
Elektrodynamik

für das Lehramt

Carsten Timm

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	5
1.1	Warum Theoretische Physik im Lehramtsstudium?	5
1.2	Ziele und Stellung der Elektrodynamik	5
1.2.1	Geschichte der Elektrodynamik	5
1.2.2	Stellung der Elektrodynamik innerhalb der Theoretischen Physik	6
1.3	Überblick	7
1.4	Lehrbücher	7
1.5	Danksagung	8
2	Mathematische Grundlagen	9
2.1	Vektoren und Koordinatensysteme	9
2.1.1	Produkte von Vektoren	9
2.1.2	Felder und partielle Ableitungen	11
2.1.3	Koordinatensysteme	11
2.1.4	Vektoren und Pseudovektoren	18
2.2	Vektoranalysis: Ableitungen im \mathbb{R}^3	18
2.2.1	Erste Ableitungen	18
2.2.2	Zweite Ableitungen	24
2.3	Vektoranalysis: Integration im \mathbb{R}^3	26
2.3.1	Der Fundamentalsatz	32
2.3.2	Potentiale	36
2.4	Die Diracsche δ -Funktion	39
2.4.1	Die δ -Funktion in einer Dimension	40
2.4.2	Die δ -Funktion im \mathbb{R}^3	42
3	Mikroskopische Elektrostatik	43
3.1	Das Coulomb-Gesetz	44
3.1.1	Kontinuierliche Ladungsdichte	45
3.2	Feldlinien	47
3.3	Das Gaußsche Gesetz	48
3.4	Rotation von \vec{E} und skalares Potential	52
3.4.1	Das skalare Potential	53
3.4.2	Die Poisson- und die Laplace-Gleichung	56
3.4.3	Weitere Eigenschaften der Laplace-Gleichung	57
3.5	Arbeit und Energie in der Elektrostatik	60
3.6	Leiter	63
3.6.1	Oberflächenladung und elektrisches Feld	65
3.7	Kondensatoren	67
3.7.1	Energie in Kondensatoren	68
3.8	Randwertprobleme	69
3.8.1	Bildladungsmethode	70

3.8.2	Separation der Variablen	73
3.8.3	Green-Funktionen	76
3.9	Multipolentwicklung	78
3.9.1	Die Taylor-Reihe	78
3.9.2	Multipolentwicklung für das Coulomb-Gesetz	79
4	Makroskopische Elektrostatik	83
4.1	Polarisation von Atomen und Molekülen	83
4.1.1	Induzierte Dipole	83
4.1.2	Polare Moleküle	85
4.2	Polarisation von Materie	85
4.3	Das Verschiebungsfeld	89
4.3.1	Anschlussbedingungen	90
4.4	Lineare Dielektrika	91
4.4.1	Die Laplace-Gleichung in Dielektrika	94
4.4.2	Feldenergie in Dielektrika	95
5	Mikroskopische Magnetostatik	97
5.1	Die Lorentz-Kraft	97
5.2	Ströme	100
5.2.1	Die Kontinuitätsgleichung	102
5.3	Das Biot-Savart-Gesetz	102
5.4	Das Ampèresche Gesetz und das Vektorpotential	105
5.4.1	Das Ampèresche Gesetz	105
5.4.2	Die ideale Spule	107
5.4.3	Divergenz des Induktionsfeldes und Vektorpotential	108
5.4.4	Vektorpotential und magnetischer Fluss	111
5.5	Multipolentwicklung	112
5.6	Leiter und der Hall-Effekt	114
6	Makroskopische Magnetostatik	116
6.1	Magnetische Dipolmomente	116
6.1.1	Permanente magnetische Momente	116
6.1.2	Induzierte magnetische Momente	118
6.2	Magnetisierung von Materie	120
6.3	Das Magnetfeld \vec{H}	122
6.4	Lineare Medien	124
6.5	Das Ohmsche Gesetz	125
7	Elektrodynamik	127
7.1	Das Faradaysche Induktionsgesetz	127
7.2	Das Ampère-Maxwell-Gesetz	128
7.3	Die Maxwell-Gleichungen	130
7.3.1	Potentiale	131
7.3.2	Eichinvarianz	132
7.4	Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes	134
7.5	Elektromagnetische Wellen	136
7.5.1	Energie und Impuls elektromagnetischer Wellen	138
7.5.2	Elektromagnetische Wellen in linearen Medien	139

8 Relativistische Formulierung der Elektrodynamik	140
8.1 Spezielle Relativitätstheorie	140
8.2 Viererdarstellung der Elektrodynamik	144
8.2.1 Die Kontinuitätsgleichung	144
8.2.2 Potentiale	145
8.2.3 Der Feldstärketensor	147
8.2.4 Der duale Feldstärketensor	150
8.2.5 Elektromagnetische Wellen	151

Kapitel 1

Einführung

1.1 Warum Theoretische Physik im Lehramtsstudium?

- ... weil Sie physikalische Zusammenhänge verstehen müssen, um sie erklären zu können. Der Schulstoff reicht nicht aus, um Physik zu verstehen. Nur wenn Sie ein tieferes Verständnis haben, können Sie entscheiden, welche begrifflichen Hilfsmittel Sie in der konkreten Situation bei der Erklärung verwenden wollen und welche Details Sie erwähnen oder weglassen sollten. Die in der Experimentalphysikvorlesung oder dem Schulbuch angebotenen Erklärungen werden nicht immer für die jeweilige Situation angemessen oder ausreichend sein. Mit Bertolt Brecht: „Ich rate, lieber mehr zu können als man macht, als mehr zu machen als man kann.“
- ... weil die Vorlesungen der Experimentalphysik oft nicht die Zusammenhänge und die zu Grunde liegenden Prinzipien herausstellen. Damit besteht die Gefahr, dass Ihnen – und in der Folge Ihren späteren Schülern – die Physik als Reihung von zusammenhanglosen Erfahrungstatsachen erscheint.
- ... weil nur im Zusammenwirken von Beobachtung/Experiment und Theorie, im Sinne von „strukturiertem Nachdenken“, wissenschaftliche Erkenntnis gewonnen werden kann. Das ist im Unterricht genauso. Ein Ziel der Ausbildung ist also die Anleitung zu diesem „strukturierten Nachdenken“.
- ... weil es Ihnen erleichtert, neue Aufgaben zu entwickeln, wenn Ihnen die vorhandenen Aufgaben nicht geeignet erscheinen.
- ... weil Sie aktuelle Entwicklungen in der Physik nur dann verfolgen und ggf. im Unterricht aufgreifen können, wenn Sie sie in ein Gesamtkonzept einordnen können.
- ... weil die Theoretische Physik Sie die Welt auf einem fundamentalen Niveau besser verstehen lässt, was intellektuell befriedigend ist, unabhängig vom praktischen Nutzen. Wir gehen davon aus, dass Sie Physik als Unterrichtsfach gewählt haben, weil es Sie interessiert.

1.2 Ziele und Stellung der Elektrodynamik

Diese Vorlesung bildet den zweiten Teil des Theoriezyklus bestehend aus Mechanik, Elektrodynamik, Quantentheorie und Thermodynamik/Statistik. Sie beschäftigt sich mit der klassischen Theorie der elektromagnetischen Felder und der elektrischen Ladungen und Ströme. Dabei geht es auch um die Bewegung geladener Teilchen, insofern setzen wir die klassische, v. a. die Newtonsche, Mechanik voraus.

1.2.1 Geschichte der Elektrodynamik

Historisch ist die Elektrodynamik aus drei ursprünglich strikt getrennten Feldern entstanden:

1. Elektrizität: Blitze, statische Elektrizität, elektrische Ströme, Elektrochemie

2. Magnetismus: Magneteisensteine, Kompass und Erdmagnetfeld

3. Optik: Licht, Reflektion, Brechung, Beugung

Die meisten dieser Effekte waren bereits in der Antike bekannt. Aber bis ungefähr 1820 war nicht klar, dass sie etwas miteinander zu tun haben. 1820 entdeckte H. C. Ørsted, dass ein elektrischer Strom eine Kompassnadel ablenken kann. Daraufhin schlug A.-M. Ampère noch im selben Jahr vor, dass alle magnetischen Erscheinungen auf bewegten Ladungen beruhen. Das ist letztendlich korrekt. 1831 entdeckte M. Faraday, dass umgekehrt ein bewegter Magnet elektrische Ströme hervorrufen kann (Induktion). Diese und weitere Experimente legten nahe, dass Elektrizität und Magnetismus nur zwei Aspekte derselben zugrundeliegenden Physik sind. Man konnte daher erwarten, dass sie sich durch eine *vereinheitlichte* Theorie beschreiben lassen. Diese wurde von J. C. Maxwell aufgestellt und 1864 veröffentlicht. Die Maxwellsche Elektrodynamik ist neben der korrekten Beschreibung elektromagnetischer Phänomene auch aus weiteren Gründen konzeptionell sehr wichtig:

- Sie war die erste *vereinheitlichte Theorie*. Das Ziel der Vereinheitlichung ist ein wichtiges Paradigma in der Entwicklung neuer Theorien, z. B. der elektroschwachen Wechselwirkung (Vereinheitlichung von Elektromagnetismus und schwacher Kraft).
- Sie ist der Prototyp einer *Feldtheorie*.
- Sie war entscheidend für die Entwicklung der *Speziellen Relativitätstheorie*. Tatsächlich ist sie bereits eine relativistische (Lorentz-invariante) Theorie, auch wenn man ihr das nicht gleich ansieht.

Die Maxwellschen Gleichungen sagen elektromagnetische Wellen voraus. Sie liefern damit eine solide Basis für eine Spekulation von Faraday, wonach Licht ein elektromagnetisches Phänomen sein sollte. Elektromagnetische Wellen wurden 1888 von Heinrich Hertz nachgewiesen, was die Maxwellsche Theorie glänzend bestätigte. Damit war die Optik ebenfalls ein Aspekt der vereinheitlichten Theorie des Elektromagnetismus geworden.

1.2.2 Stellung der Elektrodynamik innerhalb der Theoretischen Physik

Gemäß der Unterscheidung von Massenpunkten und Feldern sowie von klassischer und Quantenphysik können wir folgende Tabelle aufstellen:

	Massenpunkte	Felder
Klassische Theorien	Klassische Mechanik	Kontinuumsmechanik <ul style="list-style-type: none"> • Aerodynamik • Hydrodynamik • Elastizitätslehre <i>Elektrodynamik</i> Allgemeine Relativitätstheorie
Quantentheorien	Quantenmechanik	Quantenfeldtheorien <ul style="list-style-type: none"> • Quantenelektrodynamik • Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung • Quantenchromodynamik • Quantengravitation?

Auch die Quantenmechanik für Massenpunkte führt, in der Formulierung durch E. Schrödinger, ein Feld ein, nämlich die Wellenfunktion $\psi(\vec{r}, t)$. Ein *Feld* ist ganz allgemein eine Größe, die vom Ort \vec{r} abhängt. Es kann

zusätzlich auch von der Zeit t abhängen. Felder werden mathematisch sinnvollerweise durch *partielle Differentialgleichungen* beschrieben, d. h. Differentialgleichungen, die Ableitungen nach mehreren Variablen – hier i. A. x, y, z, t – enthalten. Daneben ist auch für Felder, wie in der Klassischen Mechanik, eine Beschreibung durch *Variationsprinzipien* möglich. Diese spielt aber in dieser Vorlesung keine Rolle. Notwendige mathematische Methoden werden in der Vorlesung eingeführt bzw. wiederholt.

1.3 Überblick

Die folgenden Themen werden in diesem Skript behandelt:

- Mathematische Grundlagen (Vektoranalysis und Integration im \mathbb{R}^3 , δ -„Funktion“)
- Elektrostatik im Vakuum
- Elektrostatik in Materie
- Magnetostatik im Vakuum
- Magnetostatik in Materie
- Elektrodynamik und Eichtheorie
- Elektromagnetische Wellen
- Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

Anwendungen der Methoden werden meist in den Übungen diskutiert.

1.4 Lehrbücher

Die zahlreichen verfügbaren Lehrbücher der Elektrodynamik unterscheiden sich recht stark im Stoffumfang und im Stil. Ein speziell für die Elektrodynamik wesentlicher Punkt betrifft das verwendete Einheitensystem. Diese Vorlesung verwendet SI-Einheiten. Sie sollten einige Bücher durchblättern, um zu entscheiden, welches Ihnen am meisten liegt. Es ist empfehlenswert, ein Buch zu kaufen und zu behalten, um später Stoff wiederholen zu können. Hier ist eine unvollständige Liste von Lehrbüchern:

- W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik, Band 3: Elektrodynamik*, 8. Aufl. (Springer-Verlag, Berlin, 2007): Die gesamte Reihe von Lehrbüchern ist empfehlenswert. Nolting legt relativ großes Gewicht auf das Einüben der Formalismen und entsprechend weniger auf die ausführliche Diskussion des physikalischen Gehalts. Er führt Herleitungen oft im Detail vor, wo andere Autoren nur das Ergebnis angeben. Die Darstellung ist überwiegend klar und korrekt. Nolting verwendet SI-Einheiten. Die Bücher enthalten gute Übungsaufgaben mit Lösungen. Sie enthalten auch viele nützliche Kontrollfragen. Das Buch geht nur wenig über den Vorlesungsstoff hinaus. Andererseits findet sich das Material zur relativistischen Formulierung in *Grundkurs Theoretische Physik, Band 4: Spezielle Relativitätstheorie, Thermodynamik*, 6. Aufl. (Springer-Verlag, Berlin, 2005).
- W. Greiner, *Theoretische Physik, Band 3: Klassische Elektrodynamik*, 7. Aufl. (Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main, 2008): Ebenfalls Teil einer Reihe von Lehrbüchern zur Theoretischen Physik. Ebenfalls ein gutes Lehrbuch mit recht großem Gewicht auf dem Formalismus, enthält im Vergleich zu Noltings Buch etwas weniger Zwischenschritte in Herleitungen. Der Stoffumfang ist vergleichbar mit Noltings Buch, wobei die relativistische Formulierung aber enthalten ist. Greiner verwendet Gaußsche Einheiten. Das Buch enthält Beispiele und einige Aufgaben mit Lösungen. Als Spezialität enthält es relativ viele historische Anmerkungen.

- D. J. Griffiths, *Elektrodynamik: Eine Einführung*, 3. Aufl. (Pearson Studium, München, 2011): Deutsche Übersetzung eines in den U.S.A. weit verbreiteten *undergraduate* (B.Sc.) Lehrbuchs. Das technische Niveau ist daher etwas niedriger als bei Nolting und Greiner, aber auf jeden Fall ausreichend für diese Vorlesung. Griffiths legt deutlich mehr Wert auf die klare Diskussion der Physik und der Bedeutung der Formalismen, was als Vorzug im Vergleich zu den übrigen Büchern gelten kann. Griffiths verwendet SI-Einheiten. Das Buch enthält Aufgaben, nur z. T. mit Lösungen. Der Stoffumfang geht kaum über diese Vorlesung hinaus. Der im englischen Original angenehme informelle Stil des Buches ist in der – ansonsten guten – deutschen Übersetzung weitgehend verloren gegangen. Diese Vorlesung beruht überwiegend auf dem Buch von Griffiths (im englischen Original).
- J. D. Jackson, *Klassische Elektrodynamik*, 4. Aufl. (de Gruyter, Berlin, 2006): Deutsche Übersetzung des klassischen *graduate* (M.Sc.) U.S.-Lehrbuchs. Technisch deutlich anspruchsvoller als die vorgenannten Bücher, geht im Stoffumfang auch deutlich über die Vorlesung hinaus. Die hier wichtigen Konzepte werden aber sorgfältig besprochen. Eventuell nützlich zum Nachlesen über mathematische Methoden. Jackson verwendet überwiegend SI-Einheiten, bei der Diskussion der relativistischen Formulierung aber Gaußsche Einheiten, was die Ausdrücke geringfügig vereinfacht. Das Buch enthält Aufgaben ohne Lösungen.
- L. D. Landau und E. M. Lifschitz, *Klassische Feldtheorie*, 12. Aufl. (Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main, 1997): Teil einer Reihe von russischen Lehrbüchern der Theoretischen Physik in deutscher Übersetzung, hier v. a. als „Klassiker“ genannt. Das Buch enthält die Elektrodynamik und die Allgemeine Relativitätstheorie (!), also die beiden wichtigsten klassischen Feldtheorien. Technisch anspruchsvoll und sehr knapp in der Darstellung. Zwischenschritte werden nie angegeben. Kann zum Nachlesen nützlich sein, wenn nichts anderes hilft. Enthält einige schwierige Aufgaben ohne Lösungen.
- R. P. Feynman, R. B. Leighton und M. Sands, *Feynman-Vorlesungen über Physik, Band II: Elektromagnetismus und Struktur der Materie* (Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, September 2007): Dieses Buch fällt aus der Rahmen, da es kein Lehrbuch der Theoretischen Physik ist, sondern aus Richard Feynmans Einführungsvorlesungen, konkret dem Analogon der Experimentalphysik II, entwickelt wurde. Es hat für ein Lehrbuch zur Einführungsvorlesung jedoch ein sehr hohes Niveau und wurde offensichtlich von einem Theoretiker konzipiert. Es deckt daher einen großen Teil des Stoffes dieser Vorlesung ab. Die Darstellung ist didaktisch sehr gut und noch ausführlicher als in Griffiths Buch. Das Buch verwendet SI-Einheiten. Keine Aufgaben.

1.5 Danksagung

Ich danke Frau Franziska Peter für die Erstellung der LaTeX-Datei und der Abbildungen der ersten Version. Außerdem bin ich Herrn Thomas Beyer und Herrn Jan Wichmann für Hinweise auf Tippfehler und Unklarheiten dankbar.

Kapitel 2

Mathematische Grundlagen

In diesem Kapitel stellen wir die mathematischen Grundlagen bereit, die für die gesamte Vorlesung von Bedeutung sind. Es handelt sich v. a. um Definitionen und Sätze aus der Analysis im \mathbb{R}^3 . Speziellere mathematische Methoden werden wir besprechen, wenn wir sie benötigen.

2.1 Vektoren und Koordinatensysteme

Ein *Vektor* ist, grob gesprochen, eine Größe, die durch einen *Betrag* und eine *Richtung* charakterisiert ist. Beispiele sind der Ort und Ortsdifferenzen (Verschiebungen), Geschwindigkeit und Beschleunigung. Eine exakte Definition folgt später. Ein *Skalar* ist demgegenüber eine Größe ohne Richtungssinn, zum Beispiel die Masse. Wir verwenden hier als Notation für Vektoren einen Vektorpfeil über dem Symbol: \vec{r} . Viele Bücher verwenden für Vektoren Buchstaben in Fettschrift, entweder aufrecht oder kursiv. Für *Einheitsvektoren*, d. h. Vektoren mit dem Betrag eins, verwenden wir einen Zirkumflex über dem Symbol: \hat{r} . Für den Betrag eines Vektors schreiben wir oft das entsprechende Symbol ohne Vektorpfeil, also z. B.:

$$r := |\vec{r}| \quad \text{und damit} \quad \hat{r} := \frac{\vec{r}}{r}. \quad (2.1)$$

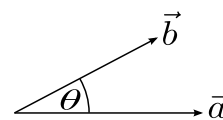
2.1.1 Produkte von Vektoren

Die Regel für die Addition von Vektoren setzen wir als bekannt voraus. Auch die Multiplikation lässt sich auf Vektoren verallgemeinern, jedoch auf mehr als eine Art. Für zwei Vektoren \vec{a} , \vec{b} definiert man folgende Produkte:

(a) Skalarprodukt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \equiv ab \cos \theta, \quad (2.2)$$

wobei θ der eingeschlossene Winkel ist. Das Ergebnis ist ein *Skalar*. In kartesischen Koordinaten lautet es $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$. Eine alternative Schreibweise ist $\vec{a}^T \vec{b}$. T steht für den transponierten Vektor, also den *Zeilenvektor* (Matrix mit einer Zeile) \vec{a}^T zum *Spaltenvektor* (Matrix mit einer Spalte) \vec{a} .



In $\vec{a}^T \vec{b}$ ergibt sich das Skalarprodukt als Spezialfall der üblichen Regel für Matrizenmultiplikation („Zeile mal Spalte“). Diese Schreibweise verwenden wir hier nicht; wir unterscheiden nicht zwischen Zeilen- und Spaltenvektoren. Aus dem Skalarprodukt erhalten wir die (übliche) Norm eines Vektors $|\vec{a}| := \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

(b) Vektorprodukt (Kreuzprodukt):

$$\vec{a} \times \vec{b} := ab \sin \theta \hat{n}, \quad (2.3)$$

wobei θ der eingeschlossene Winkel und \hat{n} der auf der von \vec{a} , \vec{b} aufgespannten Ebene senkrecht stehende Einheitsvektor ist, so dass \vec{a} , \vec{b} , \hat{n} ein *Rechtssystem* bilden. Diese Definition von \hat{n} ist nicht eindeutig, falls \vec{a} und \vec{b} parallel liegen, aber dann ist ohnehin $\theta = 0$ und damit $\vec{a} \times \vec{b} = 0$. In kartesischen Koordinaten ist

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ ist also *antikommutativ*: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. Das Kreuzprodukt können wir mit Hilfe des *Levi-Civita-Symbols* ϵ_{ijk} auch schreiben als

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} a_j b_k. \quad (2.5)$$

Zur Erinnerung:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{für } (i, j, k) \text{ gerade Permutationen von } (1, 2, 3), \\ -1 & \text{für } (i, j, k) \text{ ungerade Permutationen von } (1, 2, 3), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.6)$$

Das Vektorprodukt lässt sich, anders als das Skalarprodukt, nicht leicht auf $n \neq 3$ Dimensionen verallgemeinern.

(c) Äußeres Produkt (Tensorprodukt):

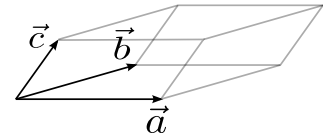
$$\vec{a} \vec{b} = \vec{a} \otimes \vec{b}. \quad (2.7)$$

Das äußere Produkt ist eine Matrix, die in kartesischen Koordinaten lautet:

$$\vec{a} \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Man nennt diese spezielle Form von Matrix auch eine *Dyade*. Eine alternative Schreibweise ist $\vec{a} \vec{b}^T$, man kann sich überzeugen, dass diese Notation unter Beachtung der Regel „Zeile mal Spalte“ sinnvoll ist.

Für drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} ist insbesondere das *Spatprodukt* $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ wichtig. Es ist ein Skalar, dessen Betrag das *Volumen* des durch \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} aufgespannten *Parallelepiped*s ist. Das Vorzeichen ist $+$ ($-$), wenn \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} ein Rechtssystem (Linkssystem) bilden. Es gilt



$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad (2.9)$$

$$= -\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) = -\vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = -\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}). \quad (2.10)$$

In kartesischen Koordinaten ist das Spatprodukt eine Determinante:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (2.11)$$

Aus drei Vektoren können wir auch den Vektor $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ bilden. Hierfür gilt die „BAC-CAB-Regel“:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}). \quad (2.12)$$

Die Zeichenketten „ $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$ “ und „ $\vec{a} \times (\vec{b} \cdot \vec{c})$ “ sind nicht wohlgeformt und stellen daher keine mathematischen Ausdrücke dar.

2.1.2 Felder und partielle Ableitungen

Wir hatten bereits den Begriff des *Feldes* als vom Ort \vec{r} und evtl. von der Zeit (und weiteren Parametern) abhängiger Größe eingeführt. Ist an jedem Ort ein Skalar definiert, sprechen wir von einem *skalaren Feld*. Ein Beispiel ist die Dichte $\rho(\vec{r})$ einer Flüssigkeit (wir vernachlässigen hier die atomare Struktur, indem wir über kleine Volumina mitteln, die dennoch groß im Vergleich zu atomaren Abständen sind). Ist die Größe ein Vektor, so sprechen wir von einem *Vektorfeld*, z. B. von der Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r})$ der Flüssigkeit.

