

Landesgymnasium St. Afra, Meißen

# Simulation der Restdichte von supersymmetrischen Dark Matter Kandidaten

Besondere Lernleistung im Fach Physik

Autor: Sören Arlt

Abgabedatum: 20. Dezember 2012

Betreuer: Herr Andreas Röpke (SLG St. Afra),  
Frau Dr. Stöckinger-Kim (IKTP TU Dresden)

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Dunkle Materie</b>	<b>3</b>
2.1	Astronomische Beobachtungen . . . . .	3
2.2	Dark Matter Kandidaten . . . . .	5
2.2.1	MACHOs . . . . .	5
2.2.2	WIMPs . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Supersymmetrische WIMPs</b>	<b>6</b>
3.1	Supersymmetrie . . . . .	6
3.1.1	Standardmodell der Teilchenphysik . . . . .	7
3.1.2	Probleme des Standardmodells . . . . .	7
3.1.3	Supersymmetrische Erweiterungen . . . . .	8
3.1.4	Leichtestes supersymmetrisches Teilchen . . . . .	9
3.2	Experimentelle Suche . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Berechnung der Restdichte</b>	<b>10</b>
4.1	Theoretische Grundlagen . . . . .	10
4.1.1	Boltzmanngleichung . . . . .	10
4.2	Wirkungsquerschnitt $\sigma$ . . . . .	11
4.3	Numerische Auswertung . . . . .	12
4.3.1	Umformulierung der Boltzmanngleichung . . . . .	13
4.3.2	Freeze Out . . . . .	14
4.3.3	Runge Kutta Verfahren . . . . .	15
4.3.4	Implementation . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>16</b>
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>18</b>
<b>Anhang</b>		<b>20</b>
<b>7</b>	<b>Theoretische Zusätze</b>	<b>20</b>
7.1	Virialsatz . . . . .	20
7.2	Bestimmung der Masse einer Gravitationslinse . . . . .	21

7.3	Beispiele für mögliche und unmögliche Prozesse unter Erhaltung der R-Parität . . . . .	22
7.3.1	Feynman Diagramme . . . . .	22
7.3.2	Beispiele . . . . .	22
7.3.3	Mögliche Prozesse . . . . .	22
7.3.4	Unmögliche Prozesse . . . . .	25
7.4	Hubble Gesetz . . . . .	27
7.5	klassischer Wirkungsquerschnitt und mittlere Weglänge . . . . .	28
7.6	Quelltext . . . . .	29
<b>8</b>	<b>Abbildungen</b>	<b>32</b>

# 1 Einleitung

Diese Arbeit befasst sich mit der Berechnung der heutigen Restdichte supersymmetrischer WIMPs (Weakly interacting massive particles - schwere, schwach wechselwirkende Teilchen), die als Kandidat für Dunkle Materie gehandelt werden.

Aus der Astronomie weiß man, dass nur 4% der Energiedichte des Universums der Materie zugeordnet werden können, die vom Standardmodell der Teilchenphysik beschrieben wird. Hinweise darauf stammen aus Beobachtungen von Galaxienhaufen. Die Dunkle Materie, die man für weitere ca. 20% der Energiedichte verantwortlich macht, ist eines der größten kosmologischen Rätsel, die seit dem letzten Jahrhundert existieren. Man ist aber in der Lage, Aussagen über die Verteilung und Struktur Dunkler Materiesammlungen Aussagen zu machen (Sektion 2.1). Trotzdem steht eine Erklärung ihrer Bestandteile noch aus. Die restlichen 76% werden der Dunklen Energie zugeschrieben.

Die WIMPs, die in dieser Arbeit behandelt werden, sind die leichtesten Teilchen des minimalen supersymmetrischen Standardmodells der Teilchenphysik und sind stabile Zerfallsprodukte der schweren supersymmetrischen Teilchen. Hierfür steht die Abkürzung LSP (lightest supersymmetric particle). Ihre elektrische Ladung ist null. Sie koppeln deswegen nicht an Photonen und sind deswegen in astronomischer Ansammlung nicht direkt beobachtbar. Außerdem wird mit Majorana-Fermionen gerechnet, also Teilchen, die sich bei Aufeinandertreffen paarweise annihilieren. Genauere Beschreibung und experimentelle Befunde für diese Art von supersymmetrischem Teilchen ist von großer Wichtigkeit für die Theorie der Supersymmetrie, welche bei Bestätigung weitere Vorhersagen machen würde.

Durch Nutzung von statistischen Gleichungen (Boltzmann-Gleichung) ist es möglich, die zu erwartende Wechselwirkungsrate von Teilchen mit gegebenen Eigenschaften (Wirkungsquerschnitt, Masse) in einem System zu bestimmen. Sieht man das gesamte, sich ausdehnende, Universum nach dem Big Bang als ein solches System, so kann man auch unter gegebenen Anfangsbedingungen die Menge der Teilchen errechnen, die übrigbleibt, nachdem ihre annihilierenden Interaktionen durch die fortgeschrittene Ausdehnung zum Erliegen gekommen sind (Freeze Out). Den Grund für eine Auseinandersetzung mit eben dieser Thematik liefert das sogenannte 'WIMP-miracle'. Es besagt, dass die asymptotisch abnehmende Dichte dieser stabilen Teilchen, den bekannten Werten nach urteilend, nicht nur gleich, sondern gleichbedeutend mit derjenigen der 'Dunklen Materie' sein könnte. Davon ausgehend lassen sich Schlüsse auf das LSP bezüglich seiner Masse und seinem Kollisionsquerschnitt machen. Die Restdichte wird mit, in Wolframs Mathematica 8 programmierten, numerischen Verfahren kalkuliert, indem die Entwicklungsgleichung,

welche die erste Ableitung der Dichte in Form der Boltzmann-Gleichung der Thermodynamik angibt, als Anfangswertproblem behandelt wird. In dieser Arbeit stelle ich vor, wie Beobachtungen zur Annahme der Dunklen Materie führten und welche anderen Erklärungsversuche bestehen. Danach folgt eine Einführung in die Quantenfeldtheorie des Standardmodells und die Supersymmetrie, eine Hypothese, die über die Beobachtung in Teilchenbeschleunigern hinausgeht, aber konsistent versucht, Probleme des Standardmodells zu lösen. Danach werden die theoretischen Grundlagen und die Methode der Umsetzung der Simulation geklärt. Das Verfahren wird angewandt, um das WIMP miracle zu reproduzieren. Die Ergebnisse werden letztendlich ausgewertet und diskutiert.

## 2 Dunkle Materie

### 2.1 Astronomische Beobachtungen

Hinweise auf die Existenz von Massen im Universum, die nicht direkt durch ein Teleskop beobachtbar sind, gibt es schon seit den frühen 1930er Jahren. Versuche, die Dichte der Dunklen Materie zu bestimmen, schätzen den Anteil an der Energiedichte des Universums auf ca. 25% [7]. Das größte Problem der daran arbeitenden Wissenschaftler besteht heute darin, die Beobachtungen in unser Weltbild einzuordnen, oder eine exakte Erklärung für dieses Phänomen zu finden, da die Detektion oder Beobachtung einzelner Teilchen oder anderer Kandidaten noch nicht erfolgreich war.

**Dark Matter Halos in Galaxien** 1933 zeigte Fritz Zwicky eindeutige Hinweise auf die Existenz fehlender Masse bei der Untersuchung des Coma Galaxienhaufens. Der Coma Cluster ist ungefähr  $1,4 \cdot 10^7$  parsec von der Sonne entfernt. Er ist aus mehr als 1000 Galaxien kugelsymmetrisch aufgebaut [10]. Die Galaxien bewegen sich auf Bahnen um sein Zentrum. Zwicky war es möglich, den Virialsatz auf das System anzuwenden (siehe dazu Anhang 7.1). Dabei fiel ihm auf, dass die geschätzte Masse der einzelnen Galaxien für die Beobachtung viel zu klein war, um für die aus dem Dopplereffekt bestimmten Geschwindigkeiten verantwortlich zu sein [15].

Weitere Beobachtungen wurden an Galaxien gemacht. Bekannt ist, dass sich großer Teil der Sterne im Zentrum der Galaxie (Bulge) konzentriert ist ([Abbildung 1]<sup>1</sup>). Dabei ist gravitative Wirkung der Scheibe umkreisender Sterne vernachlässigbar klein. Eine stabile Kreisbewegung setzt folgende Relation voraus.

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{mM(< r)G}{r^2} \quad (1)$$

Hier steht  $m$  für die Masse des umlaufenden Sternes (Bahngeschwindigkeit  $v$ , Bahnradius  $r$ ),  $G$  für Newtons Gravitationskonstante und  $M(< r)$  für die Masse in einer im Galaxiezentrum zentrierten Kugel mit dem Radius  $r$ . Während  $M(< r)$  innerhalb des Bulges noch mit  $r^3$  ansteigt, wird es ohne dunkle Materie außerhalb dessen als konstant angesehen. Es kann also angenommen werden, dass die Bahngeschwindigkeit der Sterne abnehmen sollte, wenn sich der Abstand vom Zentrum vergrößert ( $v \propto r^{-\frac{1}{2}}$ ). Das widerspricht aber den Daten, die besagen, dass die Geschwindigkeiten außerhalb des Bulges sogar näherungsweise unabhängig vom Bahnradius sind. [Abbildung 2]<sup>2</sup> zeigt das

---

<sup>1</sup><http://media.wiley.com/Lux/38/23438.nfg002.jpg> (Gültigkeit wurde am 16. 12. 2012 geprüft).

<sup>2</sup><http://bustard.phys.nd.edu/Phys171/lectures/dm.html> (Gültigkeit wurde am 16. 12. 2012 geprüft).

beobachtete Verhalten einer Galaxie in Kurve NGC 3198 und die Vorhersage ohne Beachtung Dunkler Materie (Kurve: disk). Diese Überlegungen waren der Ausgangspunkt für ein Postulat unsichtbarer Materie in den Galaxien. Verfügt jede Galaxie im Coma Galaxienhaufen über einen unbestimmten Teil an zusätzlicher Masse, lässt sich Zwicky's Anomalie lösen, die darauf hinauslief, dass Bulge und Sterne nur 10-20% der Masse einer Galaxie ausmachten. Angenommen wurde, dass ein Halo dunkler Materie, wie er grau in [Abbildung 3]<sup>3</sup> grau illustriert wird, die Galaxie durchsetzt und somit die beobachtete Rotationskurve, durch ein anderes  $M(< r)$ , hervorruft [15].

**Der Gravitationslinseneffekt** Nach dem Äquivalenzprinzip Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie, lenken energiereiche (massive) Objekte Lichtstrahlen auf ihrer Bahn ab. Es kommt zu einer berechenbaren Streuung der Strahlen [15]:

$$\alpha = \frac{4GM}{bc^2} \quad (2)$$

[Abbildung 4]<sup>4</sup> ist zweidimensional. In der Realität sieht der Beobachter einen Ring ([Abbildung 21]<sup>5</sup>), wenn Beobachter, Linse und Quelle kollinear sind.

