_i} e^{-f_i}}{N_i!} \quad (17)$$

$$(18)$$

Der beste Schätzwert  $\hat{f}_i$  für die gemessenen Daten ist gesucht. Dazu wird das Maximum der Likelihood-Funktion

$$L(\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_K) = \prod_{i=1}^K P(N_i | \hat{f}_i) \quad (19)$$

in Abhängigkeit von  $\hat{f}_i$  gesucht. Dies entspricht der Bestimmung des Minimums von  $-2 \ln L$ . Da dies analytisch nicht lösbar ist, wird  $-2 \ln L$  über  $\hat{f}_i$  aufgetragen. Im Minimum von  $-2 \ln L$  findet man den gesuchten Schätzwert  $\hat{f}_i$ . Der Fehler des Schätzwertes, d.h. die Standardabweichung  $\Delta \hat{f}_i$  lässt sich ebenfalls aus der Graphik ablesen: Bei einer Abweichung von  $\Delta \hat{f}_i$  vom Schätzwert hat  $-2 \ln L$  gegenüber dem Minimum um eine Einheit zugenommen [8, 9].

Der Wert von  $-2 \ln L$  ergibt sich aus

$$-2 \ln L = -2 \sum_i N_i \ln f_i + 2 \sum_i f_i + 2 \sum_i \ln(N_i!) \quad (20)$$

$$= -2 \sum_i N_i \ln f_i + 2N + 2 \sum_i \ln(N_i!) \quad (21)$$

Der Term  $2N + 2 \sum_i \ln(N_i!)$  hängt nicht von  $\hat{f}_i$  ab. Für die Bestimmung von  $\hat{f}_i$  ist es deshalb ausreichend, den Term

$$2 \sum_i (-N_i \ln f_i) \quad (22)$$

über  $\hat{f}_i$  aufzutragen. Dabei ist zu beachten, dass das  $N_0$  der Funktion  $f_i$  von  $\hat{f}_i$  abhängt.

### 4.1.3 Anwendung der Max-Log-Likelihood-Methode auf eine Gaussverteilung

Die Gaussverteilung ergibt sich aus der Poissonverteilung für den Grenzfall großer Erwartungswerte  $f$ . Für eine gute Näherung sollte  $f > 10$  sein. Das heißt in unserem Fall, dass die Erwartungswerte der einzelnen Kanalhalte  $f_i > 10$  sein sollten (dazu sollten die Kanäle zusammengefasst werden). Angewandt auf den Praktikumsversuch ergibt sich für die Gaussverteilung:

$$P(N_i | f_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \frac{f_i}{\Delta t}} e^{-\frac{(N_i - f_i)^2}{2 \frac{f_i}{\Delta t}}} \quad (23)$$

wobei für  $f_i$  und  $N_0$  wie oben gilt:

$$f_i = f_i(t_i, t, N_0) = \int_{t=t_i}^{t_i+t} N_0 e^{-t'} dt \approx \frac{N_0}{2} \cdot e^{-(t_i+t/2)/\tau} \cdot t \quad (24)$$

$$N_0(t) = \frac{N}{e^{-t/\tau} - e^{-(t_k+t)/\tau}} \quad (25)$$

$$f_i = (f_i) = \sqrt{f_i} \approx \sqrt{N_i} \quad (26)$$

Zur Bestimmung des besten Schätzwertes  $\hat{\tau}$  geht man analog der Poissonverteilung vor:  
Das Maximum der Likelihood-Funktion

$$L(N_1, \dots, N_k) = \prod_{i=1}^k P(N_i | \tau) \quad (27)$$

ist zu bestimmen, was wiederum der Bestimmung des Minimums von  $-2 \ln L$  entspricht. Dies soll ebenfalls graphisch bestimmt werden.

$-2 \ln L$  ergibt sich zu:

$$-2 \ln L = \sum_i \ln \left( 2 \frac{f_i}{N_i} \right) + \sum_i \frac{(N_i - f_i)^2}{f_i} \quad (28)$$

Der Term  $\ln \left( 2 \frac{f_i}{N_i} \right)$  hängt in der Näherung in Gl. 26 nicht von  $\tau$  ab. Für die Bestimmung von  $\hat{\tau}$  ist es deshalb ausreichend, den Term

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(N_i - f_i)^2}{f_i} \quad (29)$$

über  $\tau$  aufzutragen. Die Bestimmung des Minimums von  $\chi^2$  in Abhängigkeit einer oder mehrerer gesuchter Variablen wird  $\chi^2$ -Methode bzw. Methode der kleinsten Quadrate genannt. Das  $\chi^2$  hat eine sehr anschauliche Bedeutung und in den meisten Statistik Büchern wird dieser Methode ein eigenes Kapitel gewidmet.

Weiterführende Literatur zu statistischen Methoden der Datenauswertung bieten [8] und [9].