In der Mechanik haben wir Bewegungsgleichungen mit Hilfe von (Zeit-) Ableitungen geschrieben. Dies wollen wir auch für Felder tun. Dabei müssen wir beachten, dass Felder von *mehreren* unabhängigen Variablen, z. B. x, y, z, t , abhängen. Bei der Ableitung nach einer davon sollen die übrigen konstant gehalten werden. Das wird durch die *partielle Ableitung* ausgedrückt: Für $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ ist

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho(\vec{r}, t + \Delta t) - \rho(\vec{r}, t)}{\Delta t}. \quad (2.13)$$

Dies ist die Ableitung nach einem Skalar. Die Ableitung nach einer Vektorkomponente sieht genauso aus:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\rho(x + \Delta x, y, z, t) - \rho(x, y, z, t)}{\Delta x}. \quad (2.14)$$

Bisher haben wir nur eine unabhängige Variable geändert. Wie ändert sich ρ , wenn wir vom Ort \vec{r} nach $\vec{r} + \Delta\vec{r}$ gehen und von der Zeit t nach $t + \Delta t$? Die gesuchte Änderung $\Delta\rho$ von ρ ergibt sich aus einer Taylor-Entwicklung in *allen* Variablen:

$$\rho(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t + \Delta t) = \rho(\vec{r}, t) + \frac{\partial \rho}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \rho}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \rho}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta t + \text{Terme höherer Ordnung}. \quad (2.15)$$

Es folgt

$$\Delta\rho = \rho(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t + \Delta t) - \rho(\vec{r}, t) \cong \frac{\partial \rho}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \rho}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \rho}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta t. \quad (2.16)$$

Das Zeichen „ \cong “ bedeutet „bis auf Terme höherer Ordnung“. Machen wir die Änderungen $\Delta\vec{r}, \Delta t$ infinitesimal, so folgt

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial y} dy + \frac{\partial \rho}{\partial z} dz + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt. \quad (2.17)$$

und hier steht „ \cong “, da die Terme höherer Ordnung im Vergleich zu dx schneller gegen Null gehen (z. B. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x^2 / \Delta x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0$). $d\rho$ heißt *totales Differential* von ρ .

2.1.3 Koordinatensysteme

Es ist oft sinnvoll, Größen in verschiedenen Koordinatensystemen darzustellen, da in geeigneten Koordinatensystemen die Lösung bestimmter Probleme sehr viel einfacher wird. Wir beschränken uns in der folgenden Diskussion auf dreidimensionale Räume, die Verallgemeinerung auf n -dimensionale Räume ist einfach.

Wir betrachten zunächst den Ortsvektor \vec{r} , der einen Raumpunkt beschreibt. Offenbar werden drei reelle Größen benötigt, um einen Punkt im dreidimensionalen Raum eindeutig zu charakterisieren. Verschiedene Arten der Charakterisierung entsprechen verschiedenen Koordinatensystemen. Zum Beispiel können wir \vec{r} durch *kartesische Koordinaten* $(x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$ darstellen. Wir wissen, dass jeder Vektor \vec{r} für ein fest gewähltes kartesisches Koordinatensystem *eindeutig* durch ein Zahlentripel (x, y, z) dargestellt wird, d. h. zu jedem \vec{r} existiert genau ein Tripel (x, y, z) .

Sei $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ eine Darstellung *desselben* Ortsvektors \vec{r} in einem anderen Koordinatensystem. Es scheint sinnvoll zu verlangen, dass diese Darstellung ebenfalls eindeutig ist, d. h., dass zu jedem \vec{r} genau ein Tripel $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$. Diese Forderung ist aber etwas zu streng und schließt daher nützliche Koordinatensysteme aus. So ist in ebenen Polarkoordinaten der Winkel ϕ für $\vec{r} = 0$ offensichtlich nicht eindeutig bestimmt. Also verlangen wir nur, dass die Abbildung *fast überall* eindeutig sein soll. („Fast überall“ bedeutet überall bis auf eine Menge vom

Maß Null, d. h. in drei Dimensionen bis auf eine Menge mit verschwindendem Volumen. Das kann z. B. eine Kurve oder eine Menge von Punkten sein.) Für zwei Darstellungen $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ und (χ_1, χ_2, χ_3) desselben Ortsvektors \vec{r} in unterschiedlichen Koordinatensystemen fordern wir entsprechend, dass die *Koordinatentransformation*

$$\chi_1 = \chi_1(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3), \quad (2.18)$$

$$\chi_2 = \chi_2(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3), \quad (2.19)$$

$$\chi_3 = \chi_3(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \quad (2.20)$$

fast überall umkehrbar sein soll.

Diese Transformation ist an einem gegebenen Punkt umkehrbar, wenn infinitesimale Änderungen $d\zeta_i$ von ζ_i ($i = 1, 2, 3$) dort eineindeutig auf infinitesimale Änderungen $d\chi_j$ von χ_j ($j = 1, 2, 3$) abgebildet werden. Es gilt

$$d\chi_j = \chi_j(\zeta_1 + d\zeta_1, \zeta_2 + d\zeta_2, \zeta_3 + d\zeta_3) - \chi_j(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \frac{\partial \chi_j}{\partial \zeta_1} d\zeta_1 + \frac{\partial \chi_j}{\partial \zeta_2} d\zeta_2 + \frac{\partial \chi_j}{\partial \zeta_3} d\zeta_3 = \sum_i \frac{\partial \chi_j}{\partial \zeta_i} d\zeta_i. \quad (2.21)$$

Das können wir auch als Multiplikation mit einer Matrix schreiben,

$$\begin{pmatrix} d\chi_1 \\ d\chi_2 \\ d\chi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial \chi_1}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial \chi_1}{\partial \zeta_3} \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial \chi_2}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial \chi_2}{\partial \zeta_3} \\ \frac{\partial \chi_3}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial \chi_3}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial \chi_3}{\partial \zeta_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\zeta_1 \\ d\zeta_2 \\ d\zeta_3 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Die hier auftretende Matrix heißt *Funktionalmatrix*. Gleichung (2.22) ist eine lineare Abbildung. Wir wissen, dass sie eineindeutig ist, wenn die Koeffizientenmatrix, also die Funktionalmatrix, invertierbar ist. Das ist genau dann der Fall, wenn ihre Determinante nicht verschwindet, d. h. wenn

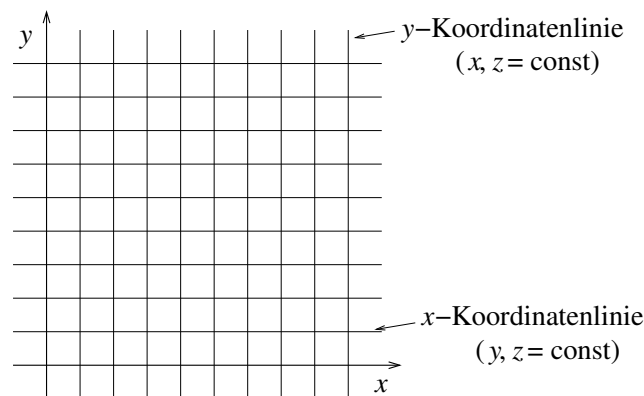
$$\frac{\partial(\chi_1, \chi_2, \chi_3)}{\partial(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)} := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial \chi_1}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial \chi_1}{\partial \zeta_3} \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial \chi_2}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial \chi_2}{\partial \zeta_3} \\ \frac{\partial \chi_3}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial \chi_3}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial \chi_3}{\partial \zeta_3} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial \chi_1}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial \chi_1}{\partial \zeta_3} \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial \chi_2}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial \chi_2}{\partial \zeta_3} \\ \frac{\partial \chi_3}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial \chi_3}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial \chi_3}{\partial \zeta_3} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.23)$$

Diese Größe nennt man *Funktionaldeterminante* oder *Jacobi-Determinante*. Wir fordern also, dass diese Jacobi-Determinante fast überall von Null verschieden ist.

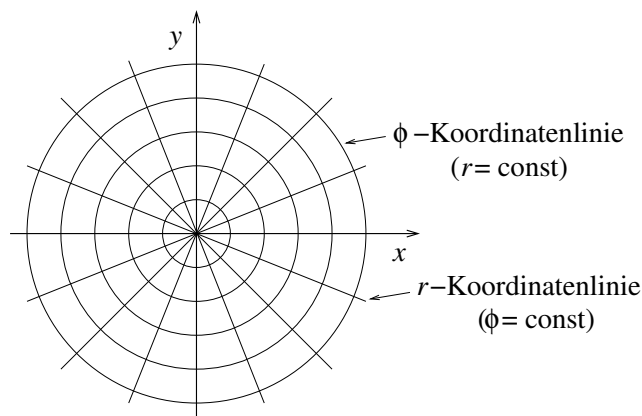
Die Koordinaten $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ überziehen den Raum mit einem Netz, das durch die *Koordinatenlinien* gebildet wird. Die Koordinatenlinien sind Raumkurven, die wir erhalten, indem wir alle bis auf eine Koordinate konstant lassen. Zum Beispiel erhalten wir für jede Wahl von Konstanten ζ_2 und ζ_3 eine ζ_1 -Koordinatenlinie

$$\zeta_1 \rightarrow \vec{r}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3). \quad (2.24)$$

Die Koordinatenlinien für kartesische Koordinaten sind Geraden, die ein rechtwinkliges Netz bilden:



Die r -Koordinatenlinien für ebene Polarkoordinaten sind am Nullpunkt beginnende Halbgeraden (Strahlen), die ϕ -Koordinatenlinien sind konzentrische Kreise um den Nullpunkt:



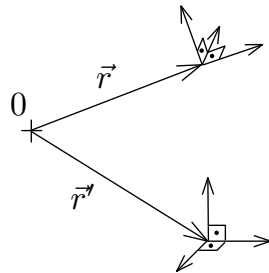
Wir können nun an jedem Punkt lokale Koordinatenachsen einführen. Diese sollen die Richtungen bezeichnen, in denen sich die Koordinaten $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ ändern. Diese Richtungen sind durch die *natürlichen Basisvektoren*

$$\vec{h}_i := \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_i} \quad (2.25)$$

gegeben. Da bei der partiellen Ableitung nach ζ_i die anderen Koordinaten konstant zu halten sind, liegt der Basisvektor \vec{h}_i tangential zur ζ_i -Koordinatenlinie. Es ist oft nützlich, normierte Basisvektoren zu verwenden, diese erhält man einfach aus

$$\hat{e}_i := \frac{\vec{h}_i}{|\vec{h}_i|}. \quad (2.26)$$

Die Einheitsvektoren $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ bilden (fast überall) ein *Dreibein*. Das Dreibein muss nicht an jedem Raumpunkt gleich sein. Es muss auch nicht orthogonal sein. Wir werden allerdings im Folgenden nur solche Koordinatensysteme verwenden, deren Einheitsvektoren (fast überall) orthogonal sind.



Wir ordnen dann die Einheitsvektoren $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ o.B.d.A. so, dass sie ein Rechtssystem bilden. Damit gilt $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$ und $\hat{e}_1 \cdot (\hat{e}_2 \times \hat{e}_3) = 1$.

An einem Ort \vec{r} drücken wir einen beliebigen Vektor \vec{b} , der nicht der Ortsvektor \vec{r} sein muss, durch die Einheitsvektoren $\hat{e}_i(\vec{r})$ am Ort \vec{r} aus:

$$\vec{b} = b_1 \hat{e}_1 + b_2 \hat{e}_2 + b_3 \hat{e}_3. \quad (2.27)$$

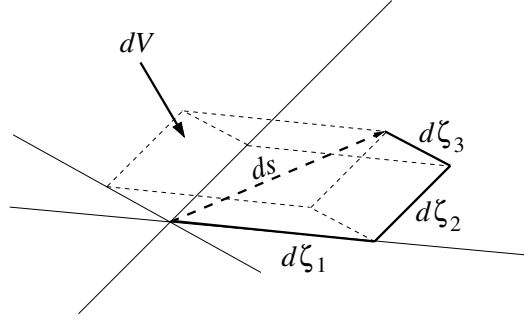
Durch skalare Multiplikation mit \hat{e}_i unter Ausnutzung der Orthonormalität erhalten wir für die Komponenten

$$b_i = \hat{e}_i \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \hat{e}_i. \quad (2.28)$$

Speziell für den Ortsvektor haben wir natürlich

$$r_i = \hat{e}_i \cdot \vec{r} = \vec{r} \cdot \hat{e}_i. \quad (2.29)$$

Es ist zu beachten, dass die *Komponenten* r_i des Ortsvektors in ζ -Koordinaten i. A. nicht mit den *Koordinaten* ζ_i übereinstimmen. Das Beispiel der Kugelkoordinaten wird dies gleich zeigen.



Infinitesimale Änderungen $d\zeta_i$ der Koordinaten ζ_i führen auf zwei weitere wichtige Größen: Zum einen können wir nach dem Abstand des neuen Punktes vom alten fragen. Der *Abstandsvektor* ist

$$d\vec{r} := \vec{r}(\zeta_1 + d\zeta_1, \zeta_2 + d\zeta_2, \zeta_3 + d\zeta_3) - \vec{r}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_i} d\zeta_i = \sum_i \vec{h}_i d\zeta_i. \quad (2.30)$$

Damit ist der Abstand, genannt das *Linielement*,

$$ds := |d\vec{r}| = \left| \sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_i} d\zeta_i \right| = \left| \sum_i \vec{h}_i d\zeta_i \right|. \quad (2.31)$$

Sind die Basisvektoren \vec{h}_i orthogonal, so vereinfacht sich dies zu (Satz von Pythagoras)

$$ds = \sqrt{\sum_i |\vec{h}_i|^2 (d\zeta_i)^2} \quad (2.32)$$

oder

$$ds^2 = \sum_i |\vec{h}_i|^2 (d\zeta_i)^2. \quad (2.33)$$

Das Linielement ist wichtig für die Berechnung von Kurvenintegralen.

Zum anderen spannen die drei Verschiebungen $d\zeta_i$ entlang der Koordinatenlinien ein Parallelepiped auf. Sein Volumen ist das *Volumenelement*

$$dV := \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_1} d\zeta_1 \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_2} d\zeta_2 \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_3} d\zeta_3 \right) = \vec{h}_1 \cdot (\vec{h}_2 \times \vec{h}_3) d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3. \quad (2.34)$$

Sind die \vec{h}_i orthogonal, so wird dies zu

$$dV = |\vec{h}_1| |\vec{h}_2| |\vec{h}_3| d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3. \quad (2.35)$$

Allgemein lässt sich das Spatprodukt mit der Jacobi-Determinante in Verbindung bringen: Sind (x_1, x_2, x_3) die kartesischen Komponenten von \vec{r} , so ist

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_1} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_2} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_3} \right) = \sum_{i,j,k=1,2,3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial \zeta_1} \frac{\partial x_j}{\partial \zeta_2} \frac{\partial x_k}{\partial \zeta_3} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \zeta_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \zeta_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \zeta_3} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)}. \quad (2.36)$$

Damit erhalten wir

$$dV = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)} d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3. \quad (2.37)$$

Diese Darstellung ist wichtig, wenn wir Volumenintegrale in beliebigen Koordinatensystemen ausrechnen wollen.

Den *Gradienten-* oder *Nabla-Operator* $\vec{\nabla}$ definieren wir durch die Forderung, dass für das totale Differential df einer skalaren Funktion $f(\vec{r})$ gelten soll

$$df(\vec{r}) \stackrel{!}{=} d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r}) = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_1} d\zeta_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_2} d\zeta_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_3} d\zeta_3 \right) \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r}) = \left(\sum_i \vec{h}_i d\zeta_i \right) \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r}). \quad (2.38)$$

Nach der Kettenregel gilt andererseits

$$df(\vec{r}) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \zeta_i} d\zeta_i. \quad (2.39)$$

Da die $d\zeta_i$ unabhängig und beliebig sind, folgt

$$\vec{h}_i \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r}) = \frac{\partial f}{\partial \zeta_i}, \quad (2.40)$$

also

$$\hat{e}_i \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{h}_i|} \frac{\partial f}{\partial \zeta_i}. \quad (2.41)$$

Da dies für alle Funktionen $f(\vec{r})$ gelten soll, können wir für die ζ -Komponenten von $\vec{\nabla}$ schreiben

$$\hat{e}_i \cdot \vec{\nabla} = \frac{1}{|\vec{h}_i|} \frac{\partial}{\partial \zeta_i}. \quad (2.42)$$

Da wir angenommen haben, dass die \hat{e}_i orthonormal sind, können wir nun den Nabla-Operator schreiben als

$$\vec{\nabla} \equiv \sum_i \hat{e}_i (\hat{e}_i \cdot \vec{\nabla}) = \sum_i \frac{\hat{e}_i}{|\vec{h}_i|} \frac{\partial}{\partial \zeta_i} \equiv \sum_i \frac{\vec{h}_i}{|\vec{h}_i|^2} \frac{\partial}{\partial \zeta_i}. \quad (2.43)$$

Die Reihenfolge der Faktoren ist hier wesentlich. \hat{e}_i und \vec{h}_i hängen i. A. von den Koordinaten ζ_i ab, so dass wir sie nicht einfach an der Ableitung $\partial/\partial\zeta_i$ vorbei ziehen dürfen.

Kartesische Koordinaten

Für kartesische Koordinaten $(x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$ sind die Koordinatenlinien wie erwähnt Geraden, die ein rechtwinkliges Netz bilden. Die natürlichen Basisvektoren sind orthogonal und bereits normiert, $\vec{h}_i = \hat{e}_i$. Das Dreibein ist im gesamten Raum gleich. Wir schreiben die Einheitsvektoren auch als $\hat{e}_1 = \hat{x}$, $\hat{e}_2 = \hat{y}$, $\hat{e}_3 = \hat{z}$. Die Komponentendarstellung $\vec{b} = b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z}$ schreiben wir auch als $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Wenn nichts anderes gesagt ist, meinen wir damit die Komponenten in kartesischen Koordinaten.

Das Linienelement ist einfach

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.44)$$

und das Volumenelement ist

$$dV = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x, y, z)} dx dy dz = dx dy dz. \quad (2.45)$$

Der Gradient lautet

$$\vec{\nabla} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (2.46)$$

Kugelkoordinaten

Es bietet sich an, krummlinige Koordinatensysteme mittels der bereits bekannten kartesischen Koordinaten zu definieren. Für Kugelkoordinaten (sphärische Polarkoordinaten) haben wir die Abbildung

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad (2.47)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi, \quad (2.48)$$

$$z = r \cos \theta. \quad (2.49)$$

Damit lauten die natürlichen Basisvektoren, ausgedrückt in kartesischen Koordinaten,

$$\vec{h}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

$$\vec{h}_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

$$\vec{h}_\phi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = r \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

Die Normierung ist einfach, wir erhalten

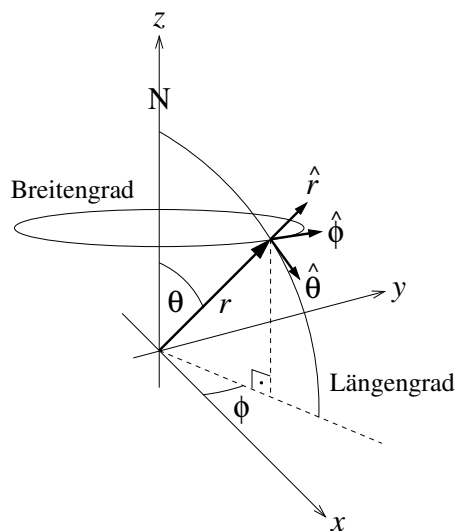
$$\hat{r} = \frac{\vec{h}_r}{r} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

$$\hat{\theta} = \frac{\vec{h}_\theta}{r} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad (2.54)$$

$$\hat{\phi} = \frac{\vec{h}_\phi}{r \sin \theta} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese Einheitsvektoren orthogonal sind und ein Rechtssystem bilden. Offenbar ist das Dreibein hier vom Ort \vec{r} abhängig. Eine kompaktere Darstellung ist

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}, \quad \hat{\phi} = \frac{\hat{z} \times \hat{r}}{|\hat{z} \times \hat{r}|} = \frac{\hat{z} \times \hat{r}}{\sin \theta}, \quad \hat{\theta} = \hat{\phi} \times \hat{r}. \quad (2.56)$$



Für den Ortsvektor können wir offensichtlich schreiben $\vec{r} = r \hat{r}$. Wir sehen explizit, dass die θ - und ϕ -Komponenten von \vec{r} verschwinden. Sie stimmen also nicht mit den Kugelkoordinaten r, θ, ϕ des durch \vec{r} dargestellten Raumpunktes überein. Hier ist keine Information verloren gegangen, da \hat{r} von θ und ϕ abhängt.

Die Änderung $d\vec{r}$ von \vec{r} können wir ebenfalls nach den Einheitsvektoren zerlegen,

$$d\vec{r} = \vec{h}_r dr + \vec{h}_\theta d\theta + \vec{h}_\phi d\phi = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}, \quad (2.57)$$

wobei wir Glg. (2.53)–(2.55) verwendet haben. Daraus folgt sofort für die Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \hat{r} + r\dot{\theta} \hat{\theta} + r \sin \theta \dot{\phi} \hat{\phi}. \quad (2.58)$$

Während sich \vec{v} unmittelbar aus $d\vec{r}$ ergibt, ist die Beschleunigung $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$ deutlich komplizierter, da die Einheitsvektoren $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ von \vec{r} und damit von t abhängen (siehe Skript zur Theoretischen Mechanik).

Das Linienelement ist

$$ds^2 = |\vec{h}_r|^2 dr^2 + |\vec{h}_\theta|^2 d\theta^2 + |\vec{h}_\phi|^2 d\phi^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.59)$$

und das Volumenelement

$$dV = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} dr d\theta d\phi = |\vec{h}_r| |\vec{h}_\theta| |\vec{h}_\phi| dr d\theta d\phi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi. \quad (2.60)$$

Für den Nabla-Operator erhalten wir

$$\vec{\nabla} = \sum_i \frac{\hat{e}_i}{|\vec{h}_i|} \frac{\partial}{\partial \zeta_i} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (2.61)$$

Es ist erhellend, die Gradienten der Koordinaten r, θ, ϕ zu bestimmen. Wir finden

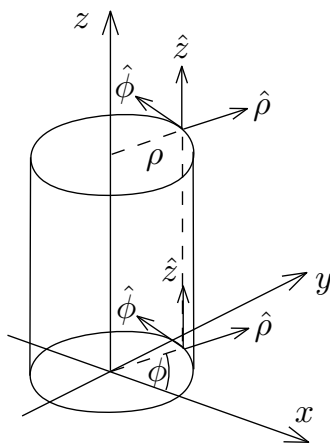
$$\vec{\nabla} r = \hat{r} \frac{\partial r}{\partial r} = \hat{r}. \quad (2.62)$$

Das ist plausibel: \hat{r} ist *definiert* als Einheitsvektor in der Richtung, in der sich r ändert, daher muss $\vec{\nabla} r$ zumindest parallel zu \hat{r} sein. Ebenso sollten $\vec{\nabla} \theta \parallel \hat{\theta}$ und $\vec{\nabla} \phi \parallel \hat{\phi}$ gelten. Das finden wir auch explizit:

$$\vec{\nabla} \theta = \frac{1}{r} \hat{\theta}, \quad (2.63)$$

$$\vec{\nabla} \phi = \frac{1}{r \sin \theta} \hat{\phi}. \quad (2.64)$$

Zylinderkoordinaten



Für Zylinderkoordinaten ρ, ϕ, z fassen wir hier nur die Ergebnisse zusammen, die Herleitungen sind analog. Die kartesischen Koordinaten hängen mit den Zylinderkoordinaten gemäß

$$x = \rho \cos \phi, \quad (2.65)$$

$$y = \rho \sin \phi, \quad (2.66)$$

$$z = z \quad (2.67)$$

zusammen. Es ist $\vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}$ und $d\vec{r} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\hat{\phi} \hat{\phi} + dz \hat{z}$, also

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\hat{\phi}} \hat{\phi} + \dot{z} \hat{z}. \quad (2.68)$$

Das Linienelement ist

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\hat{\phi}^2 + dz^2 \quad (2.69)$$

und das Volumenelement

$$dV = \rho d\rho d\hat{\phi} dz. \quad (2.70)$$

Der Nabla-Operator lautet

$$\vec{\nabla} = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\phi}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \hat{\phi}} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.71)$$

Ebene Polarkoordinaten erhalten wir natürlich einfach durch die Setzung $z = 0$.