Dieser Effekt gibt einem Beobachter nun doch die Möglichkeit, trotz der Durchsichtigkeit, der dunklen Materie, durch Auswertung von Beobachtungen Hinweise auf ihre konkrete Position zu bekommen. Bei Ablenkungen in Größenordnungen von Mikrobogensekunden wird von Mikrolinsen gesprochen, was es möglich macht, Objekte in der Größenordnung der Masse eines Sternes anhand einer hinter ihr vorbeiziehenden Lichtquelle (Stern, Galaxie) zu vermessen. Das Äquivalenzprinzip der Allgemeinen Relativitätstheorie hat auch einen Einfluss der Gravitation auf die Wellenlänge von Strahlung zur Folge. Wird das EM-Spektrum eines Galaxienhaufens untersucht, lassen sich Verschiebungen charakteristischer Linien finden, die, ausgewertet, Aufschluss auf die Masse des beobachteten Objektes geben. Solche Messungen lassen, zusammen mit vielen anderen Herangehensweisen, eine sehr genaue experimentelle Bestimmung der Dichte der Dunklen Materie zu. Die Literatur fasst die erfassten Daten zusammen und gibt für den Anteil von baryonischer und dunkler Materie sowie dunkler Energie an der Energiedichte des Universums

---

<sup>3</sup>[http://pdgusers.lbl.gov/~pslii/uabackup/source\\_files/image/galaxydiagram.jpg](http://pdgusers.lbl.gov/~pslii/uabackup/source_files/image/galaxydiagram.jpg) (Gültigkeit wurde am 16. 12. 2012 geprüft).

<sup>4</sup>[http://bulk.aip.de/public/WeWeWi/600x400/abb13-08\\_600x400.jpg](http://bulk.aip.de/public/WeWeWi/600x400/abb13-08_600x400.jpg) (Gültigkeit wurde am 16. 12. 2012 geprüft).

<sup>5</sup><http://physicsforme.files.wordpress.com/2011/12/gravity-galaxy.jpg> (Gültigkeit wurde am 16. 12. 2012 geprüft).

an [6]:

$$\Omega_{bar} \simeq 0,0456 \pm 0.0016$$

$$\Omega_{DM} \simeq 0,227 \pm 0.014$$

$$\Omega_{DE} \simeq 0,728 \pm 0.015$$

## 2.2 Dark Matter Kandidaten

Es wird kein alleinstehender Kandidat gesucht, der den gesamten Anteil der dunklen Materie ausmacht, denn nichts spricht dagegen, dass die Dunkle Materie aus verschiedenen Beiträgen besteht. In dieser Sektion sollen verschiedene Kandidaten vorgestellt werden, auf die in dieser Arbeit nicht weiter eingegangen wird. Unterteilt wird dabei in MACHOs (Massive Compact Halo Objects) und WIMPs (Weakly Interacting Massive Particles).

### 2.2.1 MACHOs

Der Bedeutung des Akronyms entsprechend sind MACHOs keine einzelnen Teilchen, sondern Himmelskörper Ihre Existenz ist vorhergesagt und bestätigt. Es kann aber keine sichere Aussage über ihre Menge gemacht werden. Zu ihnen zählen Schwarze Löcher und Braune Zwerge. Schwarze Löcher sind Singularitäten von extrem großer Masse. Braune Zwerge sind Ansammlungen von Wasserstoff, deren Masse aber nicht genügt, um im Zentrum Kernfusion zu initiieren und damit Strahlung auszusenden. [14]

**Experimentelle Suche** Bis zum Start des Hubble Weltraumteleskops bestand die Hoffnung, MACHOs in naheliegenden Galaxien direkt zu beobachten. Allerdings brachte Hubble diesbezüglich nicht die erwarteten Ergebnisse. Deswegen wird der Beitrag der MACHOs zur Dunklen Materie auf maximal 6% geschätzt [14]. MACHOs können trotzdem über das Microlensing gefunden und ausgemessen werden [14].

### 2.2.2 WIMPs

Als WIMPs werden die hypothetischen stabilen, schweren Teilchen bezeichnet, die durch fehlende elektromagnetische Wechselwirkung und große Masse einen interessanten Dark Matter Kandidaten darstellen, wenn sie homogen über das gesamte Universum verteilt sind. Im Standardmodell lässt sich aber kein Vertreter dieser Eigenschaften finden. Besteht dunkle Materie wirklich aus fremden Teilchen, die vom Umfang des Standardmodells nicht erfasst werden, ist es natürlich sehr erwünscht, diese in eine einheitliche

Vorstellung des Universums einzugliedern. Dafür gibt es neben den in der nächsten Sektion beschriebenen supersymmetrischen WIMPs noch andere Kandidaten. Diese sollen ohne weitere Erklärung als Kaluza-Klein Dark Matter und Branons genannt werden. Verwiesen sei auf das Paper von Jonathan L. Feng [6].

**Experimentelle Suche** WIMPs wechselwirken sehr selten mit Materie, was Experimente vor Schwierigkeiten stellt. Man versucht, die WIMPs indirekt nachzuweisen, indem extrem kalte Materialien (zB. Kristalle [14]) von einem eintreffenden Teilchen thermisch angeregt werden. Dieser Temperaturanstieg lässt sich registrieren. Um ausschließlich WIMPs zu registrieren, müssen die Detektoren sehr gut von anderen (stärker wechselwirkenden) Teilchen abgeschirmt werden. Das wird durch unterirdische Anlagen oder in Experimenten außerhalb der Erdatmosphäre erreicht.

### 3 Supersymmetrische WIMPs

Die in diesem Kapitel behandelte Hypothese der Supersymmetrie geht aus Problemen der Teilchenphysik hervor. Die Beschreibung von WIMPs durch die Supersymmetrie ist eine ihrer Konsequenzen. Als supersymmetrisches WIMP wird hier das leichteste von 4 Neutralinos, die aus der Theorie hervorgehen, untersucht. Es hat eine Masse in der Größenordnung von 100 GeV und ist damit das leichteste supersymmetrische Teilchen [6], aber dennoch schwerer als jedes Teilchen des Standardmodells, vom Higgs Boson abgesehen (siehe Abbildung 20 in Anhang 8). Bei Streuungen und Zerfällen im Rahmen von SUSY geht man von der Erhaltungsgröße der R-Parität aus [5]. Diese verhindert, dass supersymmetrische Teilchen in SM-Teilchen zerfallen. Da das Neutralino das leichteste Sparticle (Synonym für 'supersymmetrisches Teilchen') ist, ist es demnach stabil, während andere supersymmetrische Teilchen zu ihm zerfallen, und kann deswegen, unter Beachtung seiner hohen Masse, als Kandidat für dunkle Materie gelten.

#### 3.1 Supersymmetrie

Die Supersymmetrie erlangte 1974 durch Julius Wess und Bruno Zumino größeres Ansehen in der Fachwelt. Sie ist eine Hypothese in der Teilchenphysik, die sogenannte supersymmetrische Erweiterungen des Standardmodells zulässt. Bis jetzt wurden in Beschleunigerexperimenten noch keine supersymmetrischen Teilchen beobachtet, was auf eine gebrochene Symmetrie hindeutet, wie sie schon innerhalb des Standardmodells beobachtet wurde. Sie sind aber Teil der meisten vereinheitlichenden Theorien einschließlich der Stringtheorie.

### 3.1.1 Standardmodell der Teilchenphysik

Das Standardmodell ist eine Quantenfeldtheorie. Es beschreibt, abgesehen von der Gravitation, alle fundamentalen Wechselwirkungen und alle in Experimenten an Teilchenbeschleunigern beobachteten Teilchen. Das Modell teilt sich in Fermionen und Bosonen auf. Fermionen haben einen halbzahligen Spin. Für sie gilt das Pauli'sche Ausschlussprinzip, was im Falle der Elektronen (Spin  $\frac{1}{2}$ ) für die Atomorbitale verantwortlich ist. Sie unterteilen sich in die Quarks (up, down, charm, strange, top, bottom) und die Leptonen ( $e^-$ ,  $\mu$ ,  $\tau$  und ihre entsprechenden Neutrinos). Der Spin der Bosonen ist entweder eine natürliche Zahl (Photon, Gluonen (8),  $W^+$ ,  $W^-$ ,  $Z^0$ ) für die kraftübertragenden Vektorbosonen, oder 0 für das Skalarboson Higgs. [2]

Außerdem geht aus der Interpretation der Dirac-Gleichung die Existenz von korrespondierenden Antiteilchen hervor, was die Anzahl der geladenen Teilchen verdoppelt. Die Antiteilchen verfügen über die gleiche Masse wie ihr zugehöriges Teilchen, haben aber eine dem entgegengesetzte elektrische Ladung. Bei Aufeinandertreffen eines Teilchen-Antiteilchen Paares kommt es zur Annihilation, aus der ein hochfrequentes Photon hervorgeht. Die Existenz des Positrons wurde erstmals 1928 von Dirac theorisiert und 1932 von Anderson experimentell nachgewiesen. [2]

Das Standardmodell verbindet die 3 großen Quantenfeldtheorien (QED, QFD, QCD) und ist damit in der Lage, die Vorgänge in der Natur, bei denen Gravitation vernachlässigt werden kann, sehr weitgehend zu beschreiben. Es ist anzumerken, dass es aber Experimente nur beschreibt und nicht in der Lage ist, Werte wie die Teilchenmassen zu erklären. [2]

Das Standardmodell beinhaltet 19 Parameter (Kopplungskonstanten und Massen), die durch Experimente festgelegt werden müssen, weil sie nicht aus den Gleichungen hervorgehen. Die Masse des Higgsteilchens ist ein Beispiel für einen freien Parameter. Am 4. Juli 2012 wurde die Entdeckung eines Bosons mit einer Masse von 126 GeV offiziell gemacht. Sollte dieses als das Higgsteilchen des Standardmodells bestätigt werden, dann ist der letzte freie Parameter bestimmt. [2]

### 3.1.2 Probleme des Standardmodells

Die Supersymmetrie ist der Versuch, eine Theorie zu finden, die sowohl die Erfolge des Standardmodells reproduzieren kann, als auch existierende Probleme zu lösen und ausstehende Fragen zu klären. Motiviert wird die Supersymmetrie aber besonders durch die Probleme des Standardmodells, zu deren Beantwortung sie das Potential hat. Zu den Problemen des Standardmodells gehört vor allem, dass die beinhalteten Werte aufgrund

der freien Parameter auf Experimente gestützt sind und nicht durch seine Theorie erklärt werden. Dazu gehören die Massen und Ladungen der Teilchen sowie die Kopplungskonstanten. Außerdem bezieht die Supersymmetrie die Gravitation in seine Theorien ein [11]. Weitere Erklärungen und Lösungen liefert die Supersymmetrie zum Hierarchieproblem und zur Materie-Antimaterie Asymmetrie. Auf diese kann hier nicht weiter eingegangen werden. Verwiesen sei auf die Erklärung der Wuppertaler Arbeitsgruppe Teilchenphysik [17].

### 3.1.3 Supersymmetrische Erweiterungen

Die Supersymmetrie erweitert das bekannte Standardmodell. Das bedeutet, dass neben den bekannten fundamentalen Teilchen des Standardmodells noch Andere existieren können. Die Sparticles werden aus den Teilchen des Standardmodells durch Umwandlungen der Spin-Quantenzahlen hergeführt. Dafür werden ein (oder mehrere) Supercharge Operator  $Q$  definiert [13].  $F$  und  $B$  stehen jeweils für Fermionen (halbzahlige Spins) und Bosonen (ganzzahlige Spins) Zustände.

$$Q|B\rangle = |F\rangle$$

$$Q|F\rangle = |B\rangle$$

Das bedeutet für das Photon zum Beispiel:

$$Q|\text{Photon}\rangle = |\text{Photino}\rangle$$

Das Photon ist ein Spin 1 Boson. Aus ihm ergibt sich das supersymmetrische Fermion Photino. Die Supersymmetrie ist weniger selbst eine Theorie als eine Eigenschaft verschiedener Quantenfeldtheorien, die das Standardmodell erweitern.