### Verständnisfragen III

1. Was bedeutet Likelihood?
2. Was hat das  $\chi^2$  für eine anschauliche Bedeutung?
3. Was haben die  $\chi^2$ -Methode und die *Max-Likelihood-Methode* miteinander zu tun?
4. Warum trägt man  $-2 \ln L(\tau)$  auf?

## Literatur

- [1] B. Naroska,  
„Elementarteilchenphysik“,  
Vorlesungsskript, <http://www.desy.de/~naroska/univ/elem1.html>
- [2] B.R. Martin, G.Shaw,  
„Particle Physics“,  
John Wiley & Sons, 1992
- [3] D. Griffiths,  
„Einführung in die Elementarteilchenphysik“,  
Akademie Verlag, 1996

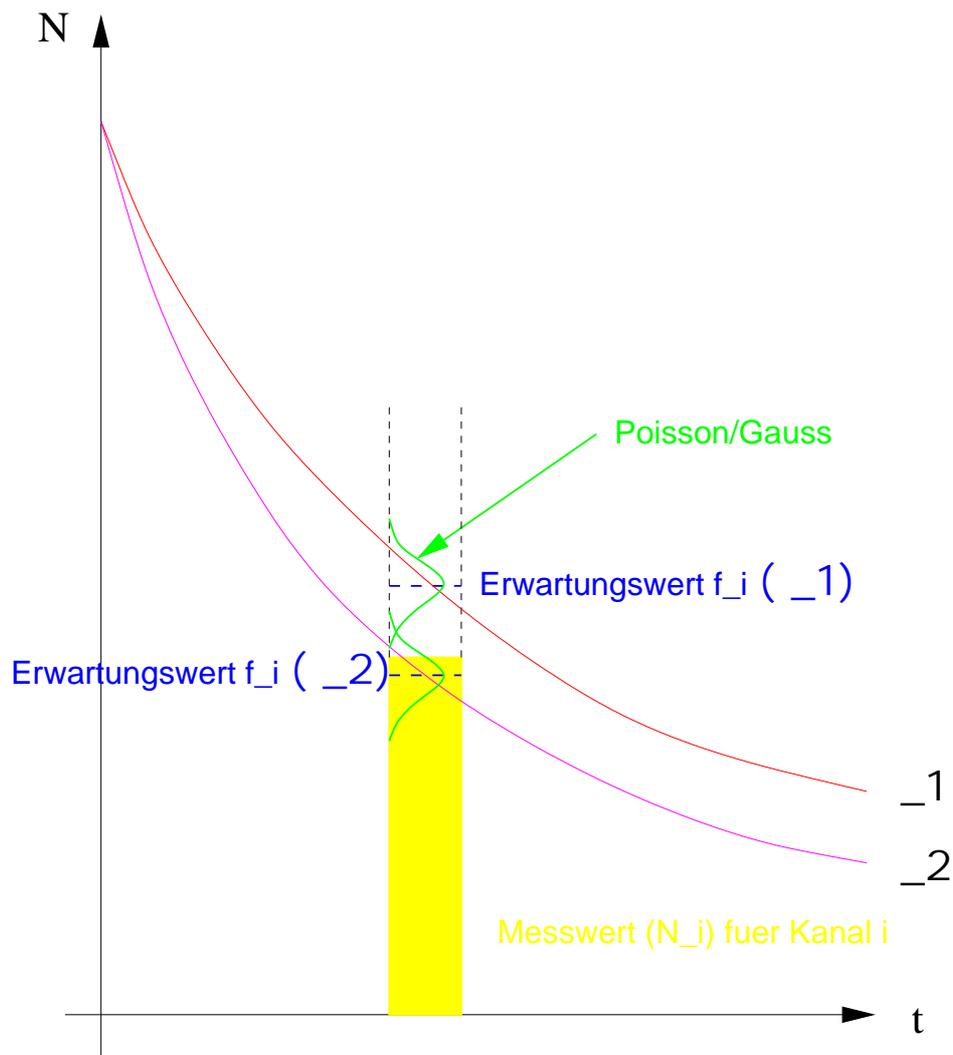


Abbildung 4: Prinzip-Skizze der Likelihood Methoden (Poisson/Gauss) exemplarisch für einen Zeitkanal und zwei unterschiedliche Lebensdauern

- [4] D. H. Perkins,  
„Hochenergiephysik“,  
Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1990, Kap. 7.8, S. 238ff
- [5] F. Halzen und A. D. Martin,  
„Quarks & Leptons“,  
John Wiley & Sons 1984, Kap. 12.5, S. 261ff
- [6] C. Berger,  
„Teilchenphysik“,  
Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992.
- [7] U. Hanisch,  
„Aufbau und Inbetriebnahme eines Praktikumsversuches zur Messung der Paritätsverletzung im Zerfall von Myonen aus der Höhenstrahlung“,  
Diplomarbeit, TU Dresden, IKTP, April 1995.
- [8] R. J. Barlow,  
„Statistics“,  
John Wiley & Sons 1989

- [9] S. Brandt,  
„*Statistical and Computational Methods in Data Analysis*“,  
North-Holland Publishing Company, fünfte Auflage, 1989.