2.1.4 Vektoren und Pseudovektoren

Die mathematisch exakte Definition von Vektoren bezieht sich darauf, wie sie sich unter Änderung des Koordinatensystems transformieren. Kurz gefasst transformieren sich *Vektoren* unter Drehung und Raumspiegelung (Inversion) wie Verschiebungen \vec{r} . Unter Drehungen transformiert sich ein Vektor \vec{a} also gemäß

$$\vec{a} \rightarrow R \vec{a}, \quad (2.72)$$

wobei R eine orthogonale 3×3 -Matrix mit Determinante 1 ist, die *Drehmatrix*, auf die wir hier nicht weiter eingehen müssen. Unter Inversion transformiert sich ein Vektor gemäß

$$\vec{a} \rightarrow -\vec{a}. \quad (2.73)$$

Eine Größe \vec{b} , die sich unter Drehungen wie ein Vektor transformiert, unter Inversion aber ihr Vorzeichen nicht ändert, $\vec{b} \rightarrow \vec{b}$, nennt man *Pseudovektor*. (Anstelle von Vektor und Pseudovektor sagt man auch Radialvektor und Axialvektor.) Zum Beispiel sind Ort \vec{r} und Impuls \vec{p} Vektoren, der Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ rotiert zwar wie ein Vektor, ändert aber unter Inversion sein Vorzeichen nicht:

$$\vec{r} \rightarrow -\vec{r}, \quad (2.74)$$

$$\vec{p} \rightarrow -\vec{p}, \quad (2.75)$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \rightarrow (-\vec{r}) \times (-\vec{p}) = \vec{L}. \quad (2.76)$$

\vec{L} ist also ein Pseudovektor. Ein *Skalar* ändert sich unter Drehungen oder Inversionen überhaupt nicht. Ein *Pseudoskalar* ändert sich nicht unter Drehungen, wechselt unter Inversion aber sein Vorzeichen. Es ist wichtig zu beachten, dass eine *Komponente* eines Vektors zwar nur *eine* Zahl ist, aber *kein* Skalar (oder Pseudoskalar). Das ist leicht einzusehen: Die Komponente eines Vektors ändert sich unter Drehungen, es gilt nämlich

$$a_i \rightarrow \sum_j R_{ij} a_j, \quad (2.77)$$

während sich ein (Pseudo-)Skalar nach Definition nicht ändern darf.

2.2 Vektoranalysis: Ableitungen im \mathbb{R}^3

2.2.1 Erste Ableitungen

Sei $\rho(\vec{r})$ ein skalares Feld. Wie wir bereits gesehen haben, ist die Änderung von ρ unter einer *rein räumlichen* Verschiebung $d\vec{r}$ (d. h. $dt = 0$) in kartesischen Koordinaten gegeben durch

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial y} dy + \frac{\partial \rho}{\partial z} dz. \quad (2.78)$$

Dies sieht wie ein Skalarprodukt aus. Tatsächlich können wir schreiben

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \cdot (dx, dy, dz) = (\vec{\nabla} \rho) \cdot d\vec{r}, \quad (2.79)$$

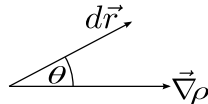
vgl. Gl. (2.38). Hier heißt

$$\vec{\nabla} \rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \hat{z} \quad (2.80)$$

(in kartesischen Koordinaten) *Gradient* von ρ . $\vec{\nabla} \rho$ ist ein *Vektorfeld*. Nach der Definition des Skalarproduktes gilt

$$d\rho = |\vec{\nabla} \rho| |d\vec{r}| \cos \theta, \quad (2.81)$$

wobei θ der von $\vec{\nabla} \rho$ und $d\vec{r}$ eingeschlossene Winkel ist.



Halten wir den Betrag $|d\vec{r}|$ der Verschiebung fest und ist $\vec{\nabla} \rho \neq 0$, so sind folgende Aussagen äquivalent:

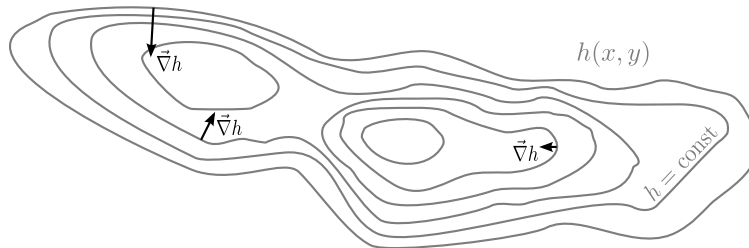
$$d\rho \text{ ist maximal} \Leftrightarrow \theta = 0 \Leftrightarrow d\vec{r} \text{ zeigt in dieselbe Richtung wie } \vec{\nabla} \rho$$

Also zeigt der Gradient in die Richtung *maximaler Steigung* von $\rho(\vec{r})$, d. h. „bergauf“. Der Wert der maximalen Steigung ist der Betrag des Gradienten, $|\vec{\nabla} \rho|$. Andererseits finden wir für festes $|d\vec{r}|$ und für $\vec{\nabla} \rho \neq 0$,

$$d\rho = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} \rho \perp d\vec{r}.$$

$\rho(\vec{r})$ ist lokal also in erster Ordnung in \vec{r} konstant in allen Richtungen orthogonal zum Gradienten. Das bedeutet, dass der Gradient $\vec{\nabla} \rho$ an jedem Punkt (außer für $\vec{\nabla} \rho = 0$) senkrecht auf Flächen mit konstantem ρ steht.

■ **Beispiel 1:** Für die zweidimensionale Höhe über dem Meeresspiegel einer Landschaft, $h(x, y)$, zeigt $\vec{\nabla} h = (\partial h / \partial x, \partial h / \partial y)$ an jedem Ort bergauf und steht senkrecht auf den Kurven konstanter Höhe, also den Höhenlinien.



■ **Beispiel 2:** Berechne $\vec{\nabla} r$, vgl. Abschnitt 2.1.3. In kartesischen Koordinaten ist

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} r &= \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z} \right) & \Bigg| & r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \left(\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{\cancel{2}z}{\cancel{2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ &= \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r}. \end{aligned} \quad (2.82)$$

In Kugelkoordinaten ist die Rechnung einfacher, wie wir gesehen haben:

$$\vec{\nabla} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} r = \hat{r} \frac{\partial r}{\partial r} = \hat{r}. \quad (2.83)$$

Für den Gradienten gilt die folgende Kettenregel:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f(g(\vec{r})) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} f(g(\vec{r})), \frac{\partial}{\partial y} f(g(\vec{r})), \frac{\partial}{\partial z} f(g(\vec{r})) \right) \\ &= \left(f'(g(\vec{r})) \frac{\partial g}{\partial x}, f'(g(\vec{r})) \frac{\partial g}{\partial y}, f'(g(\vec{r})) \frac{\partial g}{\partial z} \right) \\ &= f'(g(\vec{r})) \vec{\nabla} g(\vec{r}),\end{aligned}\tag{2.84}$$

oder kürzer

$$\vec{\nabla} f(g) = f'(g) \vec{\nabla} g.\tag{2.85}$$

Weitere Regeln kann man leicht analog durch Darstellung in kartesischen Koordinaten herleiten.

Mit dem Nabla-Operator

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)\tag{2.86}$$

(in kartesischen Koordinaten) können wir noch weitere Ableitungen konstruieren, indem wir $\vec{\nabla}$ anstelle eines gewöhnlichen Vektors in die Produkte von Vektoren einsetzen. Damit erhalten wir zunächst die *Divergenz*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}\tag{2.87}$$

eines Vektorfeldes $\vec{v}(\vec{r})$. Die Divergenz ist ein *skalares* Feld. In kartesischen Koordinaten ist

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}) \\ &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (v_x, v_y, v_z) \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.\end{aligned}\tag{2.88}$$

Für andere Koordinatensysteme haben wir in Abschnitt 2.1.3 schon Vorarbeit geleistet und können die entsprechende Darstellung von $\vec{\nabla}$ übernehmen. In Kugelkoordinaten gilt z. B.

$$\vec{\nabla} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi},\tag{2.89}$$

$$\vec{v} = v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta} + v_\phi \hat{\phi},\tag{2.90}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \hat{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta} + v_\phi \hat{\phi}) \\ &\quad + \frac{\hat{\theta}}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta} + v_\phi \hat{\phi}) \\ &\quad + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} (v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta} + v_\phi \hat{\phi}).\end{aligned}\tag{2.91}$$

Nun müssen wir beachten, dass die Einheitsvektoren \hat{r} , $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$ vom Ort abhängen. Mit Glg. (2.53)–(2.55),

$$\hat{r} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix},\tag{2.92}$$

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix},\tag{2.93}$$

$$\hat{\phi} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix},\tag{2.94}$$

erhalten wir

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial r} = \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial r} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} = 0, \quad (2.95)$$

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} = \hat{\theta}, \quad (2.96)$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \phi \\ -\sin \theta \sin \phi \\ -\cos \theta \end{pmatrix} = -\hat{r}, \quad (2.97)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \theta} = 0, \quad (2.98)$$

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \sin \theta \hat{\phi}, \quad (2.99)$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \cos \theta \hat{\phi}, \quad (2.100)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -\cos \phi \\ -\sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - \cos \phi \\ -\sin \phi - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{z} \times \hat{\phi}. \quad (2.101)$$

Damit ist (Produktregel!)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \frac{\partial v_r}{\partial r} \underbrace{\hat{r} \cdot \hat{r}}_1 + v_r \underbrace{\hat{r}}_0 \cdot \frac{\partial \hat{r}}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \underbrace{\hat{r} \cdot \hat{\theta}}_0 + v_\theta \underbrace{\hat{r}}_0 \cdot \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial r} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \underbrace{\hat{r} \cdot \hat{\phi}}_0 + v_\phi \underbrace{\hat{r}}_0 \cdot \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} + 12 \text{ weitere Terme} \\ &= \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \hat{\theta} \cdot \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r} \hat{\theta} \cdot \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r} \hat{\theta} \cdot \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r \sin \theta} \hat{\phi} \cdot \frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} + \frac{v_\theta}{r \sin \theta} \hat{\phi} \cdot \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \phi} \\ &\quad + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \hat{\phi} \cdot \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} \\ &= \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \underbrace{\hat{\phi} \cdot (\hat{z} \times \hat{\phi})}_0 \\ &= \frac{\partial v_r}{\partial r} + 2 \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Es ist üblich, diesen Ausdruck etwas umzuschreiben (Produktregel!):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 v_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta v_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}. \quad (2.103)$$

■ Beispiel 1: Berechne $\vec{\nabla} \cdot \vec{r}$. In kartesischen Koordinaten:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3. \quad (2.104)$$

In Kugelkoordinaten:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \vec{\nabla} \cdot (r\hat{r} + 0\hat{\theta} + 0\hat{\phi}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^3 = 3. \quad (2.105)$$

■ Beispiel 2: Berechne $\vec{\nabla} \cdot \hat{r}$ (hier steht ein Einheitsvektor \hat{r} !). In kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \hat{r} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \dots + \dots \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{x \cdot 2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2} + \dots + \dots \\ &= \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} + \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} + \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} = \frac{3}{r} - \frac{r^2}{r^3} = \frac{2}{r}. \end{aligned} \quad (2.106)$$

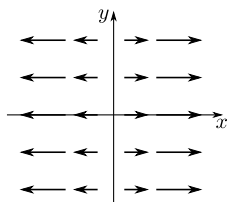
Einfacher ist es in Kugelkoordinaten:

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{r} = \vec{\nabla} \cdot (1\hat{r} + 0\hat{\theta} + 0\hat{\phi}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 = \frac{2}{r}. \quad (2.107)$$

Anschaulich beschreibt die Divergenz, wie stark sich ein Vektorfeld ausbreitet. Stellen wir das Feld durch Vektorpfeile an ausgewählten Punkten dar, beschreibt die Divergenz, in welchem Maße die Pfeile in der Umgebung eines Punktes auseinanderlaufen (für positive Divergenz) bzw. zusammenlaufen (für negative Divergenz).

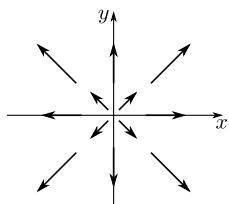
■ Beispiele (es ist nützlich, sich unter \vec{v} die Geschwindigkeit einer Flüssigkeit vorzustellen):

(a) $\vec{v} = x\hat{x}$:



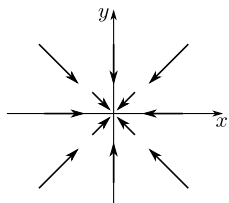
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1$$

(b) $\vec{v} = \vec{r}$:



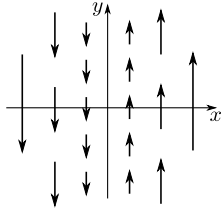
$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 3$ (siehe oben). Regionen mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} > 0$ nennt man *Quellen* des Feldes. Im Beispiel der Flüssigkeit können wir uns vorstellen, dass von irgendwoher Flüssigkeit hinzugefügt wird.

(c) $\vec{v} = -\vec{r}$:



$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -3$. Regionen mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} < 0$ nennt man *Senken* des Feldes.

(d) $\vec{v} = x\hat{y}$:



$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial x}{\partial y} = 0$. Die Divergenz verschwindet, da sich das Feld nicht ausbreitet – es handelt sich um eine Scherung der Flüssigkeit. Beachte, dass $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ *nicht* impliziert, dass \vec{v} konstant ist!

Der Operator $\vec{\nabla}$ wirkt grundsätzlich auf alle folgenden Terme bis zum nächsten + oder -. Ist dies nicht gemeint, müssen wir Klammern einfügen. Es gibt aber keine allgemein akzeptierte Regel, wonach eine schließende Klammer grundsätzlich die Wirkung von $\vec{\nabla}$ beendet. Sie tut dies i. A. *nicht*, wenn $\vec{\nabla}$ als letztes Symbol in der Klammer steht, z. B.

$$(\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\rho = a_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + a_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + a_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \rho. \quad (2.108)$$

Beachte, dass i. A.

$$\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \rho \neq \vec{\nabla} \cdot \vec{a} \rho = \rho (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) + \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \rho). \quad (2.109)$$

Schließlich können wir noch das Vektorprodukt mit $\vec{\nabla}$ bilden. Wir erhalten die *Rotation*

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} \quad (2.110)$$

des Vektorfeldes \vec{v} . Die Rotation ist selbst ein Vektorfeld (oder genauer ein Pseudovektorfeld, falls \vec{v} ein Vektorfeld ist und ein Vektorfeld, falls \vec{v} ein Pseudovektorfeld ist). In kartesischen Koordinaten ist

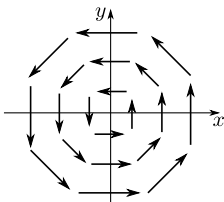
$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \quad (2.111)$$

Die Rotation beschreibt die *Wirbel* des Feldes \vec{v} . Ist $\vec{v}(\vec{r})$ die lokale Geschwindigkeit einer Flüssigkeit, so hat $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ eine besonders anschauliche Interpretation: Wenn sich ein kleiner (starrer) Testkörper mit der Strömung bewegt, so rotiert er mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{v}. \quad (2.112)$$

■ Beispiele:

(a) $\vec{v} = -y\hat{x} + x\hat{y} = (-y, x, 0) = \hat{z} \times \vec{r}$:

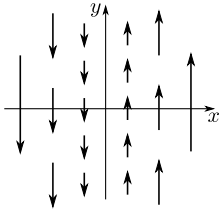


$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \left(0, 0, \frac{\partial}{\partial x} x - \frac{\partial}{\partial y} (-y) \right) = (0, 0, 2) = 2\hat{z}. \quad (2.113)$$

Das Feld \vec{v} stellt einen *Vortex* dar. Beachte, dass $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ homogen (konstant im Raum) ist und parallel zur Achse des Vortex zeigt.

(b) $\vec{v} = \vec{r} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{v} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) = 0$: Hier rotiert nichts.

(c) $\vec{v} = x\hat{y}$:



$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \hat{z} \frac{\partial v_y}{\partial x} = \hat{z} \frac{\partial x}{\partial x} = \hat{z}$. Ein Testkörper würde rotieren, obwohl die Strömung geradlinig ist.

Produkt- und Kettenregeln für Vektorableitungen kann man leicht mit Hilfe der Darstellung in kartesischen Koordinaten aus den Regeln für gewöhnliche Ableitungen herleiten. Die resultierenden Regeln sind in den meisten Lehrbüchern der Elektrodynamik tabelliert, oft auf den Umschlaginnenseiten. Dort findet man auch die Darstellungen von Gradient, Divergenz und Rotation in anderen Koordinatensystemen. Es sei noch erwähnt, dass manchmal, v. a. in älterer Literatur, folgende Schreibweisen verwendet werden:

$$\text{grad } \rho = \vec{\nabla} \rho, \quad (2.114)$$

$$\text{div } \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}, \quad (2.115)$$

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v}. \quad (2.116)$$

Für die Rotation steht in englischsprachiger Literatur stattdessen $\text{curl } \vec{v}$.

Natürlich kann man auch nach Komponenten anderer Vektoren als des Ortsvektors ableiten. Dann schreibt man für den Nablaoperator nach dem Vektor \vec{a} :

$$\vec{\nabla}_{\vec{a}} \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{a}} := \left(\frac{\partial}{\partial a_x}, \frac{\partial}{\partial a_y}, \frac{\partial}{\partial a_z} \right) \quad (2.117)$$

(in kartesischen Koordinaten), also speziell

$$\vec{\nabla} \equiv \vec{\nabla}_{\vec{r}} \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{r}} := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (2.118)$$

2.2.2 Zweite Ableitungen

Wir können $\vec{\nabla}$ natürlich auch mehrfach anwenden, wobei in dieser Vorlesung nur zweite Ableitungen von Bedeutung sind. $\vec{\nabla} \rho$ und $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ sind (evtl. Pseudo-) Vektoren und wir können daher ihre Divergenz und ihre Rotation bilden. Andererseits ist $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ ein Skalar und wir können seinen Gradienten bilden. Wir haben also folgende fünf Möglichkeiten:

1. Divergenz des Gradienten:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \rho) &\stackrel{\text{kartesisch}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)}_{\text{Operator}} \rho = \nabla^2 \rho. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Der hier auftretende Differentialoperator heißt *Laplace-Operator* und wird oft mit Δ bezeichnet; wir vermeiden diese evtl. verwirrende Notation hier. Also ist

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \rho) \equiv \nabla^2 \rho \equiv \Delta \rho. \quad (2.120)$$

Der Laplace-Operator spielt in der Elektrodynamik eine wichtige Rolle. Seine Darstellung in anderen Koordinatensystemen ist daher in den Lehrbüchern tabelliert. $\nabla^2 \rho$ ist wieder ein skalares Feld.

■ Beispiele:

$$\nabla^2 r^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} y^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} z^2 = 2 + 2 + 2 = 6, \quad (2.121)$$

$$\nabla^2 xyz = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) xyz = \frac{\partial}{\partial x} yz + \frac{\partial}{\partial y} xz + \frac{\partial}{\partial z} xy = 0. \quad (2.122)$$

Funktionen $f(\vec{r})$ mit der Eigenschaft $\nabla^2 f = 0 \quad \forall \vec{r}$ nennt man *harmonisch*.

Man kann dem *skalaren* Operator ∇^2 auch auf Vektorfelder anwenden. In kartesischen Koordinaten ist einfach

$$\nabla^2 \vec{v} \equiv (\nabla^2 v_x, \nabla^2 v_y, \nabla^2 v_z). \quad (2.123)$$

■ Beispiele:

$$\nabla^2 \vec{r} = (\nabla^2 x, \nabla^2 y, \nabla^2 z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} x, \frac{\partial^2}{\partial y^2} y, \frac{\partial^2}{\partial z^2} z \right) = 0, \quad (2.124)$$

$$\nabla^2 (x^2 \hat{x} + y^2 \hat{y} + z^2 \hat{z}) = (\nabla^2 x^2, \nabla^2 y^2, \nabla^2 z^2) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2, \frac{\partial^2}{\partial y^2} y^2, \frac{\partial^2}{\partial z^2} z^2 \right) = (2, 2, 2) = 2(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}). \quad (2.125)$$

2. Rotation des Gradienten:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \rho) \stackrel{\text{kartesisch}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = 0, \quad (2.126)$$

da

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial x} \quad (2.127)$$

usw., falls ρ zweimal stetig differenzierbar ist, was wir i. A. für physikalische Felder annehmen. Unter dieser Voraussetzung haben wir damit gezeigt, dass $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \rho) \equiv 0$ gilt; *die Rotation eines Gradientenfeldes verschwindet*. Diese Eigenschaft werden wir häufig ausnutzen. Sie ist plausibel, wenn man bedenkt, dass der Gradient an jedem Punkt bergauf zeigt.

3. Gradient der Divergenz:

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \stackrel{\text{kartesisch}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right), \dots, \dots \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}. \quad (2.128)$$

Hier tritt ein *matrixwertiger* Differentialoperator auf, den wir als Dyade

$$\vec{\nabla} \vec{\nabla} \equiv \vec{\nabla} \vec{\nabla}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{pmatrix} \quad (2.129)$$

schreiben können. Dies ist *nicht* dasselbe wie der *skalare* Laplace-Operator $\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$ ist (wie $\nabla^2 \vec{v}$) ein Vektorfeld.

■ Beispiel: Für

$$\vec{v} = xy \hat{x} + yz \hat{y} + zx \hat{z} \quad (2.130)$$

ist

$$\nabla^2 \vec{v} = (\nabla^2 xy, \nabla^2 yz, \nabla^2 zx) = 0, \quad (2.131)$$

aber

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = \vec{\nabla}\left(\frac{\partial}{\partial x} xy + \frac{\partial}{\partial y} yz + \frac{\partial}{\partial z} zx\right) = \vec{\nabla}(y + z + x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \nabla^2 \vec{v}. \quad (2.132)$$

4. Divergenz der Rotation:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) &\stackrel{\text{kartesisch}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z \partial y} = 0, \end{aligned} \quad (2.133)$$

unter der Annahme, dass \vec{v} zweimal stetig differenzierbar ist. Die Divergenz eines Rotationsfeldes (Wirbelfeldes) verschwindet. Diese Eigenschaft werden wir ebenfalls oft ausnutzen.

5. Rotation der Rotation:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) &\stackrel{\text{kartesisch}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial x}, \dots, \dots\right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) - \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}, \dots, \dots\right) \\ &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v}. \end{aligned} \quad (2.134)$$

Dasselbe Ergebnis erhalten wir mittels BAC-CAB-Regel, wobei wir aber beachten müssen, dass \vec{v} immer hinter dem Differentialoperator stehenbleiben muss.

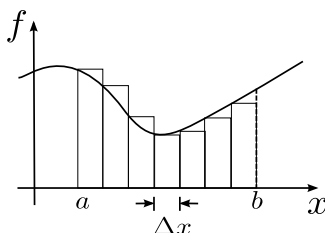
Den 5. Fall haben wir damit auf den 1. und den 3. Fall zurückgeführt. Außerdem ergaben der 2. und der 4. Fall immer verschwindende zweite Ableitungen. Es existieren also nur zwei wesentlich verschiedene Arten von zweiten Ableitungen, ∇^2 und $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$.

2.3 Vektoranalysis: Integration im \mathbb{R}^3

Wir benötigen nicht nur Ableitungen im \mathbb{R}^3 , sondern auch Integrale. In der Analysis wird das (bestimmte) Integral einer Funktion $f(x)$ einer Variablen x über ein Intervall $[a, b]$ durch die Riemann-Summe definiert:

$$\int_a^b dx f(x) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\frac{b-a}{\Delta x} - 1} \Delta x f(a + n \Delta x). \quad (2.135)$$

Das Integral beschreibt geometrisch die Fläche unter der Kurve mit der Parameterdarstellung $(x, f(x))$ über dem Intervall $[a, b]$.



Wir werden mehrere Verallgemeinerungen der Riemann-Summe auf Funktionen im \mathbb{R}^3 , also auf Felder, besprechen. Die Grundidee ist immer dieselbe: Ein Integral ist die Summe infinitesimaler Beiträge $dx f(x)$ für alle x aus einem bestimmten Bereich \mathcal{B} . Wir stellen uns \mathcal{B} in Zellen der infinitesimalen Größe dx eingeteilt vor. Der Unterschied zwischen den zu besprechenden Integraltypen liegt in der Dimensionalität des Bereichs \mathcal{B} .