Das minimal supersymmetrische Standardmodell (MSSM) ist eine solche Erweiterung. In supersymmetrischen Modellen wird jedem Feld ein Superpartner zugeordnet (siehe [Abbildung 5]<sup>6</sup>). Die Superpartner von Teilchen des Standardmodells bekommen daran anlehende Namen (Elektron - Seletron, Gluon - Gluino). Der Spin ist bei den Sparticles um  $\frac{1}{2}$  verschieden. Das führt dazu, dass der Superpartner eines Bosons ein Fermion ist und umgekehrt. [11]

Aus den Gleichungen des MSSM ergeben sich immernoch viele Unbekannte, welche die

---

<sup>6</sup>aus: Guido Drexlin, Institut für Experimentelle Kernphysik (KIT), Astroteilchenphysik - I, WS 2011/2012, Vorlesung 11, 12.01.2012.

Modelle sehr flexibel machen, aber auch Angriffspunkt starker Kritik sind. Bislang wurde die Supersymmetrie an Beschleunigungsexperimenten noch nicht nachgewiesen. Das ist Grund zur Annahme, dass eine gebrochene Symmetrie vorliegt, die zur Folge hat, dass sich die Superpartner von den Standardmodellteilchen maßgeblich in ihrer Masse unterscheiden (um einen Faktor von  $10^3$ ) und Beschleuniger noch nicht über die zur Produktion nötigen Energien verfügen. [11]

### 3.1.4 Leichtestes supersymmetrisches Teilchen

Für die Problemstellung der Dunklen Materie gewinnt die Supersymmetrie erst durch die Eigenschaften des LSP (lightest supersymmetric particle), des Sparticles mit der kleinsten Masse, Bedeutung.

**R-Parität** Die R-Parität ist eine multiplikative Erhaltungsgröße der Supersymmetrie. Das heißt, dass sich einlaufende und auslaufende Teilchen eines Streuprozesses in diesem Aspekt gleichen. Sie ist:

$$P_R = \begin{cases} +1 & \text{für SM Teilchen} \\ -1 & \text{für SUSY Teilchen} \end{cases}$$

Dass die R-Parität eine multiplikative Erhaltungsgröße ist bedeutet, dass folgende Beziehung für N eingehende und M ausgehende Teilchen gilt:

$$\prod_{i=1}^N P_R(i) = \prod_{j=1}^M P_R(j)$$

Für das LSP hat das bedeutende Konsequenzen, denn ein einzelnes SUSY Teilchen kann unter Erhaltung der R-Parität nicht in SM Teilchen zerfallen (siehe Anhang 7.3). Das leichteste supersymmetrische Teilchen ist deswegen stabil, obwohl seine Masse mit Werten in der Größenordnung von 100 bis 1000 GeV der Masse der schwersten Atome ähnelt.

**Neutralino** Das Teilchen, das in dieser Arbeit behandelt werden soll, ist das leichteste Neutralino, das oft als das leichteste supersymmetrische Teilchen angenommen wird. Die 4 Neutralinos ergeben sich in der Supersymmetrie durch eine Mischung der Teilchenzustände ([Abbildung 6]<sup>7</sup>, Verweis auf [5]). Als Dark Matter Kandidat wird das Neutralino

---

<sup>7</sup>aus: Guido Drexlin, Institut für Experimentelle Kernphysik (KIT), Astroteilchenphysik - I, WS 2011/2012, Vorlesung 11, 12.01.2012.

durch seine sehr passenden Eigenschaften motiviert, die den an WIMPs gestellten Forderungen vollständig entspricht. Das Fermion wird durch  $\tilde{\chi}_1^0$  notiert.

## 3.2 Experimentelle Suche

Zur Detektion Abseits von Teilchenbeschleunigern gilt die gleiche Herangehensweise wie bei allen WIMPs (siehe Sektion 2.2.2). Für eine genauere Abhandlung dieser Versuche sei auf Jonathan L. Feng's Paper verwiesen [6].

**Detektion an Teilchenbeschleunigern** Am LHC wird, unter anderem, der Versuch unternommen, die Signaturen des Zerfalls in [Abbildung 7]<sup>8</sup> zu detektieren. Die Detektion auf diesem Weg wäre außerdem eine Möglichkeit zur Bestätigung der Supersymmetrie.

## 4 Berechnung der Restdichte

Die Dichte des WIMPs soll durch das kleinschrittige Runge-Kutta Verfahren bestimmt werden. Dieses liefert die numerische Integration einer Evolutionsgleichung, welche die erste Ableitung der gesuchten Größe in Abhängigkeit von anderen Parametern angibt. Diese Evolutionsgleichung ist die, hier als gegeben betrachtete, Boltzmann-Gleichung, die in ihrer Einfachheit mit verschiedenen Näherungen verbunden ist. Die Boltzmann-Gleichung wird in diesem Kapitel eingeführt, untersucht und zur numerischen Lösung aufbereitet und mit einem in Wolframs Mathematica geschriebenen Programm ausgewertet.

### 4.1 Theoretische Grundlagen

#### 4.1.1 Boltzmann-Gleichung

Die Boltzmann-Gleichung ist gegeben [6]:

$$\frac{dn}{dt} = -3Hn - \langle\sigma v\rangle(n^2 - n_{eq}^2) \quad (3)$$

Alternativ formuliert:

$$\frac{dn}{dt} = -3Hn - \langle\sigma v\rangle n^2 + \langle\sigma v\rangle n_{eq}^2 \quad (4)$$

Gleichung (4) beschreibt die erste Ableitung der Anzahldichte der WIMPs ( $n = \frac{N}{V}$ ). Sie beinhaltet 3 Terme. Der erste, negative, Teil beinhaltet die Hubblefunktion und be-

<sup>8</sup><http://upload.wikimedia.org/wikipedia/de/8/8d/Susy-zerfall-chi0.jpg> (Gültigkeit wurde am 16. 12. 2012 geprüft).

schreibt das Sinken der Dichte durch ein Ausdehnen des Universums.

Das Neutralino ist stabil, aber ein Majorana-Fermionen. Diese sind neutrale Teilchen, die ihr eigenes Antiteilchen darstellen. Im Standardmodell findet sich dafür kein Beispiel. Zwei  $\tilde{\chi}_1^0$  (Neutralinos) können sich bei einer Kollision, unter Erhaltung der R-Parität, auslöschen. Dabei entsteht zum Beispiel ein SM Teilchen-Antiteilchenpaar ( $\tilde{\chi}_1^0 + \tilde{\chi}_1^0 \rightarrow e^- + e^+$ ). Das beschreibt der zweite Term der Gleichung. Er ist negativ und proportional zum Quadrat von  $n$ . Hier wird ignoriert, dass ein  $\tilde{\chi}_1^0$  auch mit einem anderen SUSY Teilchen zu SM Teilchen streuen könnte (siehe Anhang 7.3). Dieses Phänomen der Koannihilation wird in manchen Rechnungen einbezogen, kann hier aber vernachlässigt werden. Der dem Zweiten ähnelnde dritte, positive Term steht für die entsprechenden Produktionsreaktionen. Für die Produktion der WIMPs kann sich mit guter Näherung auf die hochenergetische Kollision eines SM Teilchen-Antiteilchenpaares beschränkt werden [Abbildung 8] (siehe Anhang 7.3). Da mit fortlaufender Ausdehnung des Universum die Temperatur der Teilchen sinkt, werden SM Kollisionen, die die für die Produktion nötige Energie aufbringen, seltener. Quantitativ wird das beschrieben durch [3]:

$$n_{eq} = g \left( \frac{m_\chi T}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_\chi}{T}}$$

$m_\chi$  ist die Masse ( $\sim 100$  GeV) und  $T$  ist die Temperatur der WIMPs.  $g$  ist die Anzahl der thermodynamischen Freiheitsgrade. In Gleichung (3) läßt sich erkennen, dass in einem konstanten Volumen ( $H=0$ )  $n_{eq}$  für die Gleichgewichtsdichte steht (ist  $n = n_{eq}$  dann  $\frac{dn}{dt} = 0$ ).  $n_{eq}$  ist eine Dichte, bei der Produktion und Annihilation in gleichem Maße ablaufen. Dieser Sachverhalt wird in einer folgenden Umformulierung der Boltzmann-Gleichung sehr wichtig für die Auswertung.

## 4.2 Wirkungsquerschnitt $\sigma$

In der Boltzmann-Gleichung findet sich ein Faktor dessen Ursprung noch nicht geklärt wurde.  $\langle \sigma v \rangle$  ist der Wirkungsquerschnitt der betrachteten Streuung. Dieser steht für die Reaktionswahrscheinlichkeit zweier Teilchen (siehe Anhang A.8.). Der Wirkungsquerschnitt hat in der Simulation den größten Einfluss auf die Restdichte der WIMPs, was sich an den Ergebnissen gut erkennen lässt. Der Faktor ist der gleiche für beide Streuungen (Hin- und Rückreaktion)

$$\tilde{\chi}_1^0 + \tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \text{SM} + \text{anti SM}$$

und

$$\text{SM} + \text{antiSM} \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \tilde{\chi}_1^0$$

Der Wirkungsquerschnitt lässt sich theoretisch aus den Eigenschaften des Teilchens errechnen. Der Faktor in der gegebenen Boltzmann-Gleichung ist ein Temperaturdurchschnitt, da  $\sigma$  auch von der Geschwindigkeit der Teilchen abhängen kann. In dieser Arbeit wird die Formel für  $\sigma$  aus Fengs Paper [6] entnommen.

$$\sigma = \frac{g_{weak}^4}{16\pi^2 m_\chi^2} \left( a \text{ oder } b \cdot \frac{v^2}{c^2} \right)$$

$g_{weak}$  ist die Kopplungskonstante der schwachen Wechselwirkung,  $a$  und  $b$  sind reelle Parameter. Es wird also unterschieden zwischen der geschwindigkeitsunabhängigen S-Wellen Annihilation (a) und der geschwindigkeitsabhängigen P-Wellen Annihilation (b). Um für geschwindigkeitsabhängige  $\sigma$  einen temperaturabhängigen Durchschnittswert zu erhalten, wird aus der Maxwell-Boltzmann Verteilung die Durchschnittsgeschwindigkeit bestimmt.

$$p(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}$$

$$\bar{v} = \int_0^\infty v \cdot p(v) dv = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_\chi}}$$

In der nächsten Sektion wird  $x = \frac{m_\chi c^2}{k_B T}$  definiert. Damit erhält man für den Faktor in der P-Wellen Annihilation

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{8}{\pi x}$$

Wichtig ist, hier anzumerken, dass die WIMPs im gesamten Interessenszeitraum nicht thermisch von der restlichen Materie entkoppeln [4]. Damit haben WIMPs und das restliche Universum die gleiche Temperatur.

### 4.3 Numerische Auswertung

Die Boltzmann Gleichung ist analytisch nicht lösbar. Das macht die numerische Auseinandersetzung mit ihr erst nötig. Doch die Form in der sie gegeben wurde ist nicht optimal für eine Auswertung, da sie ein wichtiges Phänomen vernachlässigt, das von einer Um-

formulierung genutzt werden kann. Die Rede ist von der chemischen Entkopplung der WIMPs.

### 4.3.1 Umformulierung der Boltzmann-Gleichung

Zuerst werden die beiden dimensionlosen Größen  $Y$  und  $x$  definiert:

$$Y = \frac{n}{s}$$

$$x = \frac{m_\chi c^2}{k_B T} = \frac{m_\chi}{T} \quad (c = k_B = 1)$$

$s$  ist die Entropiedichte und lässt  $Y$  die Anzahldichte der WIMPs in einem mitexpandierendem Volumen sein.  $x$  nimmt die Position einer unabhängigen Variablen ein. Da  $x \rightarrow \infty$ . Anhand dieser Definitionen wird die Boltzmann-Gleichung jetzt umformuliert [9].