- (a) Bei *Linienintegralen* (Kurvenintegralen) ist der Bereich \mathcal{B} eine Kurve \mathcal{C} im Raum. Wir teilen \mathcal{C} in *Linienelemente* dl ein, so dass die Summe aller dl die Gesamtlänge der Kurve ergibt:

$$\int_{\mathcal{C}} dl = L_{\mathcal{C}}. \quad (2.136)$$

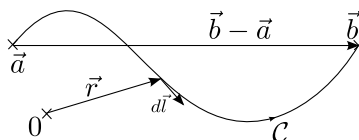
Oft versteht man die Linienelemente mit einem Richtungssinn, nämlich der tangentialen Richtung entlang der Kurve,

$$d\vec{l} = dl \hat{t} \quad (2.137)$$

mit dem Tangenteneinheitsvektor \hat{t} entlang der Kurve. Dafür muss die Kurve \mathcal{C} natürlich *gerichtet* sein. \hat{t} wird in Vorwärtsrichtung gewählt. Beachte, dass

$$\left| \int_{\mathcal{C}} d\vec{l} \right| = |\vec{b} - \vec{a}| \quad (2.138)$$

der Abstand von End- und Anfangspunkt der Kurve \mathcal{C} ist, dieser ist nur mit der Länge $L_{\mathcal{C}}$ identisch, wenn \mathcal{C} ein Geradenabschnitt ist.



Nun können wir verschiedene Linienintegrale über skalare Felder und Vektorfelder bilden: Skalare

$$\int_{\mathcal{C}} dl \rho(\vec{r}), \quad \int_{\mathcal{C}} d\vec{l} \cdot \vec{v}(\vec{r}) \quad (2.139)$$

und Vektoren

$$\int_{\mathcal{C}} d\vec{l} \rho(\vec{r}), \quad \int_{\mathcal{C}} dl \vec{v}(\vec{r}), \quad \int_{\mathcal{C}} d\vec{l} \times \vec{v}(\vec{r}). \quad (2.140)$$

Wenn nichts weiter gesagt ist, meint man mit „Linienintegral“ in der Elektrodynamik meist den zweiten Fall,

$$\int_{\mathcal{C}} d\vec{l} \cdot \vec{v}(\vec{r}). \quad (2.141)$$

Wir können auch Anfangs- und Endpunkt explizit an das Integralzeichen schreiben:

$$\int_{\mathcal{C}, \vec{a}}^{\vec{b}} d\vec{l} \cdot \vec{v}(\vec{r}). \quad (2.142)$$

usw. Im Allgemeinen hängt das Integral aber nicht allein vom Anfangspunkt \vec{a} und vom Endpunkt \vec{b} ab, sondern vom gesamten Kurvenverlauf \mathcal{C} .

Es existiert jedoch eine Klasse von Vektorfeldern $\vec{v}(\vec{r})$, für die das Linienintegral nur von \vec{a} und \vec{b} abhängt. Ist $\vec{v} = \vec{F}$ ein Kraftfeld, so nennt man es in diesem Fall *konservativ*.

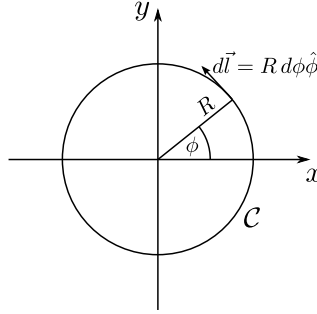
Die Kurve \mathcal{C} kann auch geschlossen sein. Dann schreiben wir das Integralzeichen mit einem Kreis, z. B.

$$\oint_{\mathcal{C}} d\vec{l} \cdot \vec{v}(\vec{r}). \quad (2.143)$$

Für eine geschlossene Kurve addieren sich die *vektoriellen* Linienelemente zu Null, da Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen:

$$\oint_{\mathcal{C}} d\vec{l} = 0. \quad (2.144)$$

■ Beispiele: Wir nehmen als Kurve \mathcal{C} den Kreis mit dem Radius R in der xy -Ebene. Die Strategie bei der Berechnung ist immer, das Linienintegral auf gewöhnliche Integrale zurückzuführen. Das kann oft durch Verwendung geeigneter Koordinaten erreicht werden, im Beispiel sicherlich durch ebene Polarkoordinaten.



Das vektorielle Linienelement ist $d\vec{l} = R d\phi \hat{\phi}$ mit der Länge $R d\phi$ (Kreisbogen!) und dem Tangenteneinheitsvektor $\hat{\phi}$. Damit berechnen wir einige Linienintegrale:

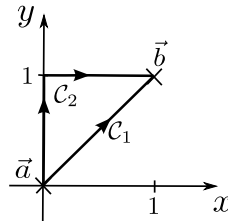
$$\oint_{\mathcal{C}} \underbrace{d\vec{l} \cdot \vec{r}}_0 = 0, \quad (2.145)$$

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} d\vec{l} \cdot (\hat{z} \times \hat{r}) &= \oint_{\mathcal{C}} d\vec{l} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \oint_{\mathcal{C}} d\vec{l} \cdot R \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \oint_{\mathcal{C}} R d\phi \hat{\phi} \cdot R \hat{\phi} \\ &= R^2 \oint_{\mathcal{C}} d\phi = R^2 \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi R^2, \end{aligned} \quad (2.146)$$

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \underbrace{dl}_{\text{skalar!}} y^2 \hat{x} &= \left(\oint_{\mathcal{C}} dl y^2 \right) \hat{x} = \left(\oint_{\mathcal{C}} R d\phi R^2 \sin^2 \phi \right) \hat{x} \\ &= R^3 \hat{x} \int_0^{2\pi} d\phi \sin^2 \phi = \pi R^3 \hat{x}, \end{aligned} \quad (2.147)$$

$$\oint_{\mathcal{C}} d\vec{l} \times \vec{r} = \oint_{\mathcal{C}} R d\phi \hat{\phi} \times R \hat{r} = R^2 \oint_{\mathcal{C}} d\phi (-\hat{z}) = -2\pi R^2 \hat{z}. \quad (2.148)$$

Als weiteres Beispiel integrieren wir $\vec{v} = \hat{z} \times \vec{r}$ (s.o.) über zwei verschiedene Kurven in der Ebene $z = 0$:



Für den Weg \mathcal{C}_1 wählen wir Zylinderkoordinaten:

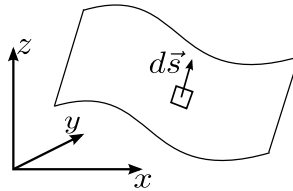
$$\int_{\mathcal{C}_1} d\vec{l} \cdot (\hat{z} \times \vec{r}) = \int_{\mathcal{C}_1} d\rho \hat{\rho} \cdot [\hat{z} \times (\rho \hat{\rho} + z \hat{z})] = \int_{\mathcal{C}_1} d\rho \hat{\rho} \cdot \rho \hat{\phi} = \int_{\mathcal{C}_1} d\rho \rho \underbrace{\hat{\rho} \cdot \hat{\phi}}_0 = 0. \quad (2.149)$$

Für den Weg \mathcal{C}_2 sind kartesische Koordinaten günstiger:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_2} d\vec{l} \cdot (\hat{z} \times \vec{r}) &= \int_{\mathcal{C}_2} d\vec{l} \cdot (-y, x, 0) = \int_0^1 dy \hat{y} \cdot (-y, \underbrace{0}_{x \text{ fest}}, 0) + \int_0^1 dx \hat{x} \cdot (\underbrace{-1}_{-y \text{ fest}}, x, 0) \\ &= \int_0^1 dy 0 - \int_0^1 dx 1 = -1, \end{aligned} \quad (2.150)$$

das Integral ist also wegababhängig.

- (b) Bei *Flächenintegralen* ist der Bereich \mathcal{B} natürlich eine Fläche \mathcal{S} . Wir zerlegen \mathcal{S} in *Flächenelemente* ds . Die Flächenelemente können wir auch zu Vektoren $d\vec{s}$ machen, wobei die Richtung ein Normaleneinheitsvektor \hat{n} auf der Fläche am gegebenen Punkt ist, d. h. $d\vec{s}$ steht überall senkrecht auf der Fläche.



Der Normalenvektor ist nicht eindeutig – es gibt an jedem Punkt zwei Möglichkeiten. Wir wollen $\hat{n}(\vec{r})$ für $\vec{r} \in \mathcal{S}$ stetig wählen. Dann gibt es drei Möglichkeiten:

- Die Fläche \mathcal{S} ist geschlossen und orientierbar (z. B. eine Kugel). Dann wählen wir \hat{n} üblicherweise überall *nach außen* zeigend.
- Die Fläche \mathcal{S} ist nicht geschlossen, aber orientierbar (z. B. ein Zylindermantel oder eine Ebene). Dann müssen wir in jedem Einzelfall festlegen, welche Richtung \hat{n} haben soll. Durch die Festlegung an einem Punkt ist wegen der Stetigkeit $\hat{n}(\vec{r})$ auf der gesamten Fläche festgelegt (falls die Fläche zusammenhängt).
- Die Fläche \mathcal{S} ist nicht orientierbar (z. B. Kleinsche Flasche, Möbiusband). Dann können wir $\hat{n}(\vec{r})$ nicht überall stetig wählen. Solche Flächen kommen aber in der Elektrodynamik nicht vor.

Wir schreiben das Flächenintegral als $\iint_{\mathcal{S}}$ bzw. für eine geschlossene Fläche auch als $\oiint_{\mathcal{S}}$, um anzudeuten, dass über einen zweidimensionalen Bereich integriert wird. Oft schreibt man aber nur ein Integralzeichen (so auch in den meisten Lehrbüchern). Es gibt wieder mehrere mögliche Formen:

$$\iint_{\mathcal{S}} ds \rho(\vec{r}), \quad \iint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot \vec{v}(\vec{r}), \quad \iint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \rho(\vec{r}), \quad \iint_{\mathcal{S}} ds \vec{v}(\vec{r}), \quad \iint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \times \vec{v}(\vec{r}). \quad (2.151)$$

Der am häufigsten auftretende Fall ist der zweite. Man nennt

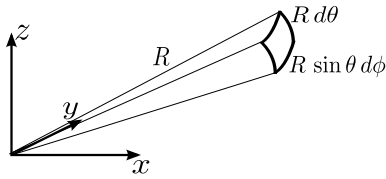
$$\Phi := \iint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot \vec{v}(\vec{r}) \quad (2.152)$$

auch den *Fluss* des Feldes $\vec{v}(\vec{r})$ durch die Fläche \mathcal{S} . Beschreibt \vec{v} die lokale Geschwindigkeit einer Flüssigkeit, so ist diese Bezeichnung sehr intuitiv.

Analog zum Linienintegral hängt das Flächenintegral über eine berandete Fläche i. A. von der gesamten Fläche ab, nicht nur vom Rand. Für eine spezielle Klasse von Feldern hängt es jedoch nur vom Rand ab, wie wir sehen werden.

■ **Beispiele:** \mathcal{S} sei die Kugel (-oberfläche) mit dem Radius R um den Ursprung. Dann ist das vektorielle Flächenelement in Kugelkoordinaten

$$d\vec{s} = R d\theta R \sin \theta d\phi \hat{r} = R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r} \quad (2.153)$$



und damit z. B.

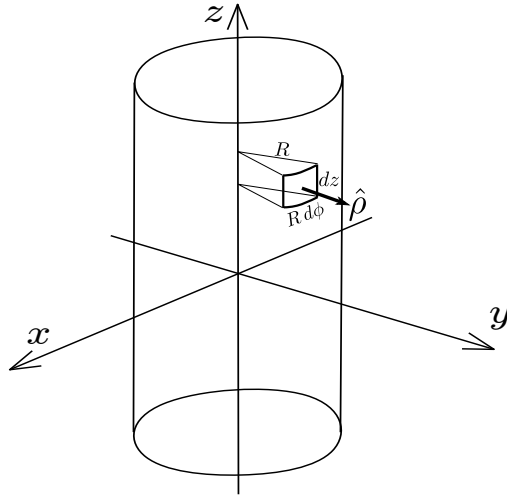
$$\iint_S d\vec{s} \cdot \vec{r} = R^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \hat{r} \cdot \underbrace{\vec{r}}_{R\hat{r}} = R^3 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi R^3, \quad (2.154)$$

$$\begin{aligned} \iint_S d\vec{s} \cdot x \hat{x} &= R^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \hat{r} \cdot R \sin \theta \cos \phi \hat{x} = R^3 \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta \int_0^{2\pi} d\phi \cos \phi \underbrace{\hat{r} \cdot \hat{x}}_{\sin \theta \cos \phi} \\ &= R^3 \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta}_{4/3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi \cos^2 \phi}_\pi = \frac{4\pi}{3} R^3, \end{aligned} \quad (2.155)$$

$$\begin{aligned} \iint_S \underbrace{ds}_{\text{Skalar}} x^2 y^2 &= R^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi R^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi \\ &= R^6 \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin^5 \theta}_{16/15} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi \cos^2 \phi \sin^2 \phi}_{\pi/4} = \frac{4\pi}{15} R^6. \end{aligned} \quad (2.156)$$

Sei S' ein Zylindermantel mit Radius R und Höhe h parallel zur z -Achse und mit Mittelpunkt im Ursprung. Wir wählen die Richtung von $d\vec{s}$ nach außen, d. h. in Zylinderkoordinaten

$$d\vec{s} = R d\phi dz \hat{\rho}. \quad (2.157)$$



Dann ist z. B.

$$\iint_{S'} d\vec{s} \cdot \vec{r} = R \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-h/2}^{h/2} dz \hat{\rho} \cdot (R\hat{\rho} + z\hat{z}) = R^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-h/2}^{h/2} dz \underbrace{\hat{\rho} \cdot \hat{\rho}}_1 = 2\pi R^2 h. \quad (2.158)$$

Die Mantelfläche des Zylinders ist einfach

$$\iint_{S'} ds = R \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-h/2}^{h/2} dz = 2\pi R h. \quad (2.159)$$

- (c) *Volumenintegrale* umfassen einen dreidimensionalen Bereich, also ein Volumen \mathcal{V} . Es wird in *Volumenelemente* dV eingeteilt. In kartesischen Koordinaten ist einfach $dV = dx dy dz$, für Kugel- und Zylinderkoordinaten hatten wir es auch schon angegeben:

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi, \quad (2.160)$$

$$dV = \rho d\rho d\phi dz. \quad (2.161)$$

Anders als Kurven und Flächen ist ein Volumen durch seinen Rand eindeutig bestimmt (jedenfalls im \mathbb{R}^3 !). Ein Volumen hat keine „innere Struktur“, es ist geometrisch flach. Deshalb sieht das Volumenelement für gegebenes Koordinatensystem immer gleich aus. Wir versehen dV nicht mit einem Richtungssinn – denn welche Richtung sollten wir wählen? Wir verwenden für Volumenintegrale das Symbol $\iiint_{\mathcal{V}}$, in der Literatur sieht man oft auch $\int_{\mathcal{V}}$. Da dV skalar ist, gibt es nur zwei Fälle: Den Skalar

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV \rho(\vec{r}) \quad (2.162)$$

und den Vektor

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{v}(\vec{r}). \quad (2.163)$$

■ **Beispiele:** Sei \mathcal{V} die Vollkugel um den Ursprung mit dem Radius R . Ihr Volumen ist einfach

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV = \underbrace{\int_0^R dr r^2}_{R^3/3} \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin \theta}_2 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} = \frac{4\pi}{3} R^3. \quad (2.164)$$

Weitere Beispiele:

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{V}} dV x^2 y^2 z^2 &= \int_0^R dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi r^2 \cos^2 \theta \\ &= \underbrace{\int_0^R dr r^8}_{R^9/9} \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin^5 \theta}_{16/15} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi \cos^2 \phi \sin^2 \phi}_{\pi/4} = \frac{4\pi}{135} R^9, \end{aligned} \quad (2.165)$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{r} = 0 \quad \text{aus Symmetriegründen,} \quad (2.166)$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV \frac{1}{r} = \int_0^R dr r \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi R^2. \quad (2.167)$$

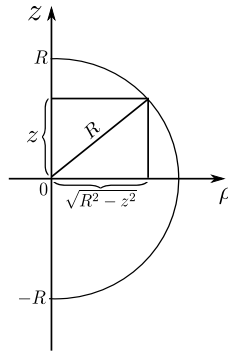
Beachte, dass wir über den Pol bei $\vec{r} = 0$ hinweg integrieren konnten, weil er durch den Faktor r^2 im Volumenelement „gehoben“ wurde. Zum Schluss ein Beispiel mit weniger günstiger Symmetrie: Es sei \vec{a} ein Vektor der Länge $a < R$. Wir berechnen

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV \frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|}. \quad (2.168)$$

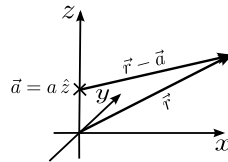
Wir wählen Zylinderkoordinaten mit der z -Achse parallel zu \vec{a} , da der Integrand *und* das Volumen \mathcal{V} um diese Achse rotationssymmetrisch sind. Dann ist

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV \frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} = \int_{-R}^R dz \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{\sqrt{(\rho \hat{\rho} + z \hat{z} - a \hat{z})^2}}. \quad (2.169)$$

Beachte, dass die Grenzen des ρ -Integrals von der Integrationsvariablen z abhängen.



$$\dots = \int_{-R}^R dz \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z - a)^2}} \quad (2.170)$$



$$\begin{aligned} &= 2\pi \int_{-R}^R dz \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \frac{d\rho \rho}{\sqrt{\rho^2 + (z - a)^2}} = 2\pi \int_{-R}^R dz \left(\sqrt{R^2 + a^2 - 2az} - |z - a| \right) \\ &= 2\pi \left(\frac{(R + a)^3 - (R - a)^3}{3a} - (R^2 + a^2) \right) = 2\pi \left(\frac{6R^2 a + 2a^3}{3a} - R^2 - a^2 \right) = 2\pi R^2 - \frac{2\pi}{3} a^2, \end{aligned} \quad (2.171)$$

was für $a \rightarrow 0$ das vorige Ergebnis reproduziert.

Wir bezeichnen den *Rand* einer Fläche \mathcal{S} mit $\partial\mathcal{S}$ und die *Oberfläche* eines Volumens \mathcal{V} mit $\partial\mathcal{V}$. Ist eine Fläche oder ein Volumen unberandet (bei Volumens bedeutet dies $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$), so ist der Rand die leere Menge \emptyset . Die Oberfläche eines Volumens \mathcal{V} hat natürlich selbst keinen Rand. Diese Eigenschaft können wir jetzt kompakt schreiben als

$$\partial\partial\mathcal{V} = \emptyset. \quad (2.172)$$

2.3.1 Der Fundamentalsatz

Der *Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung* (oder der Analysis) sagt aus, dass die Integration die Umkehrung der Ableitung ist. Formal:

$$\int_a^b dx f(x) = F(b) - F(a) \quad \forall a, b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dF}{dx} = f(x). \quad (2.173)$$

Dies ist plausibel, wenn man die zweite Gleichung in die erste einsetzt:

$$\int_a^b dx \frac{dF}{dx} = \int_{F(a)}^{F(b)} dF = F(b) - F(a). \quad (2.174)$$

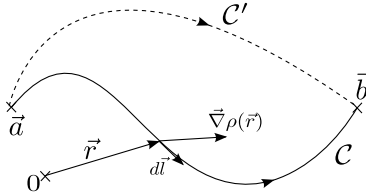
In Worten: Die Summe über alle infinitesimalen Änderungen $dF = \frac{dF}{dx} dx$ von F ist gleich der gesamten Änderung $F(b) - F(a)$. Diese Idee steckt auch hinter den Verallgemeinerungen des Fundamentalsatzes auf Ableitungen und Integrale im \mathbb{R}^3 , die wir nun besprechen werden.

Die Änderung eines skalaren Feldes $\rho(\vec{r})$ von \vec{r} nach $\vec{r} + d\vec{r}$ ist gemäß der Definition des Gradienten

$$d\rho = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\rho. \quad (2.175)$$

Daher finden wir für das Linienintegral

$$\int_{\mathcal{C}\vec{a}}^{\vec{b}} d\vec{l} \cdot \vec{\nabla}\rho = \int_{\rho(\vec{a})}^{\rho(\vec{b})} d\rho = \rho(\vec{b}) - \rho(\vec{a}). \quad (2.176)$$



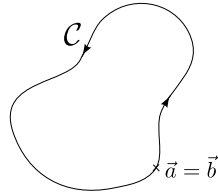
Dies ist der Fundamentalsatz für Gradienten. Die rechte Seite der Gleichung hängt offensichtlich nur von den Endpunkten \vec{a} , \vec{b} ab, aber nicht vom Verlauf der Kurve \mathcal{C} zwischen diesen. Es folgt, dass auch die linke Seite der Gleichung nicht von \mathcal{C} abhängt, während das Linienintegral $\int_{\mathcal{C}} d\vec{l} \cdot \vec{v}(\vec{r})$ dies i. A. tut. Wir finden also folgendes *Korollar*:

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} d\vec{l} \cdot \vec{\nabla}\rho \quad \text{ist wegunabhängig.} \quad (2.177)$$

Wählen wir $\vec{b} = \vec{a}$, also $\rho(\vec{b}) = \rho(\vec{a})$, so erhalten wir als weiteres *Korollar*

$$\oint d\vec{l} \cdot \vec{\nabla}\rho = 0 \quad (2.178)$$

für beliebige geschlossene Kurven.

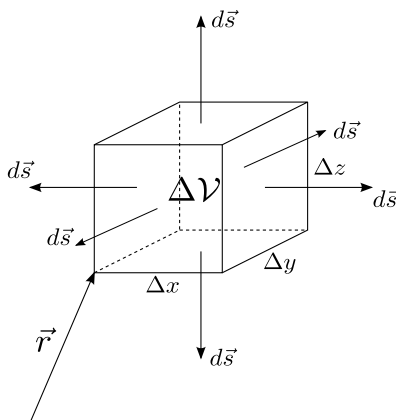


Wir betrachten als nächstes Volumenintegrale. Im eindimensionalen Fall setzt der Fundamentalsatz das Integral über die Ableitung mit der Funktion am Rand, nämlich an den Endpunkten, in Beziehung, siehe Glg. (2.173) und (2.174). Für ein Volumen \mathcal{V} ist der Rand $\partial\mathcal{V}$ seine Oberfläche. Wir erwarten, dass auf der rechten Seite des Fundamentalsatzes eine Summe über den Rand, d. h. ein Flächenintegral über $\partial\mathcal{V}$, erscheint. Wir geben den Satz für Volumenintegrale erst an und begründen ihn anschließend:

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \iint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \vec{v}, \quad (2.179)$$

das Volumenintegral über die Divergenz von \vec{v} ist also gleich dem Flächenintegral über \vec{v} über die Oberfläche. Diese Aussage heißt *Gaußscher Satz*.

Hier soll kein formaler Beweis, sondern ein Plausibilitätsargument gegeben werden. Wir betrachten einen kleinen Würfel $\Delta\mathcal{V}$:



Da der Würfel klein ist, können wir $\vec{v}(\vec{r})$ in eine Taylorreihe um \vec{r} entwickeln und nur die führenden Terme berücksichtigen. Es stellt sich heraus, dass wir dafür alle Terme bis zur Ordnung $\Delta x \Delta y \Delta z$ mitnehmen müssen. Die linke Seite von Gleichung (2.179) wird zu

$$\iiint_{\Delta V} dV \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \cong \underbrace{\Delta V}_{\Delta x \Delta y \Delta z} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}, \quad (2.180)$$

hier wird $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ zur *nullten* Ordnung, also als in ΔV konstant, angenähert, da ΔV schon explizit von der Ordnung $\Delta x \Delta y \Delta z$ ist. Die rechte Seite der Gleichung ist

$$\begin{aligned} \oiint_{\partial \Delta V} d\vec{s} \cdot \vec{v} &\cong \underbrace{\vec{v}(\vec{r} + \Delta x \hat{x}) \cdot \Delta y \Delta z \hat{x}}_{\text{rechts}} - \underbrace{\vec{v}(\vec{r}) \cdot \Delta y \Delta z \hat{x}}_{\text{links}} \\ &+ \underbrace{\vec{v}(\vec{r} + \Delta y \hat{y}) \cdot \Delta z \Delta x \hat{y}}_{\text{hinten}} - \underbrace{\vec{v}(\vec{r}) \cdot \Delta z \Delta x \hat{y}}_{\text{vorn}} \\ &+ \underbrace{\vec{v}(\vec{r} + \Delta z \hat{z}) \cdot \Delta x \Delta y \hat{z}}_{\text{oben}} - \underbrace{\vec{v}(\vec{r}) \cdot \Delta x \Delta y \hat{z}}_{\text{unten}} \\ &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \cdot \Delta x \Delta y \Delta z \hat{x} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \cdot \Delta y \Delta z \Delta x \hat{y} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \cdot \Delta z \Delta x \Delta y \hat{z} \\ &= \Delta V \frac{\partial v_x}{\partial x} + \Delta V \frac{\partial v_y}{\partial y} + \Delta V \frac{\partial v_z}{\partial z} = \Delta V \vec{\nabla} \cdot \vec{v}. \end{aligned} \quad (2.181)$$

Für einen kleinen Würfel stimmt der Satz also. Er gilt jedoch ganz allgemein, da wir jedes Volumen aus kleinen Würfeln aufbauen können. Die Beiträge von allen *inneren* Grenzflächen heben sich auf, weil die sich berührenden Würfel hier *entgegengesetzte* vektorielle Flächenelemente $d\vec{s}$ haben, während der Integrand \vec{v} natürlich gleich ist.

Zur Interpretation des Gaußschen Satzes erinnern wir uns, dass die Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ die *Quellen* und *Senken* des Feldes beschreibt und dass die rechte Seite

$$\oiint_{\partial V} d\vec{s} \cdot \vec{v} \quad (2.182)$$

der *Fluss* des Feldes durch ∂V ist. Also können wir den Gaußschen Satz deuten als

$$\sum_V (\text{Quellen} - \text{Senken}) = \text{Fluss durch } \partial V, \quad (2.183)$$

oder: „Was im Inneren erzeugt wird minus was vernichtet wird ist gleich dem, was durch die Oberfläche fließt“. Dies sieht aus wie ein Erhaltungssatz und wir werden Erhaltungssätze in der Tat mittels des Gaußschen Satzes formulieren.

■ Beispiel: Berechne das Oberflächenintegral

$$\oiint_{\partial V} d\vec{s} \cdot [\vec{r} - \vec{r}_0 + c \hat{z} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)] \quad (2.184)$$

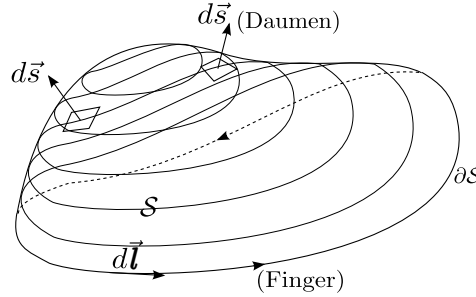
über die Oberfläche eines Würfels mit Kanten der Länge a parallel zu den kartesischen Koordinatenachsen und Mittelpunkt im Ursprung. Lösung mittels Gaußschem Satz:

$$\begin{aligned}
 \dots &= \iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{\nabla} \cdot [\vec{r} - \vec{r}_0 + c \hat{z} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)] \\
 &= \iiint_{\mathcal{V}} dV \left[\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{r}}_3 - \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{r}_0}_0 + c \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\hat{z} \times \vec{r})}_0 - c \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\hat{z} \times \vec{r}_0)}_0 \right] \\
 &= 3 \iiint_{\mathcal{V}} dV = 3a^3.
 \end{aligned} \tag{2.185}$$

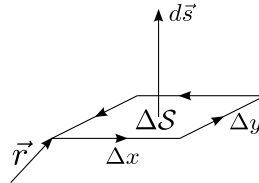
Für *Flächenintegrale* erwarten wir einen Zusammenhang zwischen dem Flächenintegral über eine Ableitung und dem Linienintegral über den Rand $\partial\mathcal{S}$ der Fläche \mathcal{S} . Dieser ist durch den *Stokesschen Satz* gegeben:

$$\iint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \oint_{\partial\mathcal{S}} d\vec{l} \cdot \vec{v}. \tag{2.186}$$

Das Flächenintegral über die Rotation von \vec{v} ist gleich dem Linienintegral über \vec{v} entlang des Randes. Sowohl die Orientierung der (berandeten) Fläche als auch die des Randes sind zweideutig. Der Satz trifft zu, wenn für die Orientierungen die *Rechte-Hand-Regel* gilt:



Der Stokessche Satz gilt für ein kleines Quadrat: Wir wählen (lokale) Koordinatenachsen \hat{x} , \hat{y} parallel zu dessen Seiten.



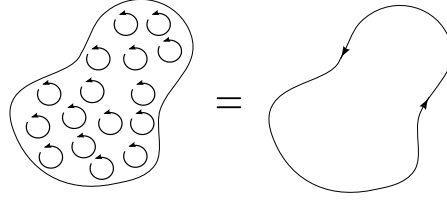
Die linke Seite der Gleichung wird

$$\iint_{\Delta\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cong \Delta x \Delta y \hat{z} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \tag{2.187}$$

und die rechte

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial\Delta\mathcal{S}} d\vec{l} \cdot \vec{v} &\cong \Delta x \hat{x} \cdot \vec{v}(\vec{r}) + \Delta y \hat{y} \cdot \vec{v}(\vec{r} + \Delta x \hat{x}) - \Delta x \hat{x} \cdot \vec{v}(\vec{r} + \Delta y \hat{y}) - \Delta y \hat{y} \cdot \vec{v}(\vec{r}) \\
 &\cong \cancel{\Delta x \hat{x} \cdot \vec{v}(\vec{r})} + \cancel{\Delta y \hat{y} \cdot \vec{v}(\vec{r})} + \Delta x \Delta y \hat{y} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} - \cancel{\Delta x \hat{x} \cdot \vec{v}(\vec{r})} - \Delta x \Delta y \hat{x} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} - \cancel{\Delta y \hat{y} \cdot \vec{v}(\vec{r})} \\
 &= \Delta x \Delta y \left(\frac{\partial}{\partial x} v_y - \frac{\partial}{\partial y} v_x \right) = \Delta x \Delta y \hat{z} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}).
 \end{aligned} \tag{2.188}$$

Da wir jede Fläche in kleine Quadrate zerlegen können und sich Beiträge von innen liegenden Kanten herausheben, gilt der Satz für alle Flächen. Anschaulich: Die Summe der Wirbelstärken ist der Strom entlang des Randes.



Da die rechte Seite der Gleichung nur vom Rand, aber ansonsten nicht von der Fläche abhängt, finden wir folgendes *Korollar*:

$$\iint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \quad \text{ist unabhängig von der Fläche } \mathcal{S} \text{ für gegebenen Rand } \partial\mathcal{S}. \quad (2.189)$$

Wählen wir eine geschlossene Fläche \mathcal{S} , so ist $\partial\mathcal{S} = \emptyset$ und wir erhalten das weitere *Korollar*

$$\oiint_{\Delta\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0 \quad \text{für beliebige geschlossene Flächen.} \quad (2.190)$$

Die diversen Formen des Fundamentalsatzes können ausgenutzt werden, um Regeln für die *partielle Integration* im \mathbb{R}^3 herzuleiten. Zur Erinnerung: Für Funktionen f, g einer Variablen x haben wir

$$f g \Big|_a^b \stackrel{\text{Fundamentalsatz}}{=} \int_a^b dx \frac{d}{dx} (f g) \stackrel{\text{Produktregel}}{=} \int_a^b dx \frac{df}{dx} g + \int_a^b dx f \frac{dg}{dx} \quad (2.191)$$

$$\Rightarrow \int_a^b dx f \frac{dg}{dx} = f g \Big|_a^b - \int_a^b dx \frac{df}{dx} g. \quad (2.192)$$

Dies ist die bekannte Form der partiellen Integration. Wir können dieselbe Idee auf Linien-, Flächen- und Volumenintegrale anwenden. Dies ergibt zahlreiche Regeln derselben Form. Wir leiten ein Beispiel für Volumenintegrale her:

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \rho \vec{v} \stackrel{\text{Gauß}}{=} \iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \stackrel{\text{Produktregel}}{=} \iiint_{\mathcal{V}} dV (\vec{\nabla} \rho) \cdot \vec{v} + \iiint_{\mathcal{V}} dV \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (2.193)$$

$$\Rightarrow \iiint_{\mathcal{V}} dV \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \oiint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \rho \vec{v} - \iiint_{\mathcal{V}} dV (\vec{\nabla} \rho) \cdot \vec{v}. \quad (2.194)$$

In der Praxis kommen oft Integrale über \mathbb{R}^3 vor. In diesem Fall verschwindet der Oberflächenterm, wenn der Integrand hinreichend schnell abfällt. Um dies zu prüfen, kann man das Volumen endlich wählen, z. B. als Kugel mit dem Radius R , und den Grenzübergang zum \mathbb{R}^3 (also $R \rightarrow \infty$) betrachten.

2.3.2 Potentiale

Wir hatten in Abschnitt 2.2.2 gesehen, dass die Rotation eines Gradientenfeldes verschwindet. Formal können wir diese Aussage schreiben als

$$\exists V(\vec{r}) : \quad \vec{F} = -\vec{\nabla} V \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0. \quad (2.195)$$

Das Minuszeichen ist reine Konvention (und nur in der Physik üblich). Wir wollen nun zeigen, dass die Umkehrung ebenfalls gilt: Verschwindet die Rotation von \vec{F} überall, so existiert ein skalares Feld $-V$, dessen Gradient \vec{F} ist,

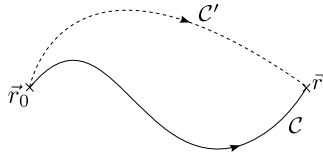
$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists V(\vec{r}) : \quad \vec{F} = -\vec{\nabla} V. \quad (2.196)$$

Das Feld $V(\vec{r})$ heißt skalares *Potential* zu \vec{F} .

□ Beweis: Seien \vec{r}_0 und \vec{r} zwei Punkte. Wir zeigen zunächst, dass das Linienintegral

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{l} \cdot \vec{F} \quad (2.197)$$

nicht vom Weg zwischen den Endpunkten \vec{r}_0 und \vec{r} abhängt.



Seien nämlich \mathcal{C} und \mathcal{C}' zwei Kurven mit diesen Endpunkten. Dann unterscheiden sich

$$\int_{\mathcal{C}} d\vec{l} \cdot \vec{F} \quad \text{und} \quad \int_{\mathcal{C}'} d\vec{l} \cdot \vec{F} \quad (2.198)$$

durch ein Linienintegral über die *geschlossene* Kurve $\mathcal{C} \cup$ (Umkehrung von \mathcal{C}'). Dieses ist nach dem Stokesschen Satz gleich

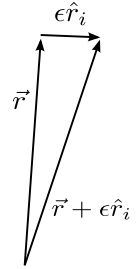
$$\iint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot (\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{F}}_0) = 0. \quad (2.199)$$

Die beiden Integrale in (2.198) sind also gleich. Wir definieren

$$W(\vec{r}) := - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{l} \cdot \vec{F} \quad (2.200)$$

und halten \vec{r}_0 fest. Wie gezeigt, hängt $W(\vec{r})$ tatsächlich nur von \vec{r} ab, nicht vom Weg. W ist daher eine *Funktion* von \vec{r} , d. h. ein skalares Feld. Sein Gradient hat die kartesischen Komponenten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r_i} W(\vec{r}) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{W(\vec{r} + \epsilon \hat{r}_i) - W(\vec{r})}{\epsilon} \quad \left| \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, \quad r_1 = x, r_2 = y, r_3 = z \end{array} \right. \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(- \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r} + \epsilon \hat{r}_i} d\vec{l} \cdot \vec{F} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{l} \cdot \vec{F} \right) \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r} + \epsilon \hat{r}_i} d\vec{l} \cdot \vec{F} - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{l} \cdot \vec{F} \right) \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\vec{r}}^{\vec{r} + \epsilon \hat{r}_i} d\vec{l} \cdot \vec{F} \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \epsilon \hat{r}_i \cdot \vec{F}(\vec{r}) = - \hat{r}_i \cdot \vec{F}(\vec{r}) = -F_i(\vec{r}), \end{aligned} \quad (2.201)$$



wobei wir ausgenutzt haben, dass für ϵ infinitesimal \vec{F} als konstant betrachtet werden kann. Es folgt

$$\vec{\nabla} W(\vec{r}) = -\vec{F}(\vec{r}) \quad (2.202)$$

$$\Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} W(\vec{r}). \quad (2.203)$$

Damit ist gezeigt, dass $W(\vec{r})$ eine mögliche Wahl für das Potential $V(\vec{r})$ ist: Eine explizite Form für V ist also

$$V(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{l} \cdot \vec{F} \quad (2.204)$$

und wie gezeigt sorgt die Rotationsfreiheit von \vec{F} dafür, dass dieser Ausdruck wohldefiniert ist, ohne den Weg anzugeben. Das Potential ist *nicht eindeutig*, da wir immer eine Konstante addieren können, ohne den Gradienten zu verändern:

$$\vec{\nabla} V(\vec{r}) = \vec{\nabla} [V(\vec{r}) + c]. \quad (2.205)$$

Wir haben damit folgende Äquivalenz gezeigt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists V(\vec{r}) : \quad \vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r}). \quad (2.206)$$

Oft fasst man diese Aussage und die als Nebenergebnisse gefundenen zu folgendem *Satz* zusammen:

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Überall gilt $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$.
2. Es existiert ein Potential $V(\vec{r})$, so dass $\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$.
3. $\int_a^b d\vec{l} \cdot \vec{F}$ ist wegunabhängig für gegebene Endpunkte.
4. $\oint d\vec{l} \cdot \vec{F} = 0$ für jede geschlossene Kurve.

■ Beispiele:

1. Existiert ein Potential V zu $\vec{F} = x \hat{y}$? Wenn ja, bestimme V . Es ist

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial y} 0 - \frac{\partial}{\partial z} x, \frac{\partial}{\partial z} 0 - \frac{\partial}{\partial x} 0, \frac{\partial}{\partial x} x - \frac{\partial}{\partial y} 0 \right) = \hat{z} \neq 0. \quad (2.207)$$

Ein Potential existiert nicht.

2. Existiert ein ein Potential V zu $\vec{F} = \vec{r}$? Wenn ja, bestimme V . Es ist $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ (s. o.), also existiert ein Potential. Eine mögliche Wahl ist

$$V(\vec{r}) = - \int_0^{\vec{r}} d\vec{l}' \cdot \vec{r}'. \quad (2.208)$$

Das Integral ist wegunabhängig, wir wählen die gerade Strecke von 0 nach \vec{r} , dann ist $d\vec{l}' = dr' \hat{r}'$ (Kugelkoordinaten), also

$$V(\vec{r}) = - \int_0^{\vec{r}} dr' \hat{r}' \cdot r' \hat{r}' = - \int_0^{\vec{r}} dr' r' = -\frac{r^2}{2}. \quad (2.209)$$

Eine weitere wichtige Aussage betrifft divergenzfreie Vektorfelder. Wir hatten in Abschnitt (2.2.2) gesehen, dass die Divergenz eines Wirbelfeldes verschwindet. Formal:

$$\exists \vec{A}(\vec{r}) : \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0. \quad (2.210)$$

Man kann zeigen, dass auch die Umkehrung gilt; den Beweis besprechen wir hier nicht. Damit haben wir die Äquivalenz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \exists \vec{A}(\vec{r}) : \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (2.211)$$

Ein solches Feld \vec{A} heißt *Vektorpotential* zu \vec{F} . \vec{A} ist nicht eindeutig bestimmt, denn wenn wir zu \vec{A} ein Gradientenfeld $\vec{\nabla}\chi$ addieren, erhalten wir

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla}\chi) = \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{A}}_{\vec{F}} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\chi}_0 = \vec{F}, \quad (2.212)$$

also ist $\vec{A} + \vec{\nabla}\chi$ ebenfalls ein Vektorpotential zu \vec{F} . Man fasst diese Äquivalenz und einige Ergebnisse, die sich leicht aus dem Stokesschen Satz ergeben, zu folgendem *Satz* zusammen:

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Überall gilt $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$.
2. Es existiert ein Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$, so dass $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.
3. $\iint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot \vec{F}$ ist wegunabhängig von der Fläche \mathcal{S} , für gegebenen Rand.
4. $\oiint d\vec{s} \cdot \vec{F} = 0$ für jede geschlossene Fläche.

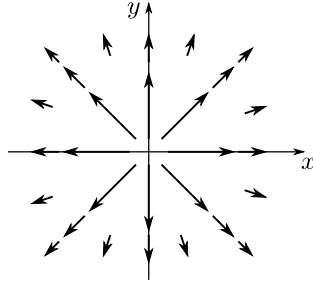
Schließlich bemerken wir noch, dass *jedes* (hinreichend oft stetig differenzierbare) Vektorfeld \vec{F} als Summe eines Gradienten und einer Rotation dargestellt werden kann:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V + \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (2.213)$$

Die Zerlegung ist nicht eindeutig. Wir verzichten auf den Beweis.

2.4 Die Diracsche δ -Funktion

Betrachte das Vektorfeld $\vec{v} = \hat{r}/r^2 = \vec{r}/r^3$.



Wir berechnen die Divergenz in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 v_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \underbrace{v_\theta}_0 + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \underbrace{v_\phi}_0 \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} 1 = 0.\end{aligned}\tag{2.214}$$

Das Feld ist anscheinend quellenfrei, was vielleicht überrascht – wir kommen gleich darauf zurück. Nun bestimmen wir den Fluss des Feldes durch eine Kugel mit dem Radius R um den Ursprung:

$$\oiint_{\partial \mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \vec{v} = R^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \hat{r} \cdot \frac{\hat{r}}{R^2} = \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi.\tag{2.215}$$

Der Gaußsche Satz liefert somit

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \oiint_{\partial \mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \vec{v} = 4\pi.\tag{2.216}$$

Aber wir hatten $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ berechnet – wo liegt der Fehler? Das Ergebnis $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ gilt nur für $\vec{r} \neq 0$, bei $\vec{r} = 0$ hat \vec{v} eine Singularität. Damit ist \vec{v} nicht überall hinreichend oft stetig differenzierbar, was wir immer, zumindest stillschweigend, angenommen haben, und der Gaußsche Satz gilt zunächst einmal gar nicht. Wir wollen ihn aber *erweitern* auf Fälle wie im Beispiel, da diese Art von Feld in der Elektrodynamik eine große Rolle spielt. Daher *fordern* wir die Gültigkeit des Gaußschen Satzes. Dann muß die Singularität bei $\vec{r} = 0$ dafür sorgen, dass der Satz erfüllt ist, denn überall sonst gilt ja $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$. Also: Für jeden Radius R muss gelten

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 4\pi,\tag{2.217}$$

insbesondere für *beliebig kleinen* Radius $R > 0$. Wir *definieren* eine „Funktion“ $\delta(\vec{r})$ so, dass

1. $\delta(\vec{r}) = 0 \quad \forall \vec{r} \neq 0$ und
2. $\iiint_{\mathcal{V}} dV \delta(\vec{r}) = 1$ für jedes Volumen \mathcal{V} das $\vec{r} = 0$ enthält (nicht am Rand), insbesondere für $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$.

Dafür muss $\delta(\vec{r})$ bei $\vec{r} = 0$ singulär sein – jeder endliche Wert würde $\iiint_{\mathcal{V}} dV \delta(\vec{r}) = 0$ ergeben. Wir müssen uns noch überzeugen, dass die Definition nicht zu widersprüchen führt. Dann können wir schreiben

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} = 4\pi\delta(\vec{r})\tag{2.218}$$

und der Gaußsche Satz ist erfüllt.

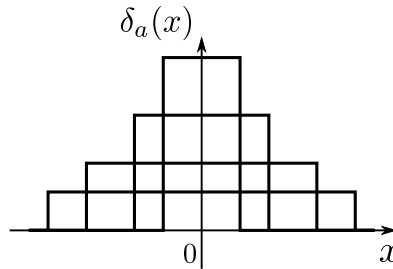
2.4.1 Die δ -Funktion in einer Dimension

Wir betrachten zunächst die eindimensionale Form der δ -„Funktion“. Wir definieren $\delta(x)$ durch

1. $\delta(x) = 0 \quad \forall x \neq 0$ und
2. $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = 1$.

Mathematisch exakt ist $\delta(x)$ keine Funktion, sondern eine sogenannte *Distribution*, die nur unter dem Integral definiert ist. Wir lassen diesen Punkt aber von nun an, wie in der Physik üblich, unbeachtet. $\delta(x)$ lässt sich aber als Grenzwert von Funktionenfolgen (aus gewöhnlichen Funktionen) darstellen. Sei z. B.

$$\delta_a(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } |x| > a, \\ \frac{1}{2a} & \text{für } |x| \leq a. \end{cases} \quad (2.219)$$



Beachte

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_a(x) = \frac{2a}{2a} = 1 \quad \forall a > 0. \quad (2.220)$$

Also konvergiert die Folge $\delta_a(x)$ für $a \rightarrow 0^+$ (a geht von oben gegen 0) gegen $\delta(x)$. Unendlich viele Darstellungen sind möglich, z. B. durch Gaußfunktionen

$$\delta_\sigma(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} \quad \text{mit} \quad \delta(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \delta_\sigma(x) \quad (2.221)$$

und durch Lorentzfunktionen

$$\delta_\eta(x) := \frac{1}{\pi} \frac{\eta}{x^2 + \eta^2} \quad \text{mit} \quad \delta(x) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \delta_\eta(x). \quad (2.222)$$

Aus der Definition von $\delta(x)$ ergeben sich einige wichtige Eigenschaften: Hier sei $f(x)$ eine gewöhnliche Funktion, also insbesondere nicht $\delta(x)$.

3. $f(x) \delta(x) = f(0) \delta(x)$, da für $x \neq 0$ gilt $\delta(x) = 0$ und der Faktor $f(x)$ dann irrelevant ist. Es folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(0) \delta(x) = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = f(0). \quad (2.223)$$

3'. Etwas verallgemeinert:

$$f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0) \delta(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0). \quad (2.224)$$

Die δ -Funktion pickt also den Funktionswert am Ort ihrer Nullstelle heraus.

4. $\delta(kx) = \frac{1}{|k|} \delta(x)$ für eine Konstante k . Man sagt, $\delta(x)$ ist antilinear.

□ Beweis: Betrachte

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(kx) \quad (2.225)$$

und substituiere $y = kx \Rightarrow x = y/k \Rightarrow dx = dy/k$, also

$$\dots = \int_{-\infty k}^{\infty k} \frac{dy}{k} f\left(\frac{y}{k}\right) \delta(y) = \underbrace{\text{sgn } k}_{\text{sgn } k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{k} f\left(\frac{y}{k}\right) \delta(y). \quad (2.226)$$

$\text{sgn } k$ ist das Vorzeichen von k , es tritt hier auf, weil für $k < 0$ die Integrationsgrenzen vertauscht werden. Weiter ist

$$\dots = \frac{\text{sgn } k}{k} \int_{-\infty}^{\infty} dy f\left(\frac{y}{k}\right) \delta(y) = \frac{1}{|k|} f(0) = \frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x). \quad (2.227)$$

Da dies für alle Funktionen f gilt, folgt die Behauptung.

4'. Verallgemeinerung:

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i), \quad (2.228)$$

wobei x_i einfache Nullstellen von $g(x)$ sind, d. h. $g(x_i) = 0$ aber $g'(x_i) \neq 0$. Die Summe erstreckt sich über alle solchen Nullstellen.