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dx} &= \frac{dY}{dt} \frac{dt}{dx} \\ &= \left( \frac{1}{s} \frac{dn}{dt} - \frac{n}{s^2} \frac{ds}{dt} \right) \frac{2}{x} t \\ &= \left( \frac{1}{s} \frac{dn}{dt} - \frac{Y}{s} \frac{ds}{dt} \right) \frac{1}{Hx} \\ &= \left( \frac{-3Hn - \langle \sigma v \rangle (n^2 - n_{eq}^2)}{s} - \frac{Y}{s} \frac{ds}{dT} \frac{dT}{dt} \right) \frac{1}{Hx} \\ &= (-3HY - 3Hn - \langle \sigma v \rangle s (Y^2 - Y_{eq}^2) - \frac{Y}{s} \frac{3s}{T} \left( \frac{-T}{2t} \right)) \frac{1}{Hx} \end{aligned}$$

Hierfür gelten die folgenden Relationen [3]:

$$\begin{aligned} s &= \frac{2\pi^2}{45} g_{eff,s} T^3 \\ t &= 0,301 \frac{m_{Pl}}{\sqrt{g_{eff}}} \frac{x^2}{m_\chi^2} \\ H &= \frac{1}{2t} \end{aligned}$$

Jetzt ergibt sich die fertige, auswertbare Gleichung

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{\langle\sigma v\rangle s}{Hx}(Y^2 - Y_{eq}^2) \quad (5)$$

### 4.3.2 Freeze Out

Betrachtet man Gleichung (5) genau, dann fällt auf, dass der Faktor  $\frac{s}{Hx}$  proportional zu  $T^6$  ist ( $H = \frac{1}{2t}$ ; [6]). Da  $T \rightarrow 0$  gilt, geht auch  $\frac{dY}{dx}$  gegen null. Die Funktion  $Y$  konvergiert zu einem konstanten Wert. Physikalisch wird das mit dem Phänomen der chemischen Entkopplung der WIMPs interpretiert. Dieses wird auch als Freeze Out bezeichnet, da die Teilchenreaktionen zu einem bestimmten Freeze Out Zeitpunkt vollständig zum Erliegen kommen (einfrieren). Dieser wird als der Zeitpunkt angegeben, zu dem die mittlere Wellenlänge den Hubbleradius übersteigt [7]. Die mittlere Weglänge  $\bar{l}$  ist der mittlere Weg der von einem Teilchen mittlerer Geschwindigkeit zwischen zwei Kollisionen zurückgelegt wird. Der Hubbleradius ist die Entfernung bei der sich ein Punkt, durch die starke Expansion, von einem Beobachter mit einer höheren Geschwindigkeit als Licht entfernt. Diesen erhält man durch das Hubblegesetz (siehe Anhang 7.4).

$$v = r \cdot H$$

$H$  ist der Wert der Hubblefunktion,  $v$  ist die Fluchtgeschwindigkeit und  $r$  ist die Entfernung vom Beobachter. Der Radius  $r_H = \frac{c}{H}$  bei dem  $v=c$  wird beim Freeze Out kleiner als die mittlere Weglänge (siehe Anhang 7.5).

$$\frac{c}{H} < \frac{1}{n \cdot \langle\sigma v\rangle}$$

Die Freeze Out Bedingung ist also ( $c = 1$ )

$$H > n \cdot \langle\sigma v\rangle$$

Bis zu dahin hält sich  $Y$ , Gl. (5) folgend, nah am nicht konstanten  $Y_{eq}$ , da der Faktor  $\frac{\langle\sigma v\rangle s}{Hx}$  groß genug ist, um die negative Ableitung bei  $Y > Y_{eq}$  und die positive Ableitung bei  $Y < Y_{eq}$  Einfluss auf die Entwicklung von  $Y$  haben zu lassen. An [Abbildung 9]<sup>9</sup> geht die Kurve von  $Y_{eq}$ , rot markiert, in logarithmisch skalierten Achsen gegen 0. Die gestrichelten Kurven beschreiben die Entwicklung von  $Y$  nach dem Freeze Out in drei verschiedenen Szenarien (Auf dessen Abhängigkeit von  $\langle\sigma v\rangle$  wird in der Auswertung ein-

---

<sup>9</sup>Bearbeitung einer aus [7] übernommenen Grafik.

gegangen). Bis zum Freeze Out ist  $\frac{\langle \sigma v \rangle_s}{Hx}$  noch groß genug und  $Y$  kann deswegen wie oben beschrieben noch einen  $Y_{eq}$  sehr ähnlichen Verlauf nehmen. Für eine effektive Berechnung ist diese Erkenntnis wertvoll, da die Simulation erst kurz vor dem Freeze Out mit  $Y = Y_{eq}$  gestartet werden kann und damit, ohne Verlust von Genauigkeit, Rechenzeit gespart wird.

### 4.3.3 Runge Kutta Verfahren

Das Runge Kutta Verfahren ist ein Kleinschrittverfahren, dass die numerische Integration einer Gleichung mit Anfangswert ermöglicht. Es kann also Anfangswertprobleme, wie sie hier vorliegen lösen. Der Anfangswert und die Ableitung der Funktion sind hier gegeben:

$$\frac{dY}{dx} = f(x, Y)$$

$$Y_1(x_1) = Y(x = a) = Y_{eq}(x = a)$$

In einem Iterationsschritt werden  $x_i$  und  $Y_i(x_i)$  verwendet, um  $Y_{i+1}(x_{i+1})$  zu nähern.  $x$  läuft dabei in festen Intervallen vom Anfangspunkt zum Endpunkt;  $x_{i+1} = x_i + h$  ( $h$  ist das Iterationsintervall). Für einen Iterationsschritt werden vier Werte definiert und ausgerechnet;  $f(x, Y) = \frac{dY}{dx}$ .

$$k_1 = h \cdot f(x_i, Y_i)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h \cdot f(x_i + h, Y_i + k_3)$$

Aus diesen Werten wird der Wert für  $Y_{i+1}$  errechnet.

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Dieser Schritt wird wiederholt, bis  $x_m \sim 100$  erreicht wird.

### 4.3.4 Implementation

Ein kleines selbstgeschriebenes Programm in Wolframs Mathematica 8 soll die vielfache Iteration dieser Methode und damit eine gute numerische Lösung der analytisch nicht lösbaren Differenzialgleichung ermöglichen. Die Funktion RungeU ('U' kurz für den tem-

peratur'U'nabhängigen Wirkungsquerschnitt) wird in Mathematica definiert und kann dann aufgerufen werden. Sie gibt dann eine Tabelle mit den Werten jedes Iterationsschrittes aus (siehe Anhang 7.6 unter RungeU), die grafisch von Mathematica ausgewertet werden können. Sie ist abhängig von 5 Parametern:

$$\text{RungeU}[a0\_ , b0\_ , s\_ , m0\_ , c0\_ ]$$

Die Parameter sind:

$$a \rightarrow x_1 (\text{entspricht einem Zeitpunkt vor dem Freezeout}) \quad (6)$$

$$b \rightarrow x\text{-Wert des Endergebnisses} \quad (7)$$

$$s \rightarrow \text{Startwert } Y_1 \quad (8)$$

$$m \rightarrow \text{Anzahl der Iterationsschritte} \quad (9)$$

$$c \rightarrow \text{Parameter von } \langle \sigma v \rangle, \text{ siehe Sektion 4.2 (auch abhängig von der Masse des Neutralinos)} \quad (10)$$

Die Ergebnisse der einzelnen Parameterkombinationen werden gespeichert und können graphisch ausgewertet werden.

## 5 Ergebnisse

Der Wirkungsquerschnitt wird abhängig von reellen Parametern gemacht [6]:

$$\sigma = \frac{g_{weak}^4}{16\pi^2 m_\chi^2} (a \text{ oder } b \cdot \frac{v^2}{c^2})$$

Diese freien Parameter werden in der Durchführung sowohl für die P-Wellen- als auch für die S-Wellen-Annihilation über 5 Werte variiert (0.1; 0.5; 1; 2; 10). Im Programm ist das der Parameter c (siehe Gleichung (10)). Die Berechnungen werden in den Diagrammen (Abbildungen 11 und 10) für je geschwindigkeitsabhängige und -unabhängige Wirkungsquerschnitte dargestellt. Die Y Werte der verschiedenen Simulationen konvergieren zu einem spezifischen Wert  $Y_\infty$  ( $=\lim_{x \rightarrow \infty} Y(x)$ ) Erkennen lässt sich, dass  $Y_\infty$  für größere  $\langle \sigma v \rangle$  kleiner wird, da kleinere Wirkungsquerschnitte die Freeze Out Bedingung in Sektion 4.3.2 schon für kleinere x erfüllen und deswegen früher enkoppeln und eine höhere Restdichte hinterlassen. Die Simulationen wurden zu Gunsten kürzer Rechenzeiten erst kurz vor der vorher bestimmten Freeze Out Temperatur (siehe Sektion 4.3.2) gestartet. Simulationen mit einem kleineren Startwert von x hätten bis zum Freeze Out mit der (blauen) Kurve von  $Y_{eq}$  übereingestimmt.

	a=0,1	a=0,5	a=1	a=2	a=10		b=0,1	b=0,5	b=1	b=2	b=10
$\Omega_{WIMP}$	115%	23%	11%	5%	1%		1280%	250%	120%	50%	10%

Tabelle 1: Parameter der S-Wellen (a) und P-Wellen (b) mit ihren zugehörigen Simulationsergebnissen.

Aus den  $Y_\infty$  Werten lässt sich der heute vorherrschende Anteil der WIMPs an der Energiedichte des Universums errechnen. Hierfür gilt [6]:

$$\Omega_{WIMP} = \frac{\rho_{WIMP}}{\rho_{crit}} = \frac{n_0 m_\chi}{\rho_{crit}} = \frac{Y_\infty s_0 m_\chi}{\rho_{crit}}$$

Wobei für den heutigen Wert von  $\rho_{crit}$  gilt [8]:

$$\rho_{crit} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

$\rho_{crit}$  ist die kritische Dichte, oder die Dichte unseres heutigen Universums.  $n_0$  ist die heutige Anzahldichte der WIMPs. Diese lässt sich mit der Beziehung  $Y = \frac{n}{s}$  erhalten, wobei  $Y_\infty = Y_0$  gesetzt werden kann, da der Freezeout schon lange abgeschlossen ist.  $H_0$  ist der heutige Wert der Hubblefunktion (siehe Anhang 7.4).  $G$  ist die Gravitationskonstante. Die aus den Werten der Simulation errechneten Werte von  $\Omega_{WIMP}$  werden in Tabelle 1 dargestellt. Beobachtungen zu Folge sollte  $\Omega_{WIMP} \leq 0,23$  sein, da WIMPs mit einem Anteil von weniger als 23 Prozent noch Teil der dunklen Materie sein können. Ein größerer Anteil wäre nicht zu erklären, da nicht mehr als  $0,23\rho_{crit}$  Dunkle Materie beobachtet werden.

Die WIMPs mit geschwindigkeitsabhängigen Wirkungsquerschnitten haben deutlich höhere Werte. Werte über 100% sind in der Realität unmöglich. Die frühe Entkopplung von P-Wellen WIMPs resultiert aus den sehr kleinen Faktoren, die sich aus nicht-relativistischen Durchschnittsgeschwindigkeiten ( $v < 0,1c$ ) ergeben. Es lässt sich aber auch an Tabelle 1 erkennen, dass die berechneten WIMPs eine Dichte haben, die der Dichte der Dunklen Materie sehr nahe kommt. Damit ist das WIMP-miracle reproduziert. Die leichtesten supersymmetrischen Teilchen könnten einen großen Teil der 23% ausmachen.