□ Beweis:

- (a) für $g(x) \neq 0$ (x ist keine Nullstelle, d. h. nicht gleich einem der x_i) sind beide Seiten der Gleichung Null, sie ist also erfüllt.
- (b) Sei $[a_i, b_i]$ ein Intervall, das die Nullstelle x_i enthält (nicht am Rand). Da x_i eine *einfache* Nullstelle ist, existiert ein solches Intervall, auf dem $g(x)$ monoton ist. Wähle $[a_i, b_i]$ entsprechend. Wir integrieren beide Seiten der behaupteten Gleichung über $[a_i, b_i]$. Die linke Seite ergibt

$$\begin{aligned} \int_{a_i}^{b_i} dx \delta(g(x)) & \quad \left| \text{Substitution } y = g(x) \Rightarrow dy = dx \frac{dg}{dx} = dx g'(x) \right. \\ & = \int_{g(a_i)}^{g(b_i)} dy \frac{1}{g'(x(y))} \delta(y). \end{aligned} \quad (2.229)$$

Nun ist auf $[a_i, b_i]$ genau dann $y = g(x) = 0$, wenn $x = x_i$. Also ist

$$\begin{aligned} \int_{a_i}^{b_i} dx \delta(g(x)) & = \int_{g(a_i)}^{g(b_i)} dy \frac{1}{g'(x_i)} \delta(y) = \frac{1}{g'(x_i)} \int_{g(a_i)}^{g(b_i)} dy \delta(y) \\ & = \frac{1}{g'(x_i)} \text{sgn} [g(b_i) - g(a_i)] = \frac{1}{g'(x_i)} \text{sgn } g'(x_i) = \frac{1}{|g'(x_i)|}, \end{aligned} \quad (2.230)$$

wobei wir verwendet haben, dass $g(x)$ auf $[a_i, b_i]$ monoton ist. Die rechte Seite der Gleichung wird

$$\int_{a_i}^{b_i} dx \sum_j \frac{1}{|g'(x_j)|} \delta(x - x_j) = \sum_j \frac{1}{|g'(x_j)|} \int_{a_i}^{b_i} dx \delta(x - x_j) = \sum_j \frac{1}{|g'(x_j)|} \delta_{ij}, \quad (2.231)$$

da nur die eine Nullstelle $x_i = x_j$ im Intervall $[a_i, b_i]$ liegt, und damit

$$\dots = \frac{1}{|g'(x_i)|}. \quad (2.232)$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

5. Die Stammfunktion von $\delta(x)$ ist die Stufenfunktion (Heavisidesche Sprungfunktion):

$$\int_{-\infty}^x dx' \delta(x' - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < x_0 \\ 1 & \text{für } x > x_0 \end{cases} = \theta(x - x_0) \quad \text{für } x \neq x_0. \quad (2.233)$$

Der Wert bei $x = x_0$ ist zunächst undefiniert, man kann bei Bedarf $\theta(0) = 1/2$ setzen. Damit können wir die δ -Funktion als Ableitung schreiben:

$$\delta(x - x_0) = \frac{d}{dx} \theta(x - x_0). \quad (2.234)$$

6. Wir können auch Ableitungen von $\delta(x)$ definieren. Dazu fordern wir die Gültigkeit der partiellen Integration auch für δ : Sei $a < x_0 < b$, dann ist

$$\int_a^b dx \delta'(x - x_0) f(x) = \underbrace{\delta(x - x_0) f(x)}_0 \Big|_a^b - \int_a^b dx \delta(x - x_0) f'(x) = -f'(x_0). \quad (2.235)$$

Dies soll für beliebige $a < x_0 < b$ gelten, wir können also auch schreiben

$$\delta'(x - x_0) f(x) = -\delta(x - x_0) f'(x_0). \quad (2.236)$$

Diese Vorschrift lässt sich durch mehrfache Anwendung auf höhere Ableitungen verallgemeinern:

$$\delta^{(n)}(x - x_0) f(x) = (-1)^n \delta(x - x_0) f^{(n)}(x_0). \quad (2.237)$$

■ Beispiel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta''(x) x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) \frac{d^2}{dx^2} x^2 = 2. \quad (2.238)$$

2.4.2 Die δ -Funktion im \mathbb{R}^3

Wir kommen noch einmal auf die δ -Funktion in drei Dimensionen zurück, die sich ja aus dem Wunsch ergab, den Gaußschen Satz für $\vec{v} = \hat{r}/r^2$ zu retten. Die δ -Funktion in drei Dimensionen ist in kartesischen Koordinaten einfach definiert durch

$$\delta(\vec{r}) := \delta(x) \delta(y) \delta(z). \quad (2.239)$$

Manchmal schreibt man dafür auch $\delta^3(\vec{r})$, was aber eher verwirrend erscheint. Es folgt

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0). \quad (2.240)$$

Offensichtlich gilt

1. $\delta(\vec{r}) = 0 \quad \forall \vec{r} \neq 0$ und
2. $\iiint dV \delta(\vec{r}) = 1$.

Also erfüllt $\delta(\vec{r})$ die oben gestellten Forderungen an die Quellen des Feldes $\vec{v} = \hat{r}/r^2$:

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} = 4\pi \delta(\vec{r}). \quad (2.241)$$

Da gilt

$$\vec{\nabla} \frac{1}{r} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} = -\frac{\hat{r}}{r^2}, \quad (2.242)$$

folgt die wichtige Beziehung

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} = -4\pi \delta(\vec{r}). \quad (2.243)$$

Kapitel 3

Mikroskopische Elektrostatik

Eine der Fragen, die die Elektrodynamik beantworten soll, ist folgende: Gegeben die (evtl. zeitabhängigen) Orte $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots$ von (Quell-) Ladungen q_1, q_2, \dots , wie verläuft die Bewegung einer weiteren Ladung, der Probeladung q ? Also sind $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \dots$ und geeignete Anfangsbedingungen für die Probeladung gegeben und die Trajektorie $\vec{r}(t)$ der Probeladung ist gesucht. Diese Formulierung der Aufgabe setzt offenbar voraus, dass die Bewegung der Probeladung die Trajektorien der Quellladungen nicht beeinflusst – andernfalls müssten wir die gekoppelten Bewegungsgleichungen für alle Ladungen lösen. Die Annahme ist sinnvoll, wenn die Probeladung klein ist, d. h., wenn für alle i gilt $|q| \ll |q_i|$. (Dies ist bei Weitem nicht die einzige Art von Frage, die wir stellen können – elektromagnetische Phänomene existieren auch ohne Quellladungen, z. B. Licht.) Die Newton-Mechanik zeigt, dass wir die Trajektorie $\vec{r}(t)$ im Prinzip bestimmen können, wenn wir die zu jedem Zeitpunkt auf die Probeladung wirkende Gesamtkraft kennen. Damit haben wir das Problem darauf zurückgeführt, die Kraft auf q aufgrund der Quellladungen q_1, q_2, \dots zu bestimmen. Die allgemeine Lösung ist nicht einfach – der Grund dafür ist, dass sich elektromagnetische Wirkungen nur mit einer endlichen Geschwindigkeit, der Lichtgeschwindigkeit c , ausbreiten. Die Kraft auf die Ladung q zur Zeit t aufgrund der Ladung q_i kann daher nicht vom Ort $\vec{r}_i(t)$ von q_i zur Zeit t abhängen, sondern nur vom Ort $\vec{r}_i(t')$ zur Zeit t' , wobei eine Wirkung im Zeitintervall $t - t'$ gerade den Weg zwischen q_i (zur Zeit t') und q (zur Zeit t) zurücklegt. Dies bedeutet

$$|\vec{r}(t) - \vec{r}_i(t')| = c(t - t'). \quad (3.1)$$

Das ist selbst eine komplizierte Gleichung für t' , die auch von der noch unbekanntem Trajektorie $\vec{r}(t)$ abhängt. Wir werden aber in dieser Vorlesung die resultierenden zeitverzögerten (*retardierten*) Kräfte nicht explizit auszurechnen versuchen. Sind die Quellladungen in Ruhe, wird das Problem viel einfacher. Diese Annahme definiert die *Elektrostatik*, um die es in diesem Kapitel geht.

Das Auffinden der Gesamtkraft auf die Probeladung wird durch das *Superpositionsprinzip* stark vereinfacht: Ist \vec{F}_i die Kraft auf q aufgrund von q_i , so ist die Gesamtkraft die vektorielle Summe

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots \quad (3.2)$$

Die Gültigkeit des Superpositionsprinzips ist eine Erfahrungstatsache für das elektromagnetische Feld, es gilt aber nicht in jeder Feldtheorie. Die klassische Feldtheorie der Gravitation, also die Allgemeine Relativitätstheorie, erfüllt das Superpositionsprinzip z. B. nicht. Die beobachtete Gültigkeit schränkt sowohl die Form der das Feld selbst beschreibenden Gleichungen (also der „ungestörten Dynamik“ des Feldes) als auch die Form der Kopplung der Ladungen an das Feld deutlich ein. Wegen des Superpositionsprinzips reicht es aus, die Wirkung *einer* Quellladung zu untersuchen.

3.1 Das Coulomb-Gesetz

Experimentell findet man, dass die Kraft einer Quellladung q' in Ruhe am Ort \vec{r}' auf eine Punktladung q am Ort \vec{r} gegeben ist durch das *Coulomb-Gesetz* (in SI-Einheiten)

$$\vec{F} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^2} \equiv \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{(\Delta r)^3} \quad (3.3)$$

mit dem Abstandsvektor

$$\overrightarrow{\Delta r} := \vec{r} - \vec{r}', \quad (3.4)$$

dessen Betrag, dem Abstand

$$\Delta r := |\overrightarrow{\Delta r}| = |\vec{r} - \vec{r}'| \quad (3.5)$$

und dem Einheitsvektor

$$\widehat{\Delta r} := \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta r} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (3.6)$$

ϵ_0 heißt die *Permittivität des Vakuums* oder *Influenzkonstante*. Der Vorfaktor $1/4\pi\epsilon_0$ beruht nur auf dem Einheitensystem, wir könnten den Faktor $1/\sqrt{4\pi\epsilon_0}$ in die Ladung absorbieren, was auf Gaußsche Einheiten führt. Physikalisch bedeutsam sind dagegen folgende Beobachtungen: Die Kraft \vec{F} ist

- proportional zur Quellladung und zur Probeladung,
- proportional zu $1/(\Delta r)^2$ (Δr ist der Abstand),
- entlang der Verbindungslinie zwischen den Ladungen gerichtet, d. h. eine *Zentralkraft*, und
- abstoßend für gleichnamige und anziehend für verschiedennamige Ladungen.

Wir berechnen die Rotation $\vec{\nabla} \times \vec{F}$. Dazu legen wir den Koordinatenursprung in den Punkt \vec{r}' , also $\vec{r}' = 0$, und verwenden Kugelkoordinaten. Dann gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times F_r \hat{r} = \frac{\hat{\theta}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} F_r - \frac{\hat{\varphi}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} F_r. \quad (3.7)$$

Nun ist aber

$$F_r = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad (3.8)$$

unabhängig von θ und φ und daher $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$. Damit ist die Coulomb-Kraft *konservativ* und es existiert ein Potential. Für mehrere Quellladungen q_i bei \vec{r}_i liefert das Superpositionsprinzip die Gesamtkraft

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{(\Delta r_i)^2} \widehat{\Delta r_i} \quad (3.9)$$

mit $\overrightarrow{\Delta r_i} = \vec{r} - \vec{r}_i$ usw.

Die Kraft ist offenbar proportional zur Probeladung q . Wir können die Abhängigkeit von der Probeladung also abspalten und schreiben

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (3.10)$$

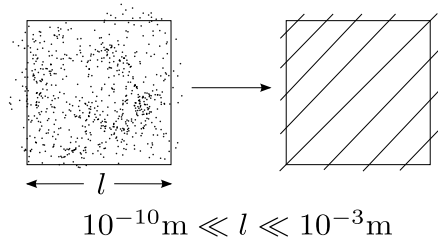
mit dem *elektrischen Feld* am Ort \vec{r} ,

$$\vec{E}(\vec{r}) := \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{(\Delta r_i)^2} \widehat{\Delta r_i}. \quad (3.11)$$

Das Feld \vec{E} ist also unabhängig von der Probeladung q und insbesondere unverändert für $q \rightarrow 0$. Dies legt nahe, dem Feld \vec{E} eine von Probeladungen unabhängige Existenz zuzuschreiben. Es wäre dann nicht nur eine Hilfsgröße bei der Berechnung von Kräften. Für die eigenständige Existenz von \vec{E} spricht, dass wir später nichttriviale Bewegungsgleichungen für \vec{E} in Abwesenheit von Ladungen erhalten werden. Kurz: elektromagnetische Wellen breiten sich auch aus, wenn man sie nicht mit Hilfe von Probeladungen nachweist.

3.1.1 Kontinuierliche Ladungsdichte

Die fundamentalen Ladungsträger (Elektronen, Quarks, ...) sind nach heutiger Erkenntnis punktförmig. Es ist aber oft praktisch, von einer kontinuierlichen Ladungsverteilung auszugehen. Wenn wir nur an Effekten auf Längenskalen groß im Vergleich zu atomaren Abständen (ungefähr $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$) interessiert sind, können wir die Ladungsverteilung über Bereiche *groß gegen atomare Abstände aber klein gegen makroskopische Längen* mitteln:



Wir gehen von diskreten Punktladungen q_i zu infinitesimalen Ladungselementen dq über:

$$q_i \rightarrow dq = \begin{cases} \lambda dl & \text{in einer Dimension,} \\ \sigma ds & \text{in zwei Dimensionen,} \\ \rho dV & \text{in drei Dimensionen.} \end{cases} \quad (3.12)$$

Hier ist

- λ die *Linienladungsdichte* (Ladung pro Länge),
- σ die *Flächenladungsdichte* (Ladung pro Fläche) und
- ρ die *Volumenladungsdichte* oder einfach *Ladungsdichte* (Ladung pro Volumen).

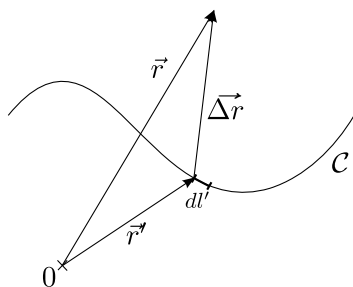
Im Coulomb-Gesetz für das elektrische Feld wird die Summe über die Punktladungen zu einem Integral, formal

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dq(\vec{r}') \frac{\widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^2} \quad (3.13)$$

mit $\widehat{\Delta r} = \vec{r} - \vec{r}'$ und dem Ladungselement $dq(\vec{r}')$ am Ort \vec{r}' . Dies ergibt

- in 1D:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C dl' \lambda(\vec{r}') \frac{\widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^2}, \quad (3.14)$$



- in 2D:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S ds' \sigma(\vec{r}') \frac{\widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^2}, \quad (3.15)$$

- in 3D:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V dV' \rho(\vec{r}') \frac{\widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^2}. \quad (3.16)$$

Wir können natürlich in allen Fällen

$$\frac{\widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^2} = \frac{\vec{\Delta r}}{(\Delta r)^3} \quad (3.17)$$

ausnutzen, was die Rechnung oft erleichtert. Die dreidimensionale Version ist tatsächlich ganz allgemein. Wir erhalten die 0D (Punktladung), 1D und 2D Resultate durch Einsetzen von geeigneten δ -Funktionen für die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$. Zum Beispiel für

$$\rho(\vec{r}) = q_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (3.18)$$

erhalten wir

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V dV' q_0 \delta(\vec{r}' - \vec{r}_0) \frac{\widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^2} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V dV' \delta(\vec{r}' - \vec{r}_0) \frac{\vec{r}' - \vec{r}_0}{|\vec{r}' - \vec{r}_0|^3} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}' - \vec{r}_0}{|\vec{r}' - \vec{r}_0|^3}, \quad (3.19)$$

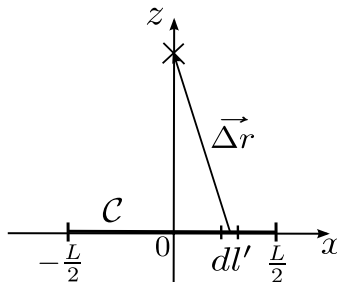
also das Feld einer Punktladung.

Es wird später nützlich sein, zu quantifizieren, wie viel elektrisches Feld durch eine gegebene Fläche S hindurch tritt. Dies wird durch den *elektrischen Fluss* beschrieben. Dieser lautet

$$\Phi_E = \iint_S d\vec{s} \cdot \vec{E}. \quad (3.20)$$

(Man sollte sich nicht vorstellen, dass hier etwas durch die Fläche hindurch strömt.) Offensichtlich ist $\Phi_E = 0$, wenn das Feld parallel zur Fläche S liegt, und betragsmäßig maximal, wenn es senkrecht zu ihr steht.

■ Beispiel: Berechne das Feld \vec{E} im Abstand z über dem Mittelpunkt eines dünnen Drahtes der Länge L mit gleichförmiger Linienladungsdichte λ .



Aus Symmetriegründen ist $\vec{E} \parallel \hat{z}$. Es gilt

$$\begin{aligned} E_z(0, 0, z) &= \hat{z} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C dl' \lambda \frac{\vec{\Delta r}}{(\Delta r)^3} = \hat{z} \cdot \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} dx' \frac{z\hat{z} - x'\hat{x}}{[z^2 + (x')^2]^{3/2}} \\ &= \frac{\lambda z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} dx' \frac{1}{[z^2 + (x')^2]^{3/2}} \stackrel{\text{Tafel}}{=} \frac{\lambda z}{4\pi\epsilon_0} \frac{x'}{z^2 \sqrt{z^2 + (x')^2}} \Big|_{-L/2}^{L/2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda L}{z \sqrt{z^2 + (L/2)^2}}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Es ist oft nützlich, Grenzfälle zu betrachten:

(a) $z \gg L$:

$$E_z \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda L}{z^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2}, \quad (3.22)$$

das ist das Feld einer Punktladung $Q = \lambda L$.

(b) $z \ll L$:

$$E_z \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{z}. \quad (3.23)$$

Damit haben wir das Ergebnis für einen unendlich langen Draht gefunden. Das Feld ist in diesem Fall natürlich unabhängig von x und hängt nur vom Abstand z vom Draht ab. Beachte, dass das Feld mit $1/z$, also schwächer als für eine Punktladung, abfällt.

Im *Prinzip* haben wir nun das Problem schon gelöst, die Kraft auf eine Punktladung aufgrund beliebiger Quellladungen zu bestimmen. Das ist aber aus zwei Gründen noch nicht ausreichend:

1. Die Auswertung des Integrals ist oft schwierig.
2. Bei Anwesenheit von Leitern kennen wir die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ gar nicht explizit, da sie vom Feld beeinflusst wird. Wir müssen Ladung und Feld zusammen ausrechnen.

Wir stellen jetzt einige Werkzeuge bereit, um diese Schwierigkeiten zu überwinden. Dies wird auch zu einem tieferen Verständnis des Zusammenhangs zwischen elektrischem Feld und Ladungen führen.

3.2 Feldlinien

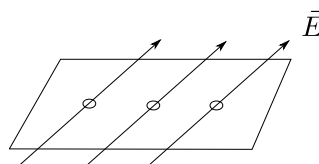
Eine Möglichkeit, ein Feld $\vec{E}(\vec{r})$ graphisch darzustellen, ist, an ausgewählten Punkten den Vektor $\vec{E}(\vec{r})$ durch einen Vektorpfeil wiederzugeben. Dies ist u. a. deshalb unpraktisch, weil \vec{E} mit zunehmender Entfernung von den Quellladungen schnell abnimmt. Besser ist die Darstellung durch Feldlinien. Diese gehorchen folgenden *Regeln*:

1. $\vec{E}(\vec{r})$ ist überall tangential an den Feldlinien und zeigt in dieselbe Richtung.

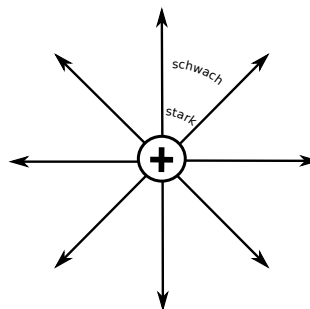


Dies impliziert, zusammen mit dem Coulomb-Gesetz, die folgenden Regeln:

2. Feldlinien beginnen (enden) nur an positiven (negativen) Ladungen. Die „Anzahl“ der an einer Ladung beginnenden (endenden) Feldlinien ist proportional zur Ladung (die Anzahl ist natürlich unendlich, aber wir zeichnen eine endliche Zahl von Linien, die proportional zur Ladung ist). Die Feldlinien gehen in alle Raumrichtungen gleichmäßig aus, da das Feld in der Nähe einer Punktladung *isotrop* ist.
3. Feldlinien schneiden sich nicht (außer an Orten mit singulärer Ladungsdichte, wo sie unstetig sind), denn sonst wäre $\vec{E}(\vec{r})$ am Schnittpunkt nicht eindeutig.
4. Die Dichte der Feldlinien ist proportional zur Feldstärke $|\vec{E}(\vec{r})|$. Damit ist der Fluss Φ_E des Vektorfeldes \vec{E} durch eine Fläche proportional zur Zahl der Feldlinien, die diese Fläche durchdringen.



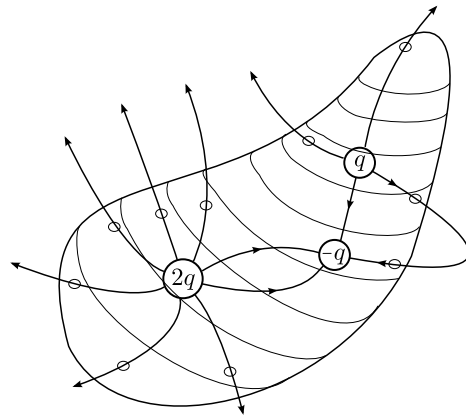
Aus dieser Regel kann man die korrekte Abstandsabhängigkeit des Feldes wieder gewinnen.



Dabei muss man aber aufpassen: Diese Skizze in zwei Dimensionen beschreibt ein Feld in zwei Dimensionen. Die Dichte der Feldlinien fällt mit $1/r$ ab, da ihre Anzahl konstant ist und der Umfang der Kreise proportional zu r anwächst. Dies legt nahe, dass $E(\vec{r}) \sim 1/r$, was in einem zweidimensionalen Universum tatsächlich stimmt, aber nicht in 3D. Es ist nützlich, sich die Feldlinien als in alle Raumrichtungen zeigend vorzustellen (Nadelkissen oder Seeigel). Dann ist die Oberfläche von Kugeln proportional zu r^2 und damit die Dichte der Feldlinien proportional zu $1/r^2 \sim E(\vec{r})$.

3.3 Das Gaußsche Gesetz

Wir betrachten nun eine geschlossene Fläche. Der Fluss Φ_E durch diese Fläche ist proportional zur Zahl der Feldlinien durch die Fläche. Andererseits ist jede Ladung q innerhalb der Fläche Ursprung einer Anzahl von Feldlinien, die proportional zu q ist. Wir folgern, dass der Fluss durch die Fläche proportional zur eingeschlossenen Gesamtladung ist. Das ist der wesentliche Inhalt des *Gaußschen Gesetzes*.



Wir überprüfen die Vermutung für eine Punktladung q . Der Fluss durch eine Kugel mit der Ladung im Mittelpunkt ist

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \oiint d\vec{s} \cdot \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oiint \hat{r} \frac{1}{r^2} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \cdot \frac{1}{r^2} \hat{r} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\oiint \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}_{\text{voller Raumwinkel}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}.\end{aligned}\quad (3.24)$$

Für dieses Beispiel ist der Fluss also tatsächlich proportional zur Ladung. Da Feldlinien nur an den Orten von Ladungen beginnen oder enden, finden wir denselben Fluss für jede noch so komplizierte Fläche, die q einschließt.

Wir können uns aber jede Ladungsverteilung als aus (evtl. unendlich vielen) Punktladungen q_1, q_2, \dots aufgebaut denken. Dafür gilt gemäß Superpositionsprinzip

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots \quad (3.25)$$

und wir folgern

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \oiint d\vec{s} \cdot \vec{E} = \oiint d\vec{s} \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots) \\ &= \oiint d\vec{s} \cdot \vec{E}_1 + \oiint d\vec{s} \cdot \vec{E}_2 + \dots = \frac{q_1}{\epsilon_0} + \frac{q_2}{\epsilon_0} + \dots = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0},\end{aligned}\quad (3.26)$$

wobei $Q_{\text{in}} = q_1 + q_2 + \dots$ die eingeschlossene Gesamtladung ist. Damit erhalten wir das *Gaußsche Gesetz* in Integralform:

$$\oiint d\vec{s} \cdot \vec{E} = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0}.\quad (3.27)$$

Beachte: Das Gaußsche *Gesetz* beschreibt eine Eigenschaft des elektromagnetischen Feldes. Der Gaußsche *Satz* ist eine exakte mathematische Aussage über Vektorfelder.

Wir können das Gaußsche Gesetz mit Hilfe des Gaußschen Satzes auch in *differentieller (lokaler) Form* schreiben: Wir betrachten ein Volumen \mathcal{V} mit der Oberfläche $\partial\mathcal{V}$. Der Gaußsche Satz zeigt, dass gilt

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \vec{E} = \iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{\nabla} \cdot \vec{E}. \quad (3.28)$$

Außerdem ist die Gesamtladung in \mathcal{V} , unter Ausnutzung des Gaußschen Gesetzes,

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV \rho(\vec{r}) = Q_{\text{in}} = \epsilon_0 \oiint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \vec{E}, \quad (3.29)$$

also folgt

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \iiint_{\mathcal{V}} dV \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (3.30)$$

Das gilt aber für *jedes* Volumen \mathcal{V} . Daher müssen die Integranden gleich sein:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (3.31)$$

Das ist das Gaußsche Gesetz in differentieller Form.