## 6 Zusammenfassung

Es wurde mit einem simplen Modell versucht, die Dichte der WIMPs im heutigen Universum zu bestimmen. Die Ergebnisse entsprechen, in ihrer Größenordnung, den Beobachtungswerten aus der Astronomie und sind deswegen sehr aussagekräftig. Sie bestätigen die leichtesten supersymmetrischen Neutralinos mit einer Masse von 100 GeV als einen guten Dark Matter Kandidaten. Der Freeze Out der untersuchten WIMPs würde ungefähr bei  $x=25$  passieren, also  $10^{15}$  Sekunden nach dem Urknall. Das entspricht einem Alter von  $\sim 30$  Millionen Jahren. Neben den supersymmetrischen WIMPs gibt es aber noch mehrere andere WIMP Kandidaten, die aus ähnlichen Simulationen mit sehr guten Werten hervorgehen. Eine definitive Antwort auf die Frage nach den Bestandteilen der Dunklen Materie kann deswegen nur durch experimentelle Bestimmung genauer Eigenschaften der Teilchen abseits des Standardmodells passieren. Bestehen die WIMPs aus supersymmetrischen Teilchen, dann muss die Supersymmetrie an Teilchenbeschleunigern beobachtet werden. Wird die Supersymmetrie aber, in einer Form mit  $\tilde{\chi}_1^0$ -ähnlichem LSP, tatsächlich beobachtet, dann folgt aus Simulationen wie sie hier gemacht wurden, dass wirklich ein großer Teil der Dunklen Materie aus supersymmetrischen WIMPs besteht. Die hier durchgeführte Rechnung ist sehr einfach gehalten. Sie ignoriert andere mögliche Annihilations- und Produktionsmechanismen der Neutralinos, welche die Rechnungen exakter machen würden, sowie die Möglichkeit der Existenz eines zweiten WIMPs mit ähnlicher Masse. Unter diesen beiden WIMPs müssten die Möglichkeit der Koannihilation betrachtet werden, bei der sie miteinander zu Standardmodellteilchen streuen würden [9][7]. Es gibt viele weitere ähnliche Szenarien, deren Untersuchung sich lohnen würde, aber weitaus kompliziertere Rechnungen erfordert. Zur Eingrenzung des zu untersuchenden Massenbereich für die Detektion von supersymmetrischen WIMPs an Teilchenbeschleunigern könnte die, hier auf 100GeV festgesetzte, Masse als freier Parameter behandelt werden.

## Literatur

- [1] Bartelmann, Matthias und Kühnel, Tobias. *Kosmologie für die Schule*. Max-Planck-Institut für Astrophysik.
- [2] Berger, Christoph. *Elementarteilchenphysik, 2. Auflage*. Springer Lehrbücher. Springer. 2006
- [3] Bergström, Lars and Goobar, Ariel. *Cosmology and Particle Physics*. SPRINGER-PRAXIS BOOKS IN ASTRONOMY AND PLANETARY SCIENCE. Springer. 2006
- [4] Bringmann, Torsten. Vorlesungsskript: *Lecture 6. 7.3 Thermal decoupling*. In: Torsten Bringmann, Lectures on Dark Matter. DESY Hamburg. Sommersemester 2011
- [5] Drexlin, Guido. Vorlesungsskript: *Astroteilchenphysik - I. Vorlesung 11, 12.01.2012*. Institut für Experimentelle Kernphysik (KIT). 2012
- [6] Feng, Jonathan *Dark Matter Candidates from Particle Physics and Methods of Detection*. Department of Physics and Astronomy, University of California, Irvine. arXiv. April 2010
- [7] G. Gelmini and P. Gondolo "DM Production Mechanisms". In: Gianfranco Bertone (Hg.), *Particle Dark Matter*. Cambridge University Press. 2010
- [8] Goetze, Klaus. Vorlesungsskript: *Einführung in die Kosmologie, Vorlesung 6 Parameter des Universums*. Ruhr Universität Bochum. 2006
- [9] Groß, Arne *Simulation der dunklen Materiedichte im Universum*. IKTP der TU Dresden. 2012
- [10] Institut für Astronomie und Astrophysik der Universität München Observatorium Wendelstein: Der Coma-Haufen. Online: <http://www.usm.uni-muenchen.de/people/saglia/dm/galaxien/alldt/node37.html> (Stand: 30. 10. 2012)
- [11] Kane, Gordon. *Supersymmetry: Unveiling the Ultimate Laws of Nature*. Perseus Publishing. 2000
- [12] Lennarz, Dirk. Vortragsskript: *Dunkle Materie*. RWTH Aachen. 2006
- [13] McMahon, David. *Quantum Field Theory demystified* McGraw-Hill. 2008
- [14] Miller, Chris. *Cosmic Hide and Seek: the Search for the Missing Mass*. 1995

- [15] Perkins, Dwight *Particle Astrophysics*. Oxford University Press. Oxford. 2003
- [16] Steinbrück, Georg. Vorlesungsskript: *Physik V: Kern- und Teilchenphysik WS 07/08: Kapitel 11.4, Dunkle Materie und Dunkle Energie*. Universität Hamburg. 2008
- [17] Wuppertaler Arbeitsgruppe Teilchenphysik. Offene Fragen. Online: <http://www.atlas.uni-wuppertal.de/oeffentlichkeit/Jenseits.html> (Stand: 17. 12. 2012)

## Anhang

### 7 Theoretische Zusätze

#### 7.1 Virialsatz

Das Virialtheorem setzt die durchschnittliche kinetische Energie  $T$  mit der durchschnittlichen potentiellen Energie  $U$ , eines kugelsymmetrischen Systems mit Gravitation, in Beziehung.

$$T = -\frac{1}{2}U$$

Für  $T$  gilt

$$T = \frac{1}{2}Mv_{\text{durchschnitt}}^2 = \frac{1}{2}M \cdot 3\langle v \rangle^2$$

Hierbei wird die beobachtete Durchschnittsgeschwindigkeit  $\langle v \rangle$  mit  $\sqrt{3}$  multipliziert, da sie unter Nutzung des Dopplereffektes nur in Richtung des Beobachters gemessen werden kann und damit auf alle 3 Raumrichtungen ausgeweitet wird [12].  $M$  ist die Gesamtmasse des Clusters. Für  $U$  gilt:

$$U \sim -G\frac{M^2}{R}$$

$R$  ist der Radius des Systems.  $G$  ist die Newtonsche Gravitationskonstante. Das Anwenden des Virialtheorems auf diese Näherungen, ermöglicht es, die Masse  $M$  abzuschätzen [12]:

$$M \sim \frac{3R\langle v \rangle^2}{G} \tag{11}$$

Aus [16] werden die Beispielwerte übernommen:

$$R = 10\text{Mpc}$$
$$\langle v \rangle = 1000\text{km/s}$$

Aus Gleichung (11) folgt eine Masse von  $\sim 10^{15}$  Sonnenmassen. Die Auswertung von Beobachtungen der Leuchtkraft des Galaxienhaufens lässt aber auf nur  $\sim 10^{13}$  Sonnenmassen leuchtender Materie schließen (auf die genauen Methodiken dieser Bestimmung einzugehen, führt weit über diese Beispielrechnung hinaus). Daraus folgt, dass nur  $\sim 1\%$  der Masse eines Galaxienhaufens von leuchtender Materie ausgemacht wird. Das ist zwar noch weniger als bei genaueren Rechnungen. Trotzdem lässt sich damit der Widerspruch zwischen den Beobachtungen von 1933 und den Berechnungen nachvollziehen.

## 7.2 Bestimmung der Masse einer Gravitationslinse

Die schon zuvor gezeigte Gleichung

$$\alpha = \frac{4GM}{bc^2}$$

lässt sich leicht umstellen

$$M = \frac{\alpha bc^2}{4G}$$

Aus Beobachtungen lassen sich  $\alpha$  und  $b$  bestimmen. Dazu wird zu Gunsten der Einfachheit angenommen, dass Quelle, Linse und Beobachter kollinear sind (Abbildung 4). Wird eine Gravitationslinse wie in Abbildung 21 beobachtet, dann wird der Winkel  $\theta$ , zwischen Bild und Quelle, bestimmt. Für diesen gilt:

$$\sin(\theta) = \frac{b}{d_L}$$

$b$  ist der Radius des Einsteinringes.  $d_L$  ist die Entfernung zwischen Beobachter und Linse. Für den Winkel der Quelle gilt:

$$\sin(\epsilon) = \frac{b}{d_{LQ}}$$

$d_{LQ}$  ist die Entfernung zwischen Quelle und Linse.  $\alpha$  ist die Summe:  $\alpha = \theta + \epsilon$ .

## 7.3 Beispiele für mögliche und unmögliche Prozesse unter Erhaltung der R-Parität

### 7.3.1 Feynman Diagramme

Feynman Diagramme wurden von Richard Feynman entworfen, um störungstheoretische Rechnungen in Quantenfeldtheorien durchzuführen. Sie stellen, in einer Raum- und einer Zeitdimension, einen Prozess dar, der einlaufende Teilchen (linke äußere Linien) in auslaufende Teilchen (rechte äußere Linien) umwandelt. In einfachen Fällen sind einlaufende und auslaufende Teilchen nur durch eine Photonenlinie verbunden. Elementarteilchen, die an zwei "Vertices"(Schnittpunkten) angreifen, also im Diagramm beginnen und enden, sind virtuelle Teilchen. Sie können nicht detektiert werden. Das liegt an der quantenmechanischen Natur dieser Prozesse. Bei der Annihilation eines Elektron-Positron Paares unter Emmission eines Myon-Antimyon Paares findet der Prozess mit nur einem Photon als virtuelles Teilchen mit einer bestimmten Amplitude statt. Gleichzeitig wird ein Prozess betrachtet, bei dem zwei virtuelle Photonen auftreten. Allerdings werden Prozesse mit vielen Vertices immer unwahrscheinlicher. Um die vollständige Amplitude der gesamten Streuung zu erhalten müssen unendlich viele Prozessamplituden aufsummiert werden. Bei solchen Rechnungen können aber die Prozesse sehr hoher Ordnung ignoriert werden, da sie sehr wenig zur Amplitude beitragen.

### 7.3.2 Beispiele

Für die in Sektion 3.1.4 aufgezeigte Regel der multiplikativen Erhaltungsgröße der R-Parität sollen hier Beispiele für mögliche und unmögliche Prozesse vorgestellt werden. Hier werden die Feynman Diagramme der Prozesse dargestellt. Dazu wird eine Bilanz der einlaufenden Teilchen (links) und der Produkte (rechts) aufgestellt. Darunter werden die R-Paritäten der einzelnen Teilchen dargestellt. Diese werden multipliziert. Ist der Wert bei einlaufenden und auslaufenden Teilchen (un)gleich, dann ist der Prozess (un)möglich.