Wir überprüfen seine Konsistenz mit dem allgemeinen Coulomb-Gesetz:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{\Delta r}}{(\Delta r)^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (3.32)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \rho(\vec{r}') \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}_{4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}, \quad (3.33)$$

siehe Gl. (2.218). Also folgt das Gaußsche Gesetz aus dem Coulombschen. Gilt auch die Umkehrung? Können wir das Coulomb-Gesetz aus dem Gaußschen herleiten? Die Antwort ist *ja*. Die Herleitung illustriert zugleich eine wichtige Lösungsmethode. Wir betrachten nur eine Punktladung q am Ursprung, da wir schon wissen, dass das \vec{E} -Feld für beliebige Ladungsverteilungen mittels des Superpositionsprinzips bestimmt werden kann.

Ein System mit einer einzigen Punktladung am Ursprung hat die volle *Rotationssymmetrie* einer Kugel. Daher muss das \vec{E} -Feld unter *beliebigen* Drehungen um den Ursprung invariant sein. Daraus folgt (für einen Raum mit mindestens drei Dimensionen), dass das Vektorfeld $\vec{E}(\vec{r})$ überall radial sein muss und im Betrag E nur vom Abstand abhängen kann:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r) \hat{r}. \quad (3.34)$$

Sei \mathcal{V} ein zunächst beliebiges Volumen, das den Ursprung (nicht am Rand) einschließt. Dann gilt

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (3.35)$$

Die *zentrale Lösungsidee* ist nun, die Symmetrie des Systems durch Wahl eines geeigneten Volumens \mathcal{V} auszunutzen. Wir wählen \mathcal{V} so, dass es die volle (Kugel-) Symmetrie des Systems hat, d. h. \mathcal{V} soll eine Kugel des Radius r um den Ursprung sein. Dann ist

$$d\vec{s} = \hat{r} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (3.36)$$

und, wie gesehen,

$$\vec{E} = E_r(r) \hat{r}, \quad (3.37)$$

also

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \vec{E} = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \sin \theta E_r(r) \underbrace{\hat{r} \cdot \hat{r}}_1 = r^2 E_r(r) \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi. \quad (3.38)$$

Das Integral ist einfach der volle Raumwinkel 4π bzw. mit dem Faktor r^2 die Oberfläche der Kugel:

$$\dots = r^2 E_r(r) 4\pi \quad (3.39)$$

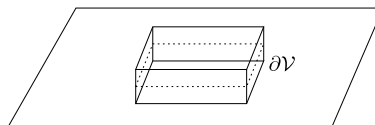
$$\Rightarrow E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (3.40)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}. \quad (3.41)$$

Also folgt das Coulombsche Gesetz tatsächlich aus dem Gaußschen.

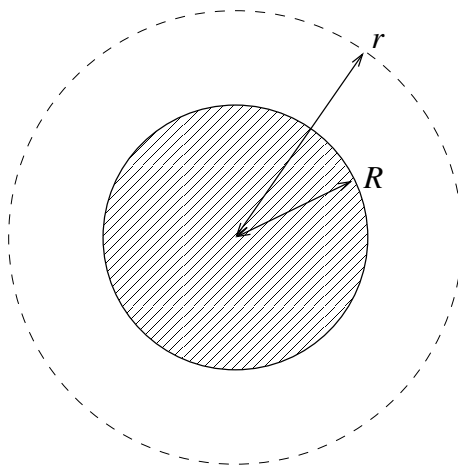
Wir haben ein Volumen \mathcal{V} bzw. eine „Gaußsche Fläche“ $\partial\mathcal{V}$ gewählt, die die Symmetrie so ausnutzen, dass das Flächenintegral trivial wird. Allgemein ist, wenn das elektrische Feld berechnet werden soll, das folgende Rezept nützlich:

1. Wenn möglich, zerlege eine komplizierte Anordnung von Ladungen in Beiträge höherer Symmetrie. In diesem Fall kann das Feld mittels des Superpositionsprinzips aus einfacheren Beiträgen zusammengesetzt werden.
2. Prüfe, ob die Symmetrie des Systems so hoch ist, dass ein Satz von Volumina \mathcal{V} existiert, so dass der Integrand $d\vec{s} \cdot \vec{E}$ im Gaußschen Gesetz auf deren Oberfläche (der Gaußschen Fläche) $\partial\mathcal{V}$ einfach ist, am besten konstant. Insbesondere für
 - (a) Kugelsymmetrie wähle Kugeln und Kugelkoordinaten,
 - (b) Zylindersymmetrie wähle Zylinder und Zylinderkoordinaten,
 - (c) zweidimensionale Translationssymmetrie wähle Prismen und kartesische Koordinaten.



3. Nur wenn dies nicht möglich ist, verwende das Coulomb-Gesetz.

■ Beispiel: Berechne das Feld innerhalb und außerhalb einer homogen geladenen Kugel mit dem Radius R und der Ladung Q . Wir wählen die Gaußsche Fläche $\partial\mathcal{V}$ als Kugel (konzentrisch mit der geladenen Kugel) mit dem Radius r .



1. Fall: $r > R$. Die gesamte Ladung ist in der Gaußschen Fläche eingeschlossen. Daher ist

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (3.42)$$

und analog zum Fall der Punktladung folgt

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}. \quad (3.43)$$

2. Fall: $r < R$. Die Ladungsdichte innerhalb der Kugel ist

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3}R^3}. \quad (3.44)$$

Innerhalb der Gaußschen Fläche liegt die Ladung

$$Q_{\text{in}} = \iiint_{\mathcal{V}} dV \rho = \rho \iiint_{\mathcal{V}} dV = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3}R^3} \frac{4\pi}{3} r^3 = Q \frac{r^3}{R^3}. \quad (3.45)$$

Damit lautet das Gaußsche Gesetz

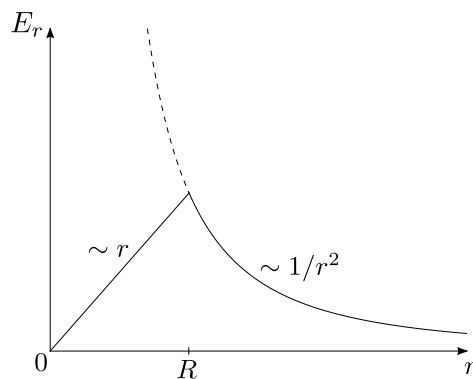
$$\oiint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3} \quad (3.46)$$

$$\Rightarrow 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3} \quad (3.47)$$

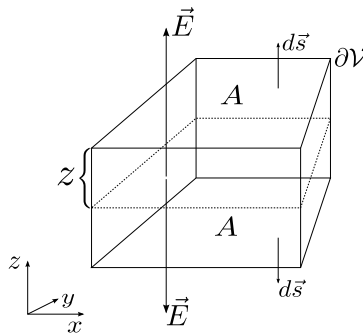
$$\Rightarrow E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{r}{R^3} \quad (3.48)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} \vec{r}. \quad (3.49)$$

Das Feld wächst also innerhalb der Kugel linear an. Eine analoge Rechnung liefert übrigens die Gravitationskraft innerhalb einer Kugel homogener Massendichte.



■ Als zweites Beispiel bestimmen wir das elektrische Feld einer dünnen Schicht mit der Flächenladungsdichte $\sigma = \text{const}$. Dies ist der translationsinvariante Fall (c).



Aus Symmetriegründen ist $\vec{E} \parallel \hat{z}$ und unabhängig von x, y , also gilt

$$\vec{E}(\vec{r}) = \hat{z} E_z(z). \quad (3.50)$$

Das System ist nicht nur translationsinvariant in der xy -Ebene, sondern auch invariant unter Spiegelung an der xy -Ebene. Daher muss gelten

$$E_z(-z) = -E_z(z). \quad (3.51)$$

Wir schreiben das Gaußsche Gesetz für den skizzierten Quader (mit $z > 0$):

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} dV \rho(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} dV \sigma \delta(z) = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad (3.52)$$

mit der Grundfläche A des Quaders. Auf der linken Seite der Gleichung verschwinden die Beiträge der Seitenflächen, da hier $\vec{E} \perp d\vec{s}$ gilt, und wir erhalten

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \vec{E} = \underbrace{\hat{z} A \cdot \hat{z} E_z(z)}_{\text{Deckel}} + \underbrace{(-\hat{z} A) \cdot \hat{z} E_z(-z)}_{\text{Boden}} = \hat{z} A \cdot \hat{z} E_z(z) + (-\hat{z} A) \cdot (-\hat{z} E_z(z)) = 2A E_z(z). \quad (3.53)$$

Es folgt

$$E_z(z) = \frac{\sigma A}{2\epsilon_0 A} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{für } z > 0 \quad (3.54)$$

und damit

$$\vec{E}(\vec{r}) = \text{sgn}(z) \hat{z} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (3.55)$$

Beachte, dass das \vec{E} -Feld *unstetig* ist.

■ Ein letztes Beispiel: Berechne das \vec{E} -Feld innerhalb und außerhalb eines homogen geladenen Würfels mit der Ladung Q und der Kantenlänge a . Was machen wir in diesem Fall? Eine erste Idee wäre, würfelförmige Gaußsche Flächen zu betrachten. Natürlich gilt das Gaußsche Gesetz für diese Flächen. Aber aus der (diskreten Rotations- und Spiegel-) Symmetrie des Systems folgt *nicht*, dass $d\vec{s} \cdot \vec{E}$ auf diesen Flächen einfach oder gar konstant ist! Also können wir $\oiint d\vec{s} \cdot \vec{E}$ nicht ausrechnen. Wir müssen daher auf das Coulomb-Gesetz zurückgreifen: Ist \mathcal{V} der geladene Würfel, so ist

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} dV' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{\Delta r}}{(\Delta r)^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a/2}^{a/2} dx' \int_{-a/2}^{a/2} dy' \int_{-a/2}^{a/2} dz' \frac{Q}{a^3} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^3} \int_{-a/2}^{a/2} dx' \int_{-a/2}^{a/2} dy' \int_{-a/2}^{a/2} dz' \frac{(x - x', y - y', z - z')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Eines der Integrale, z. B. über z' , lässt sich noch elementar auswerten, danach wird es schwierig.

3.4 Rotation von \vec{E} und skalares Potential

Wir kennen nun die Divergenz des elektrischen Feldes, nämlich ρ/ϵ_0 . Wie sieht seine *Rotation* aus? Aus dem Coulomb-Gesetz folgt

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} dV' \rho(\vec{r}') \vec{\nabla} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (3.57)$$

Hierin ist

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|^3 \vec{\nabla} \times (\vec{r} - \vec{r}') + (\vec{r} - \vec{r}') \times \vec{\nabla} |\vec{r} - \vec{r}'|^3}{|\vec{r} - \vec{r}'|^6}. \quad (3.58)$$

Hier wurde ausgenutzt, dass \vec{r}' aus Sicht der Ableitung nach \vec{r} eine Konstante ist. Mit $\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0$ und

$$\vec{\nabla} |\vec{r} - \vec{r}'|^3 \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} 3|\vec{r} - \vec{r}'|^2 \vec{\nabla} |\vec{r} - \vec{r}'| \stackrel{\text{Gl. (2.83)}}{=} 3|\vec{r} - \vec{r}'|^2 \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 3|\vec{r} - \vec{r}'| (\vec{r} - \vec{r}') \quad (3.59)$$

folgt

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times 3|\vec{r} - \vec{r}'| (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^6} = 0. \quad (3.60)$$

Damit wird

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0; \quad (3.61)$$

das elektrische Feld für eine *statische* Ladungsverteilung ist also *wirbelfrei*. Alternativ kann man zeigen, dass das Linienintegral $\oint d\vec{l} \cdot \vec{E}$ für jede geschlossene Kurve verschwindet und dann den Stokesschen Satz verwenden, um $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ nachzuweisen.

3.4.1 Das skalare Potential

Wir hatten in Abschnitt 2.3.2 gesehen, dass

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (3.62)$$

äquivalent zur Existenz eines Potentials V mit $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ ist. Also folgt insbesondere aus $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ in der Elektrostatik, dass ein Potential für das elektrische Feld existiert. Dieses nennen wir *skalares* (oder elektrisches) *Potential* und bezeichnen es mit $\phi(\vec{r})$. Es gilt also

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi. \quad (3.63)$$

Wir können $\phi(\vec{r})$ explizit bestimmen: Da $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, ist das Linienintegral

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{l} \cdot \vec{E} \quad (3.64)$$

wegunabhängig. Wir halten den Anfangspunkt \vec{r}_0 fest und definieren die *Funktion*

$$\phi(\vec{r}) := - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{l} \cdot \vec{E}(\vec{r}'). \quad (3.65)$$

Es folgt

$$-\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \vec{\nabla} \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{l} \cdot \vec{E}(\vec{r}') = \vec{E}(\vec{r}) \quad (3.66)$$

nach dem Fundamentalsatz. Das so konstruierte skalare Feld $\phi(\vec{r})$ ist also tatsächlich das Potential zu $\vec{E}(\vec{r})$. Es ist klar, dass das Potential von der Wahl des Anfangspunktes \vec{r}_0 abhängt, $\phi(\vec{r})$ ist also nur bis auf eine additive Konstante festgelegt. Oft wählen wir entweder $\vec{r}_0 = 0$ oder \vec{r}_0 im Unendlichen. Da das Potential $\phi(\vec{r})$ ein *Integral* über $\vec{E}(\vec{r}')$ ist, ist es *stetig*, solange $\vec{E}(\vec{r}')$ *beschränkt* ist. Ein Sprung in \vec{E} führt bei der Integration nur zu einem Knick in ϕ .

Für eine homogen geladene Kugel hatten wir z. B. gefunden

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{Q}{R^3} \vec{r} & \text{für } r < R, \\ \frac{Q}{r^2} \hat{r} & \text{für } r > R. \end{cases} \quad (3.67)$$

Für die Berechnung von

$$\phi(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{l} \cdot \vec{E}(\vec{r}') \quad (3.68)$$

verwenden wir natürlich Kugelkoordinaten. Konventionell wählt man die Konstante in ϕ so, dass $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(\vec{r}) = 0$ gilt. Dazu muss \vec{r}_0 im Unendlichen liegen. Dann ist

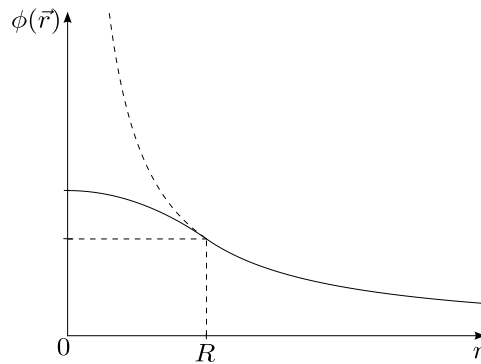
$$\phi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^r dr' \hat{r}' \cdot E_r(r') \hat{r}' = - \int_{\infty}^r dr' E_r(r'). \quad (3.69)$$

1. Fall: $r \geq R$. Wir erhalten

$$\phi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^r dr' \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(r')^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'} \Big|_{\infty}^r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}. \quad (3.70)$$

2. Fall: $r < R$. Hier teilen wir das Integrationsintervall in zwei Teile:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= - \int_{\infty}^R dr' \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(r')^2} - \int_R^r dr' \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{r'}{R^3} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'} \Big|_{\infty}^R - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(r')^2}{2R^3} \Big|_R^r \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{2R^3} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2}{2R^3} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2 - r^2}{2R^3}. \end{aligned} \quad (3.71)$$



Das Potential am Ursprung nimmt den folgenden Wert an:

$$\phi(0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2R} = \frac{3}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}. \quad (3.72)$$

Für eine geladene Ebene hatten wir

$$\vec{E}(\vec{r}) = \text{sgn}(z) \hat{z} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (3.73)$$

Daraus folgt für das Potential (wir wählen als Integrationswege Strecken senkrecht zur Ebene und legen \vec{r}_0 in die Ebene)

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{l}' \cdot \vec{E}(\vec{r}') = - \int_0^z dz' \hat{z} \cdot \text{sgn}(z') \hat{z} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^z dz' \text{sgn}(z') \\ &= - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \begin{cases} z & \text{für } z > 0 \\ -z & \text{für } z < 0 \end{cases} \\ &= - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} |z|. \end{aligned} \quad (3.74)$$

$\phi(\vec{r})$ hat also einen *Knick* auf der Ebene.

Offensichtlich können wir aus einem gegebenen Potential $\phi(\vec{r})$ das elektrostatische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ sofort berechnen. \vec{E} enthält daher nicht mehr Information als ϕ , obwohl es ein dreikomponentiges Vektorfeld ist. Die Komponenten von \vec{E} sind aber nicht unabhängig, sondern durch die Bedingung

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (3.75)$$

verknüpft.

Die Berechnung von $\phi(\vec{r})$ ist oft einfacher als die von $\vec{E}(\vec{r})$, da ϕ ein *skalares* Feld ist. Wir müssen uns daher nicht mit evtl. ortsabhängigen Koordinateneinheitsvektoren herumschlagen. Beachte, dass $\phi(\vec{r})$ dem Superpositionsprinzip gehorcht, da $\phi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{l}' \cdot \vec{E}(\vec{r}')$ gilt und \vec{E} dem Superpositionsprinzip gehorcht. Aber ϕ ist dann eine skalare und keine Vektorsumme.

Das Potential einer Punktladung q am Ursprung ist offenbar

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{l}' \cdot \vec{E}(\vec{r}') = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{l}' \cdot \frac{\hat{r}'}{(r')^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^r dr' \hat{r}' \cdot \frac{\hat{r}'}{(r')^2} \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{(r')^2} = +\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right). \end{aligned} \quad (3.76)$$

Mit der Wahl $r_0 = \infty$ erhalten wir

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (3.77)$$

Für eine beliebige Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ können wir jetzt das Superpositionsprinzip anwenden und sofort schreiben

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{\Delta r} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (3.78)$$

Dieses sogenannte *Poisson-Integral* ist (ein bisschen) einfacher als das allgemeine Coulomb-Gesetz für $\vec{E}(\vec{r})$.

■ Beispiel: Bestimme das skalare Potential und das elektrische Feld innerhalb und außerhalb einer dünnen Kugelschale des Radius R mit der Flächenladungsdichte $\sigma = \text{const.}$ Diese Aufgabe können wir leicht mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes lösen. Wir wählen konzentrische Kugeln als Gaußsche Flächen. Außerhalb der Kugelschale liegt die gesamte Ladung $Q = 4\pi R^2 \sigma$ innerhalb und wir erhalten wie oben

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{\hat{r}}{r^2}. \quad (3.79)$$

Im Inneren der Kugelschale liegt nun aber *gar keine* Ladung innerhalb der Gaußschen Fläche, daher lautet das Gaußsche Gesetz

$$4\pi r^2 E_r(r) = 0 \quad (3.80)$$

$$\Rightarrow E_r(r) = 0, \quad (3.81)$$

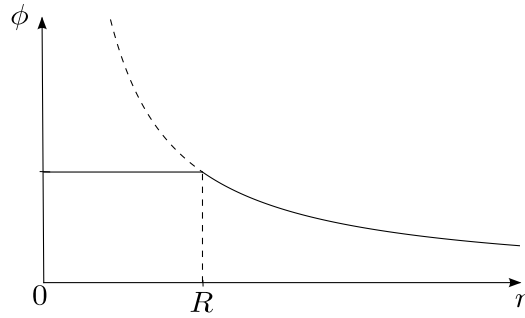
also ist $\vec{E} = 0$ innerhalb der Kugelschale. Für das analoge Problem des Gravitationsfeldes einer schweren Kugelschale bedeutet dies, dass man innerhalb einer solchen Schale schweben würde. Für das Potential erhalten wir außerhalb der Schale ohne neue Rechnung

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}. \quad (3.82)$$

Innerhalb der Schale müssen wir aber aufpassen: Wir haben, in Kugelkoordinaten,

$$\phi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{l}' \cdot \vec{E}(\vec{r}') = -\int_{r_0=\infty}^r dr' E_r(r') \overset{r' \leq R}{=} -\int_{\infty}^R dr' \underbrace{E_r(r')}_{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(r')^2}} - \int_r^R dr' \underbrace{E_r(r')}_0 = \phi(R). \quad (3.83)$$

Das Potential im Inneren ist also, für Anfangspunkt im Unendlichen, *konstant* und gleich dem Potential auf der Kugelschale. Es ist nicht Null, obwohl das \vec{E} -Feld im Inneren verschwindet! Beachte, dass wir $\phi(\vec{r})$ ausgehend vom Anfangspunkt (hier unendlich) bestimmen müssen.



3.4.2 Die Poisson- und die Laplace-Gleichung

Wir drücken nun die Beziehungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (3.84)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (3.85)$$

durch das Potential ϕ aus. Die zweite Gleichung wird zu

$$-\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi = 0. \quad (3.86)$$

Aber das ist nach Abschnitt 2.2.2 automatisch erfüllt: Die Rotation eines Gradientenfeldes verschwindet. Wir haben $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ bereits ausgenutzt, um ϕ zu konstruieren; diese Gleichung ist damit erledigt. Andererseits wird das Gaußsche Gesetz zu

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi \equiv -\nabla^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (3.87)$$

also

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (3.88)$$

Dies ist die *Poisson-Gleichung* für das skalare Potential. Sie folgt also direkt aus dem Gaußschen Gesetz. Für den Spezialfall verschwindender Ladungsdichte erhalten wir die *Laplace-Gleichung*

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (3.89)$$

Sie sieht einfach aus, ihre Lösungen haben aber sehr interessante mathematische Eigenschaften. Funktionen, die $\nabla^2 \phi = 0$ erfüllen, heißen *harmonisch*.

Hat die Laplace-Gleichung eine eindeutige Lösung? Nein, denn

$$\phi(\vec{r}) = 0, \vec{a} \cdot \vec{r}, xy + yz + zx, xyz, x^2 - y^2, \sin kx \sinh ky, \dots \quad (3.90)$$

erfüllen alle die Gleichung. Welche ist also die physikalische Lösung? Das wird durch die *Randbedingungen* bestimmt. Laufen diese $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(\vec{r}) = 0$, so kann man zeigen, dass $\phi \equiv 0$ die *einzige* Lösung ist. Entsprechend kann man zu jeder Lösung der *Poisson-Gleichung* eine beliebige harmonische Funktion addieren. Welche die richtige ist, entscheiden wieder die Randbedingungen.

Als Beispiel bestimmen wir das Potential einer Punktladung durch Lösen der Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(\vec{r}) \quad (3.91)$$

mit der Randbedingung $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(\vec{r}) = 0$. Wir verwenden die nützliche Methode der Fourier-Transformation. Die linke Seite ergibt Fourier-transformiert

$$\begin{aligned} \iiint d^3r e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \nabla^2 \phi(\vec{r}) &\stackrel{\text{partiell}}{=} - \iiint d^3r \left(\vec{\nabla} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right) \cdot \vec{\nabla} \phi(\vec{r}) \\ &\stackrel{\text{partiell}}{=} + \iiint d^3r \left(\nabla^2 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right) \phi(\vec{r}) = \iiint d^3r (-k^2) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \phi(\vec{r}) = -k^2 \phi(\vec{k}). \end{aligned} \quad (3.92)$$

Wir haben hier angenommen, dass $\phi(\vec{r})$ im Unendlichen schnell genug verschwindet (Randbedingung!) und die Oberflächenterme weggelassen. Wir unterscheiden eine Funktion und ihre Fourier-Transformierte hier nur durch ihre Argumente.

Die rechte Seite der Poisson-Gleichung hat die Fourier-Transformierte

$$-\frac{q}{\epsilon_0} \iiint d^3r e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \delta(\vec{r}) = -\frac{q}{\epsilon_0}. \quad (3.93)$$

Damit erhalten wir

$$-k^2 \phi(\vec{k}) = -\frac{q}{\epsilon_0}. \quad (3.94)$$

Dies ist eine *algebraische* Gleichung für $\phi(\vec{k})$, die sich trivial lösen lässt:

$$\phi(\vec{k}) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q}{k^2}. \quad (3.95)$$

Nun müssen wir $\phi(\vec{k})$ noch rücktransformieren, um $\phi(\vec{r})$ zu erhalten. Wir verwenden Kugelkoordinaten k, θ, φ im \vec{k} -Raum und wählen die k_z -Achse parallel zu \vec{r} . Dann ist

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \iiint \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q}{k^2} = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint dk d\theta d\varphi k^2 \sin\theta e^{ikr \cos\theta} \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{q}{\epsilon_0} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{ikr \cos\theta}}_{\frac{2 \sin kr}{kr}} = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{1}{r} \frac{1}{2\pi^2} \underbrace{\int_0^\infty dk \frac{\sin kr}{k}}_{=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Das ist das schon bekannte Ergebnis.