### 7.3.3 Mögliche Prozesse

Zu den möglichen Prozessen zählen Produktion und Annihilation der supersymmetrischen WIMPs:

SUSY	SUSY	→	SM	SM
-1	-1	→	+1	+1
	+1	=	+1	
SM	SM	→	SUSY	SUSY
+1	+1	→	-1	-1
	+1	=	+1	

Weitere Beispiele für mögliche Prozesse sind:

SUSY	SM	→	SUSY	SM	
-1	+1	→	-1	+1	
	-1	=	-1		
SM	SUSY	→	SM	SM	SUSY
+1	-1	→	+1	+1	-1
	-1	=	-1		

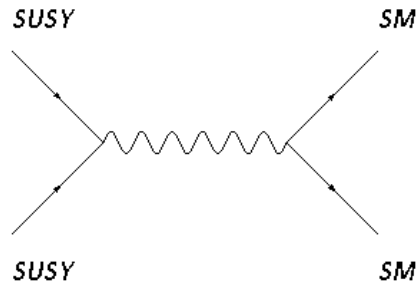


Abbildung 12: zwei SUSY Teilchen laufen ein und produzieren zwei SM Teilchen

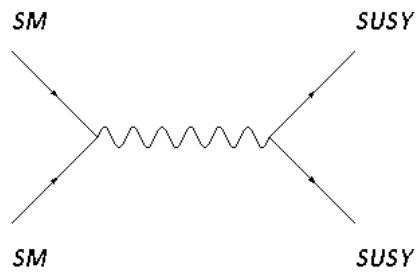


Abbildung 13: zwei SM Teilchen laufen ein und produzieren zwei SUSY Teilchen

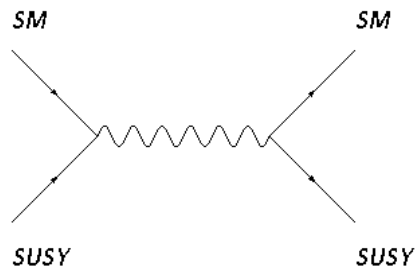


Abbildung 14: ein SM Teilchen streut an einem SUSY Teilchen zu einem SM und einem SUSY Teilchen

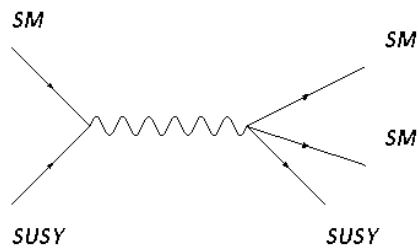


Abbildung 15: ein SUSY Teilchen streut an einem SM Teilchen zu 2 SM Teilchen und ein SUSY Teilchen

### 7.3.4 Unmögliche Prozesse

Die wichtigste Konsequenz der R-Parität ist, dass ein Prozess, bei dem ein einzelnes SUSY Teilchen in SM Teilchen zerfällt, unmöglich ist. Deswegen ist das LSP stabil, obwohl es eine sehr hohe Masse hat:

SUSY	→	SM	
-1	→	+1	
	-1 ≠	+1	
SUSY	→	SM	SM
-1	→	+1	+1
	-1 ≠	+1	

Weitere Beispiele für unmögliche Prozesse sind:

SUSY	SUSY	→	SUSY		
-1	-1	→	-1		
	+1	≠	-1		
SM	SM	→	SUSY	SUSY	SUSY
+1	+1	→	-1	-1	-1
	+1	≠	-1		



Abbildung 16: ein SUSY Teilchen zerfällt in ein SM Teilchen

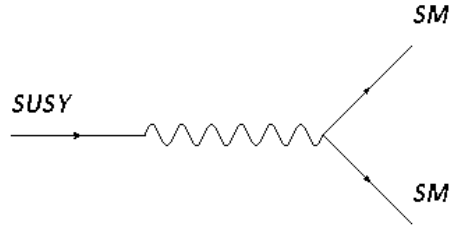


Abbildung 17: ein SUSY Teilchen zerfällt in zwei SM Teilchen

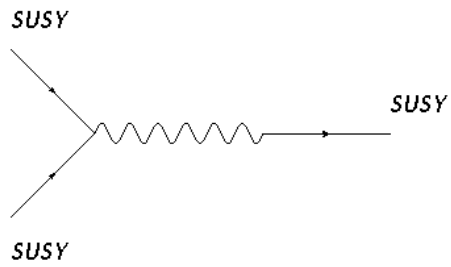


Abbildung 18: zwei SUSY Teilchen streuen zu einem auslaufendem SUSY Teilchen

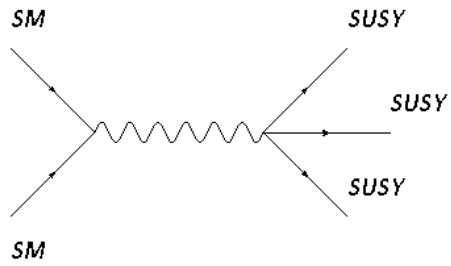


Abbildung 19: zwei SM Teilchen streuen zu drei SUSY Teilchen

## 7.4 Hubble Gesetz

Die Ausdehnung des Universums wird quantitativ durch die Hubblefunktion beschrieben [1]:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

Die Variable, die auch als mit ihrer Zeitableitung  $\dot{a}$  auftaucht. Ist der Skalenfaktor des Universums. Er legt fest, wie sich eine Weglänge  $l_0$  nach einer Expansion verändert hat.

$$l = a \cdot l_0$$

Ist er 1, dann hat keine Expansion stattgefunden. Ist er aber größer (kleiner) als 1, dann ist die gemessene Länge  $l$  größer (kleiner) als  $l_0$ . Die Geschwindigkeit eines Körpers in einer Dimension mit Koordinate  $l$  ist definiert als:

$$v = \frac{dl}{dt}$$

Das wird erweitert mit  $\frac{da}{da} = 1$

$$v = \frac{dl}{dt} \frac{da}{da} = \frac{dl}{da} \frac{da}{dt}$$

Aus  $l = a \cdot l_0$  folgt:

$$\begin{aligned} v &= l_0 \cdot \dot{a} \\ v &= \frac{l}{a} \cdot \dot{a} \\ v &= \frac{\dot{a}}{a} \cdot l = H \cdot l \end{aligned}$$

Das ist das Hubblegesetz. Setzt man für  $H$  den heutigen Wert der Hubblefunktion  $H_0$  ein, dann findet man, dass ein Körper sich, durch die Expansion begründet, heute mit einer Geschwindigkeit von uns wegbewegt, die proportional zu seiner Entfernung  $l$  ist.

$$v = H_0 \cdot l$$

Diese Beziehung fand Edwin Hubble 1929 [1] über Beobachtungen, in denen er die Doppler-Rotverschiebung des Lichts von entfernten Galaxien untersuchte. Die Entfernung fand er mit Cepheiden Sternen, welche die, von Henrietta Leavitt gefundene, Perioden-

Leuchtkraft-Beziehung erfüllen und damit kosmische Längenmessungen zulassen. Erst später wurde dafür die Expansion des Universums verantwortlich gemacht.

## 7.5 klassischer Wirkungsquerschnitt und mittlere Weglänge

**klassischer Wirkungsquerschnitt** In der klassischen Betrachtung kugelförmiger Gasteilchen von einheitlichem Radius  $r$  wird der Wirkungsquerschnitt mit  $\sigma = 2\pi r$  berechnet.

Abbildung

Die mittlere Stoßzeit berechnet sich dann aus der Dichte  $n$ , der durchschnittlichen Geschwindigkeit  $\bar{v}$  und dem Wirkungsquerschnitt:

$$\tau = \frac{1}{\sigma \cdot \bar{v} \cdot n}$$

**mittlere Weglänge** Die mittlere Weglänge ist der Weg, den ein Teilchen durchschnittlich zwischen zwei Kollisionen zurücklegt. Dafür bewegt sich das Teilchen über die mittlere Stoßzeit mit der Durchschnittsgeschwindigkeit.

$$\bar{l} = \bar{v} \cdot \bar{\tau} = \frac{1}{n \cdot \langle \sigma v \rangle}$$

## 7.6 Quelltext

```
(* Section *)
(* constants *)

cMp = 1.2209 * 10^19; (* GeV; Planck mass *)
cg = 0.65; (* weak constant *)
cMx = 100; (* GeV; WIMP mass *)
cfg = 86.25; (* Freiheitsgrad *)
ccrossS = 1;

Lambda = N[(
    ((1.204 * Pi^2)/(45 * Sqrt[fg])) * (Mp / mx) *
    (g^4 / (16 * Pi^2)) * crossS
) /. Mp -> cMp /. mx -> cMx /. g -> cg
 /. fg -> cfg /. crossS -> ccrossS
];

(* ::Temperaturunabhaengige crossection:: *)
(* ::Input:: *)
(*
x = mx/T
Y = n/s
*)
unabh[x_,Y_,c_] := N[
    ((Lambda*c / x^2)*((((mx^2/(x))^(3/2) *
    Exp[-x])/((2*Pi^2 * fg * mx^3)/(45*x^3)))^2-Y^2))
    /. mx -> cMx /. fg -> cfg
];
RungeU[a0_,b0_,s_,m0_,c0_] :=

Module[
    {a=a0,b=b0,j,m=m0,c=c0,T,Y},
    h=(b-a)/m;
    T[1]=a;
    Y[1]=s;
    For[j=1,j<=m,j++,
```

```

k1=N[h*unabh[T[j],Y[j],c]];
k2=N[h*unabh[T[j]+h/2,Y[j]+(k1)/2,c]];
k3=N[h*unabh[T[j]+h/2,Y[j]+(k2)/2,c]];
k4=N[h*unabh[T[j]+h,Y[j]+k3,c]];
Y[j+1]=Y[j]+(1/6)(k1+2*k2+2*k3+k4);
T[j+1]=a+h*j;
Transpose[{Table[T[i],{i,1,m+1}],Table[Y[i],{i,1,m+1}]}]
];

```

(\* Section \*)

(\* ::Temperaturabhaengige crosssection:: \*)

(\* ::Input:: \*)

```

abh[x_,Y_,c_] := N[( -1 * (Lambda*c (((8)/(x*Pi)))/ x^2) *
(Y^2 - (((mx^2/(x))^ (3/2) * Exp[-x])/
((2*Pi^2 * fg * mx^3)/(45*x^3)))^2)))
/. mx -> cMx /. fg -> cfg ];

```

```

RungeA[a0_,b0_,s_,m0_,c0_] :=

```

```

Module[

```

```

{a=a0,b=b0,j,m=m0,c=c0,T,Y},

```

```

h=(b-a)/m;

```

```

T[1]=a;

```

```

Y[1]=s;

```

```

For[j=1,j<=m,j++,

```

```

k1=N[h*abh[T[j],Y[j],c]];

```

```

k2=N[h*abh[T[j]+h/2,Y[j]+(k1)/2,c]];

```

```

k3=N[h*abh[T[j]+h/2,Y[j]+(k2)/2,c]];

```

```

k4=N[h*abh[T[j]+h,Y[j]+k3,c]];

```

```

Y[j+1]=Y[j]+(1/6)(k1+2*k2+2*k3+k4);

```

```

T[j+1]=a+h*j;

```

```

Transpose[{Table[T[i],{i,1,m+1}],Table[Y[i],{i,1,m+1}]}]

```

```

];

```

```
ResultA1 = RungeA[20,100,4.88*10^-9,10000,0.1];  
Put[ResultA1,"ResultA1.m"]  
ResultA2 = RungeA[20,100,4.88*10^-9,10000,0.5];  
Put[ResultA2,"ResultA2.m"];  
ResultA3 = RungeA[20,100,4.88*10^-9,10000,1];  
Put[ResultA3,"ResultA3.m"];  
ResultA4 = RungeA[20,100,4.88*10^-9,10000,2];  
Put[ResultA4,"ResultA4.m"];  
ResultA5 = RungeA[20,100,4.88*10^-9,100000,10];  
Put[ResultA5,"ResultA5.m"]
```

```
ResultU1 = RungeU[20,100,4.88*10^-9,10000,0.1];  
Put[ResultU1,"ResultU1.m"];  
ResultU2 = RungeU[20,100,4.88*10^-9,10000,0.5];  
Put[ResultU2,"ResultU2.m"];  
ResultU3 = RungeU[20,100,4.88*10^-9,10000,1];  
Put[ResultU3,"ResultU3.m"];  
ResultU4 = RungeU[20,100,4.88*10^-9,10000,2];  
Put[ResultU4,"ResultU4.m"];  
ResultU5 = RungeU[20,100,4.88*10^-9,100000,10];  
Put[ResultU5,"ResultU5.m"]
```

## 8 Abbildungen

### First Generation Fermions

Particle	Symbol	Spin	Charge	Mass (GeV)
Electron Neutrino	$\nu_e$	1/2	0	$< 7.2 \times 10^{-9}$
Electron	$e$	1/2	-1	$0.51 \times 10^{-3}$
Up Quark	$u$	1/2	2/3	$\sim 5 \times 10^{-3}$
Down Quark	$d$	1/2	-1/3	$\sim 9 \times 10^{-3}$

### Second Generation Fermions

Particle	Symbol	Spin	Charge	Mass (GeV)
Muon Neutrino	$\nu_\mu$	1/2	0	$< 2.7 \times 10^{-4}$
Muon	$\mu$	1/2	-1	0.106
Charm Quark	$c$	1/2	2/3	$\sim 1.35$
Strange Quark	$s$	1/2	-1/3	$\sim 0.175$

### Third Generation Fermions

Particle	Symbol	Spin	Charge	Mass (GeV)
Tau Neutrino	$\nu_\tau$	1/2	0	$< 3 \times 10^{-2}$
Tau Lepton	$\tau$	1/2	-1	1.78
Top Quark	$t$	1/2	2/3	$174 \pm 17$
Bottom Quark	$b$	1/2	-1/3	$\sim 4.5$

### Gauge Bosons

Particle	Symbol	Spin	Charge	Mass (GeV)
Photon	$\gamma$	1	0	0
W Boson	$W$	1	$\pm 1$	80.22
Z Boson	$Z$	1	0	91.19
Gluons	$g$	1	0	0

### Higgs Boson

Particle	Symbol	Spin	Charge	Mass (GeV)
Higgs Boson	$H$	0	0	$63 < M_H < 800$

Abbildung 20: Eigenschaften der Teilchen des Standardmodells

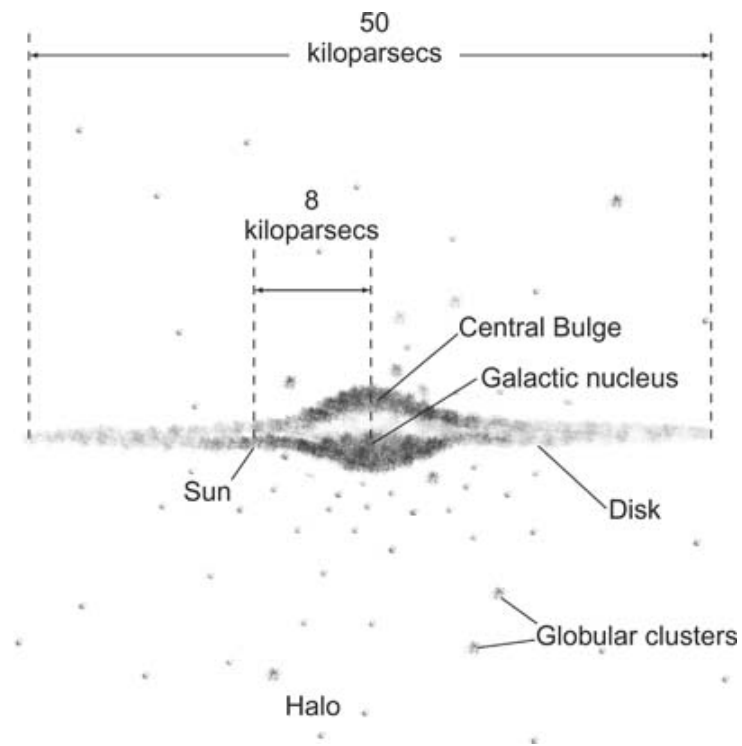


Abbildung 1: Aufbau einer Spiralgalaxie

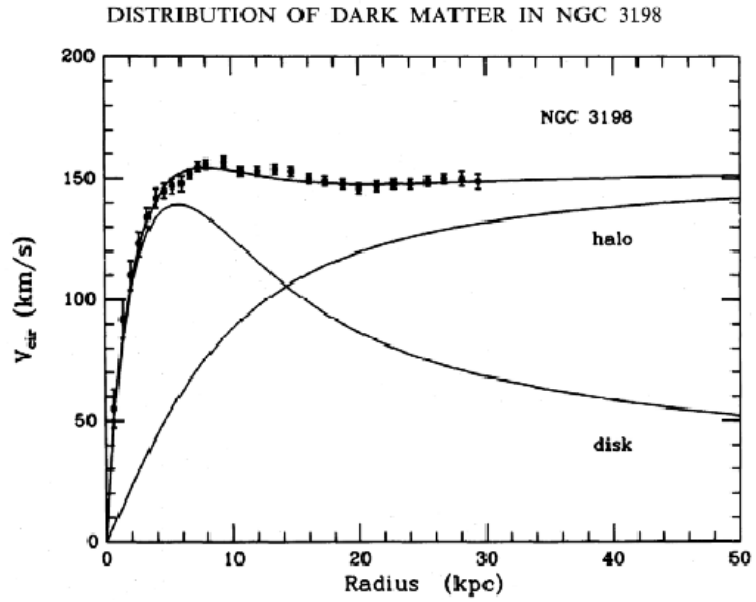


Abbildung 2: Graph der gemessenen Rotationsgeschwindigkeiten in NGC 3198

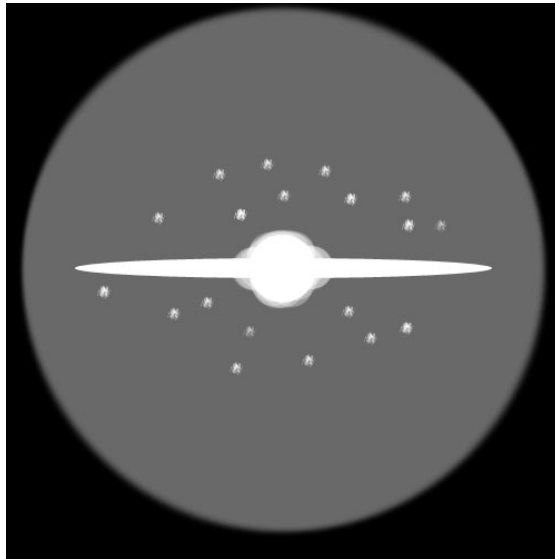


Abbildung 3: Modellvorstellung des DM-Halos

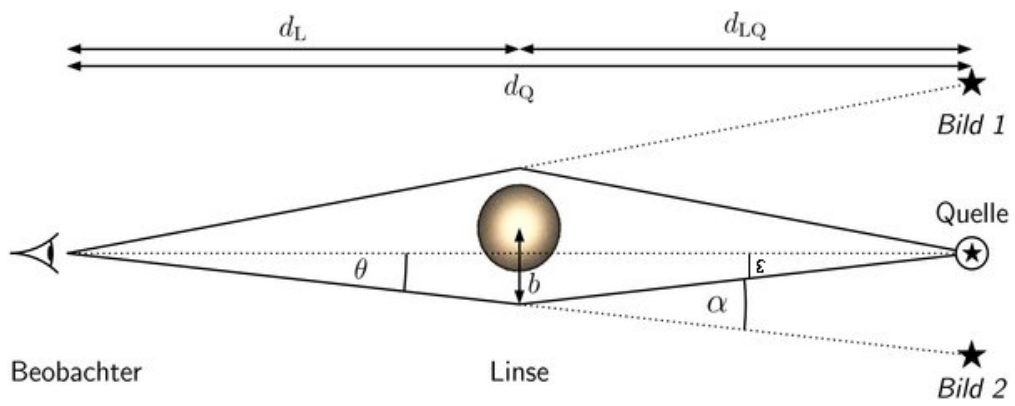


Abbildung 4: Der Gravitationslinseneffekt erzeugt mehrere Bilder einer Quelle

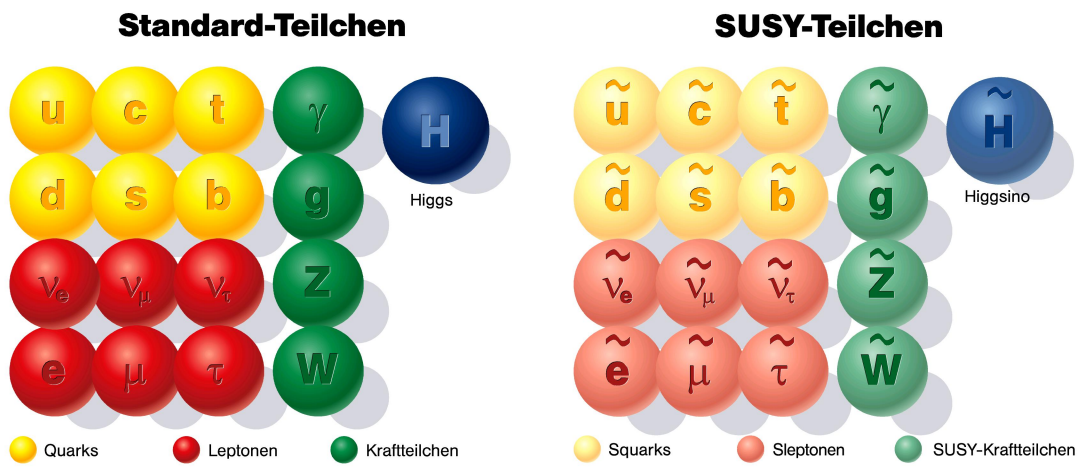


Abbildung 5: Gruppierung der Teilchen des Standardmodells (links) und der SUSY Teilchen (rechts)

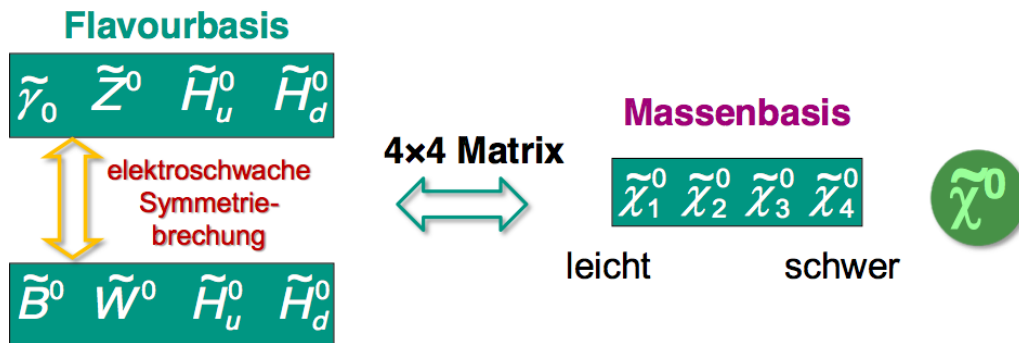


Abbildung 6: Die Mischung ergibt 4 Neutralinos

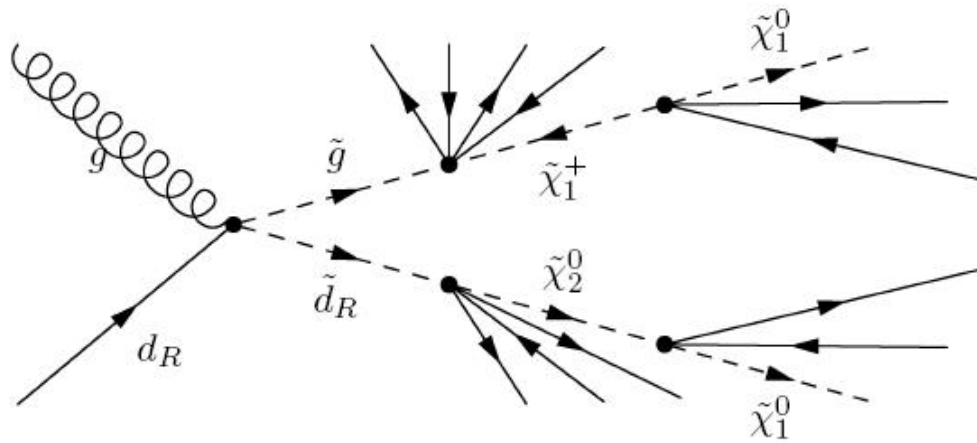


Abbildung 7: angestrebter Streuprozess zum Nachweis von Neutralinos

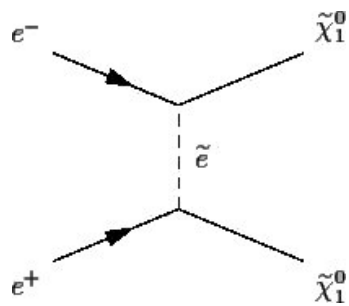


Abbildung 8: Produktion zweier Neutralinos bei der Kollision eines Elektrons mit einem Positron

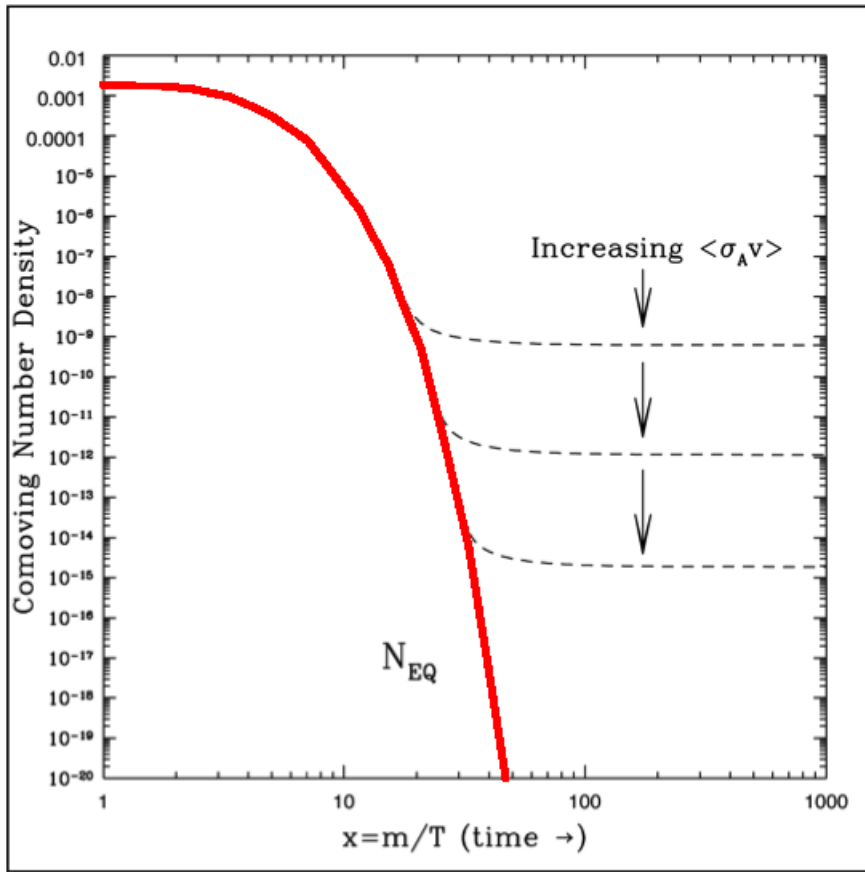


Abbildung 9: Restdichtenentwicklung bei verschiedenen  $\langle\sigma v\rangle$

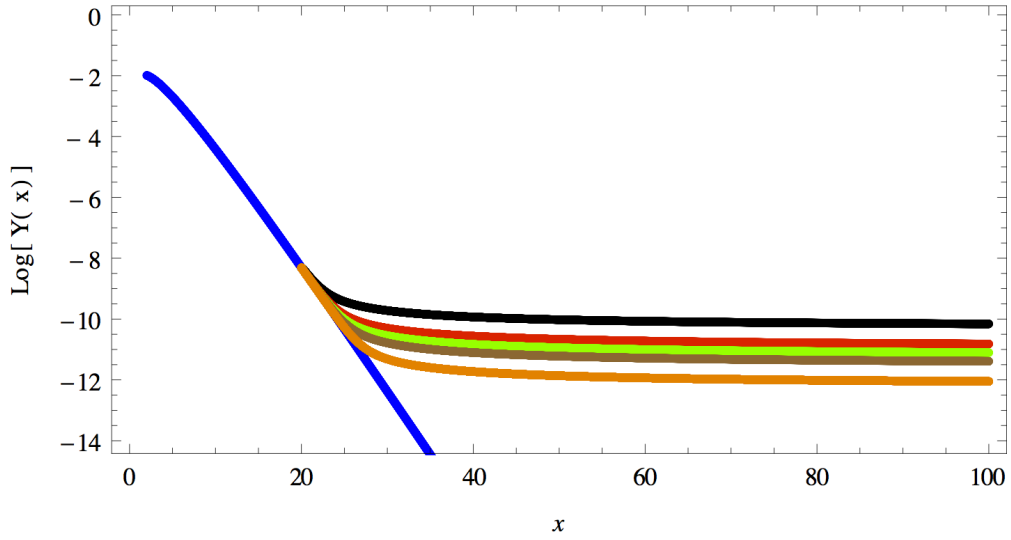


Abbildung 10: Temperaturunabhängiges  $\sigma$ , Ergebnisse der Simulation bei einer Masse von 100 GeV für:  $a=10$  (orange);  $a=2$  (braun);  $a=1$  (grün);  $a=0,5$  (rot);  $a=0,1$  (schwarz)

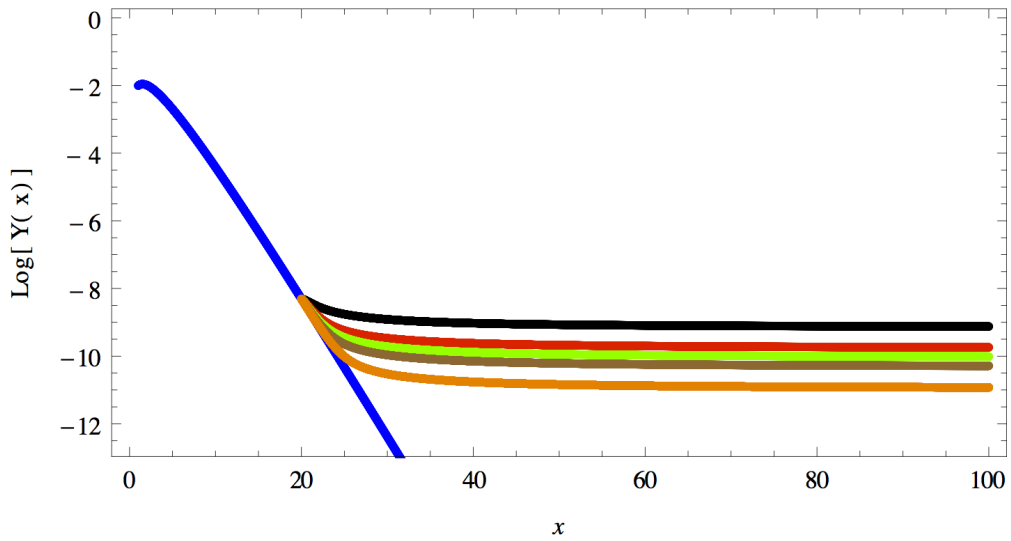


Abbildung 11: Temperaturabhängiges  $\sigma$ , Ergebnisse der Simulation bei einer Masse von 100 GeV für:  $b=10$  (orange);  $b=2$  (braun);  $b=1$  (grün);  $b=0,5$  (rot);  $b=0,1$  (schwarz)

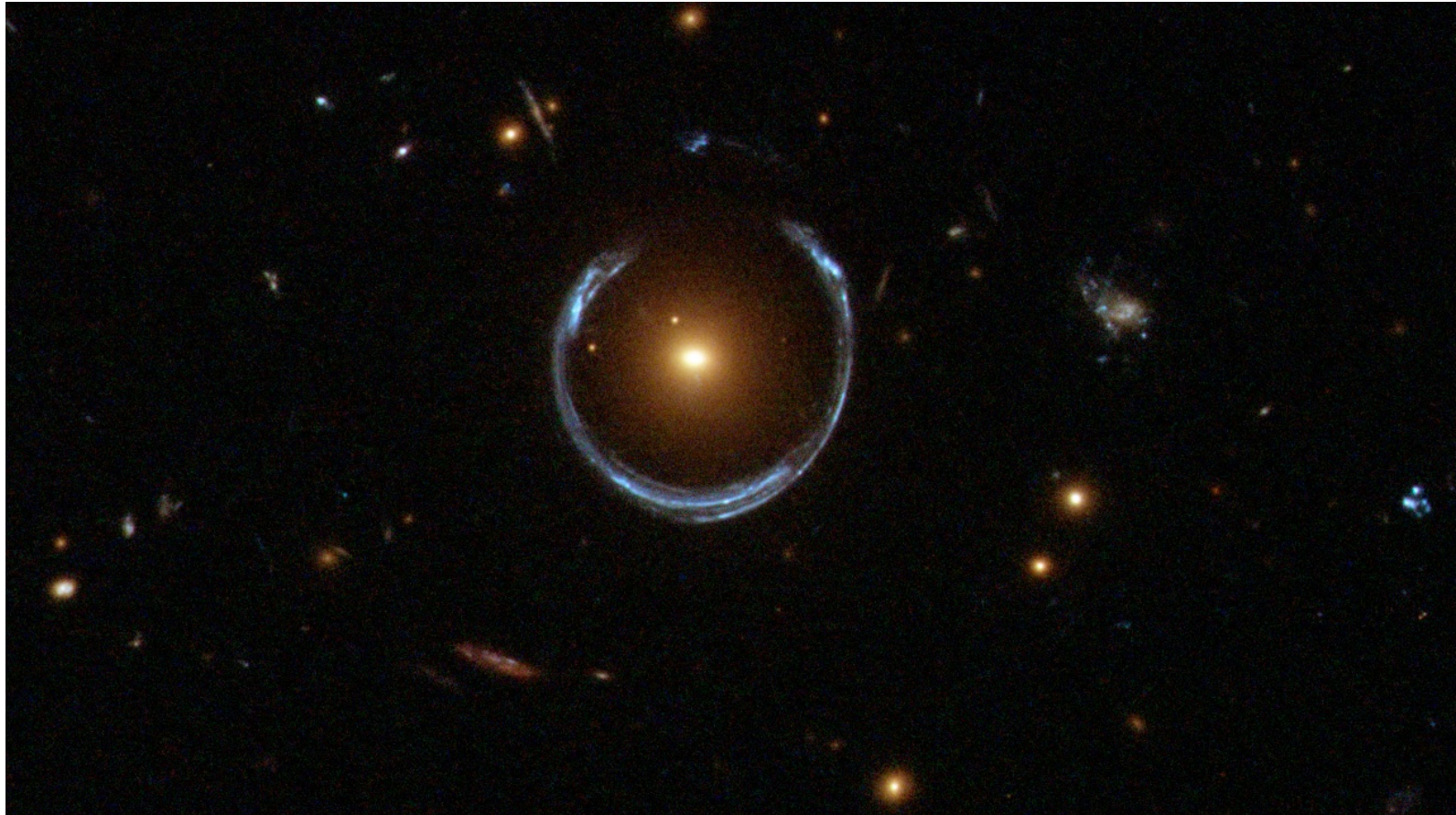


Abbildung 21: Die Galaxie LRG 3-757 als Gravitationslinse

## **Erklärung**

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, dass alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht sind und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Meißen, den 20. Dezember 2012