3.4.3 Weitere Eigenschaften der Laplace-Gleichung

Die Laplace-Gleichung

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (3.97)$$

bestimmt das Potential in einem ladungsfreien Volumen \mathcal{V} für gegebene Randbedingungen auf dessen Oberfläche $\partial\mathcal{V}$. Diese beruhen auf Ladungen außerhalb von \mathcal{V} . In diesem Abschnitt diskutieren wir einige wichtige mathematische Eigenschaften der Laplace-Gleichung und ihrer Lösungen. Um ein Gefühl für die Lösungen zu bekommen, betrachten wir die Gleichung in $d = 1, 2, 3$ Dimensionen.

(a) $d = 1$: Die *gewöhnliche* Differentialgleichung

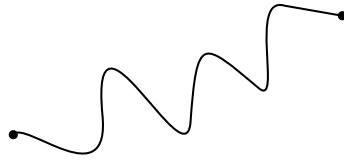
$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = 0 \quad (3.98)$$

hat die allgemeine Lösung $\phi(x) = ax + b$ (eine allgemeine lineare Funktion). Die beiden Parameter a, b müssen aus den Randbedingungen bestimmt werden. Z. B. könnte $\phi(x)$ selbst an den Endpunkten eines Intervalls vorgegeben sein. Es folgt trivial:

- $\phi(x)$ hat die Mittelwerteigenschaft

$$\phi(x) = \frac{\phi(x-c) + \phi(x+c)}{2} \quad \forall x, c, \quad (3.99)$$

der Funktionswert ist an jedem Punkt das arithmetische Mittel der Werte an den (beiden) äquidistanten Punkten $x \pm c$ für alle c . Die Lösungen der Laplace-Gleichung haben die geringst mögliche Struktur, die mit den Randbedingungen vereinbar ist, d. h. sie sehen nicht so aus:

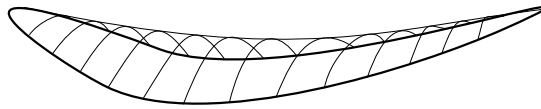


- $\phi(x)$ hat keine Extrema im Inneren eines beliebigen Intervalls, nur am Rand.

(b) $d = 2$: Zur Veranschaulichung der Laplace-Gleichung insbesondere in zwei Dimensionen ist es nützlich, sich einen *Seifenfilm* mit der mathematischen Darstellung $z = z(x, y)$ vorzustellen. Man kann zeigen, dass für kleine Variationen von z , d. h. fast konstantes $z(x, y)$, der Seifenfilm der Laplace-Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) z(x, y) = 0 \quad (3.100)$$

gehört, wobei Randbedingungen für $z(x, y)$ z. B. durch die Form von Drähten gegeben sind, die den Seifenfilm aufspannen.



Die zweidimensionale Laplace-Gleichung lautet

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0. \quad (3.101)$$

Dies ist, anders als für $d = 1$, eine *partielle* Differentialgleichung. Die allgemeine Lösung enthält nun unendlich viele Parameter, die durch die Randbedingungen auf dem Rand einer *Fläche* bestimmt werden. Man kann folgende Eigenschaften beweisen, die direkt die in einer Dimension trivial gültigen Aussagen verallgemeinern:

- $\phi(x, y)$ ist das arithmetische Mittel von ϕ an allen äquidistanten Punkten, das sind hier alle Punkte auf einem Kreis:

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi R} \oint_{\mathcal{C}_R} dl' \phi(x', y'), \quad (3.102)$$

wobei \mathcal{C}_R der Kreis mit dem Radius R und dem Mittelpunkt (x, y) ist (Beweis siehe Fall $d = 3$). Das ist eine starke Aussage: $\phi(\vec{r})$ auf einer Kurve bestimmt $\phi(\vec{r})$ an einem fernen Punkt. Man kann sogar zeigen, dass $\phi(\vec{r})$ auf *jeder* geschlossenen Kurve $\phi(\vec{r})$ an *jedem* Punkt im Inneren eindeutig festlegt.

- $\phi(x, y)$ hat keine Extrema im Inneren einer Fläche, nur am Rand.

(c) $d = 3$: Die Laplace-Gleichung lautet

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.103)$$

Die Eigenschaften sind i. W. dieselben wie für $d = 2$:

- Mittelwerteigenschaft:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R} ds' \phi(\vec{r}'), \quad (3.104)$$

S_R ist die Kugel mit Radius R um den Punkt \vec{r} .

- $\phi(\vec{r})$ hat keine Extrema im Inneren eines Volumens, nur an der Oberfläche.

□ Beweis: Sei

$$\psi_R(\vec{r}) := \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R} ds' \phi(\vec{r}'). \quad (3.105)$$

Verwende Kugelkoordinaten R, θ, φ für $\vec{r}' - \vec{r}$, dann ist

$$\psi_R(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \mathcal{R}^2 \phi(\vec{r}') \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial \psi_R(\vec{r})}{\partial R} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial \phi(\vec{r}')}{\partial R} = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R} ds' \frac{\partial \phi(\vec{r}')}{\partial R} \\ &= \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R} ds' \left(\vec{\nabla}' \phi(\vec{r}') \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}'}{\partial R}. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Da nach Definition gilt

$$\vec{r}' - \vec{r} = R\hat{R}, \quad (3.108)$$

folgt

$$\frac{\partial \vec{r}'}{\partial R} = \hat{R} \quad (3.109)$$

und

$$\frac{\partial \psi_R(\vec{r})}{\partial R} = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R} ds' \left(\vec{\nabla}' \phi(\vec{r}') \right) \cdot \hat{R} = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R} d\vec{s}' \cdot \vec{\nabla}' \phi(\vec{r}') \stackrel{\text{Gauß}}{=} \frac{1}{4\pi R^2} \iiint_{V_R} dV' \underbrace{\vec{\nabla}' \cdot \vec{\nabla}'}_{(\nabla')^2} \phi(\vec{r}'), \quad (3.110)$$

wobei $S_R = \partial V_R$. Da ϕ die Laplace-Gleichung erfüllt, folgt

$$\frac{\partial \psi_R(\vec{r})}{\partial R} = 0 \quad (3.111)$$

und damit, dass $\psi_R(\vec{r})$ unabhängig vom Radius R ist. Da die Funktion $\phi(\vec{r})$ stetig ist, sie ist ja sogar zweimal stetig differenzierbar, ist auch $\psi_R(\vec{r})$ stetig in R und

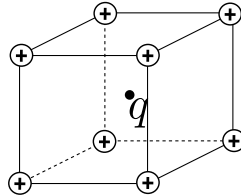
$$\lim_{R \rightarrow 0^+} \psi_R(\vec{r}) = \phi(\vec{r}). \quad (3.112)$$

Da $\psi_R(\vec{r})$ unabhängig von R ist, folgt

$$\psi_R(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) \quad \forall R \geq 0. \quad (3.113)$$

Die zweite Aussage (kein Extremum) folgt dann einfach per *reductio ad absurdum*: Angenommen, $\phi(\vec{r})$ habe ein lokales Maximum (Minimum) bei \vec{r}_0 . Dann existierte eine Kugel S_R mit dem Mittelpunkt \vec{r}_0 , so dass $\phi(\vec{r})$ überall auf S_R kleiner (größer) als $\phi(\vec{r}_0)$ wäre. Dann wäre der Mittelwert von $\phi(\vec{r})$ über S_R aber auch kleiner (größer) als $\phi(\vec{r}_0)$, im Widerspruch zum ersten Teil.

Ein wichtiges Korollar ist *Earnshaws Theorem*: Eine Probeladung hat im elektrostatischen Feld einer beliebigen Ladungsanordnung keine *stabilen* Gleichgewichtspositionen. Denn dazu müsste die potentielle Energie $V(\vec{r}) = q\phi(\vec{r})$ ein lokales Minimum besitzen, was sie nicht tut, da sie die Laplace-Gleichung erfüllt.



Die Probeladung hat i. A. *labile* Gleichgewichtspositionen, im Beispiel den Mittelpunkt des Würfels. Dort verschwindet die Kraft, aber für infinitesimale Auslenkungen in gewissen Richtungen tritt sofort eine *wegtreibende* Kraft auf. Aus Earnshaws Theorem folgt, dass man Ionen nicht elektrostatisch einfangen kann – Ionenfallen erfordern zeitabhängige Felder.

3.5 Arbeit und Energie in der Elektrostatik

Wieviel Energie kostet es, eine Probeladung q vom Ort \vec{a} (in Ruhe) zum Ort \vec{b} (in Ruhe) zu bewegen? Aus der Mechanik wissen wir, dass die Probeladung im Kraftfeld \vec{F}_{el} die Arbeit

$$W_{\text{el}} = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} d\vec{l} \cdot \vec{F}_{\text{el}}(\vec{r}) \quad (3.114)$$

leistet. Die elektrische Kraft ist, wie oben besprochen, $\vec{F}_{\text{el}} = q\vec{E}$. Aus $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ folgt $\vec{\nabla} \times \vec{F}_{\text{el}} = 0$, also ist das Kraftfeld konservativ und das Linienintegral ist unabhängig vom Weg.

Üblicherweise fragen wir nach der Arbeit W , die *wir* an der Ladung verrichten müssen, um sie von \vec{a} nach \vec{b} zu bringen. Diese ist

$$W = -W_{\text{el}} = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} d\vec{l} \cdot \vec{F}_{\text{el}}. \quad (3.115)$$

(Überprüfen Sie bei Rechnungen die Plausibilität des Vorzeichens!) Damit ist

$$W = -q \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} d\vec{l} \cdot \vec{E} = q[\phi(\vec{b}) - \phi(\vec{a})]. \quad (3.116)$$

Bis auf den Faktor q ist die Differenz der skalaren Potentiale also die benötigte Arbeit. Liegt der Anfangspunkt \vec{a} im Unendlichen und vereinbaren wir die Randbedingung $\phi(\infty) = 0$, so folgt (mit $\vec{r} = \vec{b}$)

$$W = q \phi(\vec{r}). \quad (3.117)$$

Dieser Zusammenhang ist gewissermaßen das Integral von

$$\vec{F}_{\text{el}} = q \vec{E}. \quad (3.118)$$

Die Arbeit W , die erforderlich ist, um die Probeladung aus dem Unendlichen zum Ort \vec{r} (in Ruhe) zu bringen, ist die *potentielle Energie* im elektrischen Feld.

Wir bestimmen nun die potentielle Energie eines Systems von N Punktladungen q_1, q_2, \dots . Wir stellen uns vor, die Ladungen alle eine nach der anderen aus dem Unendlichen heranzubringen. Die *erste* Ladung kostet keine Energie, da noch kein \vec{E} -Feld aufgrund anderer Ladungen vorhanden ist ($W_1 = 0$). Die *zweite* kostet die Energie

$$W_2 = q_2 \phi_1(\vec{r}_2) = q_2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}. \quad (3.119)$$

Die *dritte* kostet

$$W_3 = q_3 \phi_{1 \text{ und } 2}(\vec{r}_3) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}, \quad (3.120)$$

die *vierte*

$$W_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_4}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_4}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_2|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3 q_4}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_3|} \quad (3.121)$$

usw. Insgesamt erhalten wir

$$W = \underbrace{W_1}_0 + W_2 + W_3 + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}. \quad (3.122)$$

Der Faktor $1/2$ korrigiert die Doppelzählung der Paare von Ladungen in der Summe. Dieser Ausdruck ist offensichtlich unabhängig davon, in welcher Reihenfolge wir die Ladungen heranzuführen.

Wir wollen die Energie durch das *Feld* ausdrücken. Als ersten Schritt schreiben wir die Energie um als

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j, j \neq i} \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}. \quad (3.123)$$

Der unterklammerte Term ist das *skalare Potential* am Ort \vec{r}_i der Ladung q_i aufgrund aller anderen Ladungen. Wir können daher schreiben

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \phi_{\text{ohne } q_i}(\vec{r}_i). \quad (3.124)$$

Nun gehen wir zum Kontinuumslimit über. Dazu teilen wir den Raum in Zellen am Ort \vec{r} mit der Ladung $\rho(\vec{r}) \Delta V$ ein und bilden am Ende den Grenzwert für $\Delta V \rightarrow 0$. Die Energie lautet

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\vec{r}} \rho(\vec{r}) \Delta V \phi_{\text{ohne } \vec{r}}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \sum_{\vec{r}} \rho(\vec{r}) \Delta V [\phi(\vec{r}) - \phi_{\vec{r}}(\vec{r})]. \quad (3.125)$$

Hier ist $\phi(\vec{r})$ das gesamte Potential und $\phi_{\vec{r}}(\vec{r})$ das Potential der am Ort \vec{r} zentrierten Zelle. Da die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ *beschränkt* ist, ist $\phi_{\vec{r}}(\vec{r})$ endlich. Im Limes $\Delta V \rightarrow 0$ geht die Ladung $\rho \Delta V$ der Zelle gegen Null und damit auch $\phi_{\vec{r}}(\vec{r})$. Daher können wir den Korrekturterm („Selbstwechselwirkung“) für $\Delta V \rightarrow 0$ vernachlässigen. Wir erhalten

$$W = \frac{1}{2} \iiint dV \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}). \quad (3.126)$$

Dies ist plausibel, da $\rho dV \phi$ die Energie der Ladung ρdV im Potential ϕ ist. Die Energie einer Ladungsverteilung in einem *externen* Feld wäre also

$$W_{\text{ext}} = \iiint dV \rho(\vec{r}) \phi_{\text{ext}}(\vec{r}). \quad (3.127)$$

Das ist die Arbeit, die erforderlich ist, um eine schon im Unendlichen zusammengesetzte Ladungsverteilung in ein schon vorhandenes Potential zu holen. Der Faktor 1/2 in Gl. (3.126) kommt daher, dass ϕ nicht extern vorgegeben ist, sondern von denselben Ladungen ρ erzeugt wird. Das Integral enthält daher die Coulomb-Wechselwirkung zwischen zwei Orten \vec{r} und \vec{r}' zweimal und der Faktor 1/2 korrigiert diese Doppelzählung.

Nun drücken wir ρ und ϕ durch das elektrische Feld \vec{E} aus:

$$\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \quad (3.128)$$

$$\Rightarrow W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\mathcal{V}} dV (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \phi$$

$$\stackrel{\text{partiell}}{=} \frac{\epsilon_0}{2} \oint_{\partial \mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \vec{E} \phi - \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \phi. \quad (3.129)$$

Wir nehmen nun an, dass die Ladungen auf einen endlichen Bereich beschränkt sind. Dann fällt \vec{E} weit weg von allen Ladungen wie $1/r^2$ ab, sowie ϕ wie $1/r$. Die Oberfläche $\partial \mathcal{V}$ wächst dagegen nur wie r^2 an und der Oberflächenterm verschwindet daher für $\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Dann folgt

$$W = -\frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{E} \cdot (-\vec{E}) = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\mathcal{V}} dV E^2(\vec{r}). \quad (3.130)$$

Die Energiedichte ist also

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} E^2(\vec{r}). \quad (3.131)$$

Es ist bemerkenswert, dass sich die Energie *allein* durch das Feld ausdrücken lässt. Dies legt erneut nahe, dass das \vec{E} -Feld ein eigenständiges physikalisches Objekt, und nicht nur eine Hilfsgröße für die Berechnung von Kräften, ist. Insbesondere kann das \vec{E} -Feld Energie speichern.

Die Energiedichte $w(\vec{r})$ ist offensichtlich ein skalares Feld – das Quadrat eines Vektors ist ein Skalar. Da aber w quadratisch vom Feld \vec{E} abhängt, gilt das Superpositionsprinzip für w *nicht*.

■ **Beispiel:** Wir berechnen die Energie einer Kugelschale mit dem Radius R und der gleichförmigen Flächenladungsdichte σ auf zwei Wegen:

(a) Es ist

$$W = \frac{1}{2} \iiint dV \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}). \quad (3.132)$$

Mit $\rho(\vec{r}) = \sigma\delta(r - R)$ und

$$\phi(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \quad (3.133)$$

mit der Gesamtladung $Q = 4\pi R^2\sigma$ (s. o.) erhalten wir

$$W = \frac{\sigma}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \underbrace{\iiint dV \delta(r - R)}_{= \iint ds = 4\pi R^2} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}. \quad (3.134)$$

(b) Andererseits gilt

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint dV E^2(\vec{r}). \quad (3.135)$$

Mit (s. o.)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{für } r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} & \text{für } r > R \end{cases} \quad (3.136)$$

erhalten wir in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} W &= \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{r>R} dV \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{Q^2}{r^4} = \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0} Q^2 \int_R^\infty dr r^2 \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi}_{4\pi} \frac{1}{r^4} \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} Q^2 \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_R^\infty = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}. \end{aligned} \quad (3.137)$$

Die beiden Wege führen zu demselben Ergebnis, wie erwartet.

Wenn wir auf demselben Weg die Feldenergie einer Punktladung q berechnen, stoßen wir auf ein Paradoxon: Die Energie ist

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint dV \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{q^2}{r^4} = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0} \iiint dr d\theta d\varphi r^2 \sin\theta \frac{1}{r^4} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{dr}{r^2} = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_0^\infty = \infty. \quad (3.138)$$

Sie divergiert, während der ursprüngliche Ausdruck

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \phi_{\text{ohne } i}(\vec{r}_i) \quad (3.139)$$

endlich ist, nämlich Null, da $\phi_{\text{ohne } i}$ das elektrostatische Potential ohne Ladungen ist. Das Problem beruht darauf, dass die Verallgemeinerung auf

$$W = \frac{1}{2} \iiint dV \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) \quad (3.140)$$

das *volle* Potential aufgrund *aller* Ladungen enthält. Für kontinuierliche und beschränkte Ladungsverteilungen macht das keinen Unterschied, wie wir gesehen haben. Bei einer Punktladung enthält aber ein infinitesimales Volumen eine endliche Ladung. Die beiden Ausdrücke für die Energie W unterscheiden sich durch die *Selbstwechselwirkung* der Punktladung, das ist die Energie, die erforderlich ist, um die Punktladung aus infinitesimalen Ladungen zusammenzusetzen. Diese Energie ist tatsächlich divergent. Die im \vec{E} -Feld gespeicherte Energie ist demnach ebenfalls divergent – wenn wir die Punktladung zerlegen würden, könnten wir diese Energie extrahieren. Eine mögliche Deutung ist folgende: Die divergente Selbstwechselwirkung der Elementarteilchen interessiert uns nicht, da wir diese *aus Prinzip* nicht zerlegen und daher diese Energie nie extrahieren können.

3.6 Leiter

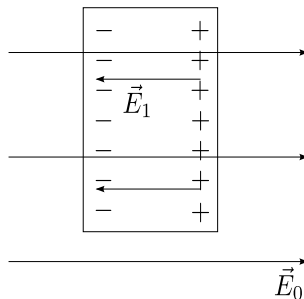
Ein Leiter ist ein Material mit beweglichen Ladungsträgern. Beispiele sind

- Metalle,
- Halbleiter, insbesondere dotierte,
- Elektrolyte (Lösungen von Ionen),
- Plasmen (ionisierte Gase).

Wir beschäftigen uns noch immer mit der *Elektrostatik*, d.h. wir betrachten den *stationären* Zustand der Ladungsträger. Wir stellen uns vor, dass wir lange genug warten, damit sich die Ladungsträger als Antwort auf ein angelegtes Feld reorganisieren können. Daher ist es für den stationären Zustand gleichgültig, ob das Material gut oder schlecht leitet (s. u.) – es dauert nur kürzer oder länger, bis der stationäre Zustand erreicht ist. Insbesondere müssen wir keinen *idealen* Leiter annehmen, also ein Material, das der Bewegung der Ladungsträger keinen Widerstand entgegensetzt.

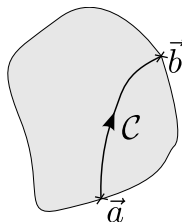
Eigenschaften von Leitern:

1. $\vec{E} = 0$ im Inneren eines Leiters:



Wir legen ein elektrisches Feld \vec{E}_0 , gemessen weit entfernt von einem leitenden Körper, an, z. B. durch einen großen Plattenkondensator. Auf die Ladungsträger im Leiter wirkt dann eine Kraft und sie bewegen sich in Richtung dieser Kraft. Sie sammeln sich an der *Oberfläche* des Leiters an, da sie ihn nicht verlassen können (Vakuum oder Luft ist ein Isolator). Die angesammelten Ladungen erzeugen ein zusätzliches Feld \vec{E}_1 , das \vec{E}_0 entgegengerichtet ist. Die weitere Verschiebung von Ladungen hört erst auf, wenn das Gesamtfeld $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1$ und damit die Gesamtkraft im Inneren verschwindet. Dann hat der Leiter einen stationären Zustand erreicht. Also findet man im stationären Zustand $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 = 0$.

2. $\rho = 0$ im Inneren eines Leiters: Dies folgt sofort aus dem Gaußschen Gesetz $\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$.
3. Daraus folgt, dass die eventuell vorhandene *Überschussladung* des Körpers an seiner Oberfläche sitzt. Dasselbe Ergebnis erhält man, indem man die Feldenergie minimiert.
4. Jeder Punkt im Inneren oder an der Oberfläche eines zusammenhängenden Leiters liegt auf demselben Potential ϕ . Also ist insbesondere die Oberfläche eines Leiters eine Äquipotentialfläche.



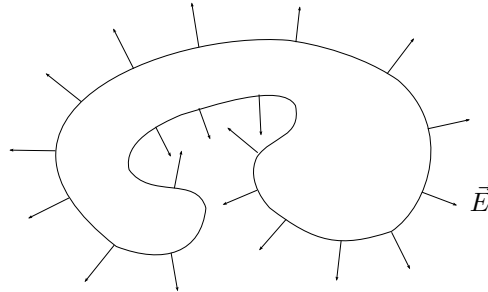
Die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten im Leiter ist nämlich

$$\phi(\vec{b}) - \phi(\vec{a}) = - \int_{\vec{a}, \mathcal{C}}^{\vec{b}} d\vec{l} \cdot \vec{E} = 0 \quad (3.141)$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{b}) = \phi(\vec{a}). \quad (3.142)$$

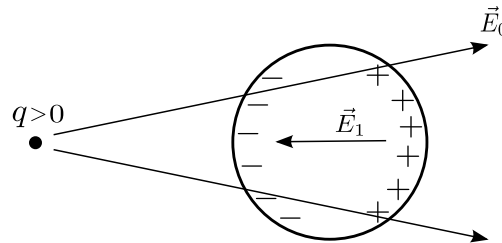
Der Integrationsweg \mathcal{C} kann *vollständig innerhalb* des Leiters gewählt werden. Offensichtlich können wir nicht folgern, dass zwei *nicht zusammenhängende* Leiter auf demselben Potential liegen müssen.

5. Das \vec{E} -Feld steht überall senkrecht auf der Oberfläche eines Leiters: Die physikalische Begründung ist, dass eine Feldkomponente parallel zur Oberfläche einen Strom parallel zur Oberfläche hervorrufen würde. Dieser würde fließen, bis sich die Ladungen so umverteilt haben, dass \vec{E} senkrecht steht. Mathematisch folgt die Aussage sofort aus den Eigenschaften des Gradienten: Die Oberfläche ist nach Punkt 4. eine Äquipotentialfläche. Daher steht dessen Gradient $\vec{\nabla}\phi = -\vec{E}$ überall senkrecht auf dieser Fläche. Beachte, dass die Aussage für beliebig geformte Körper gilt.



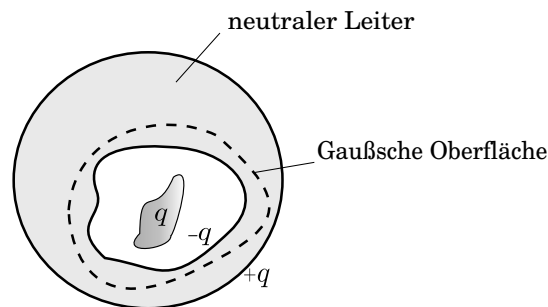
Folgerungen:

- (a) Eine Punktladung q und ein *ungeladener* Leiter ziehen einander an.



Das Coulombfeld \vec{E}_0 aufgrund von q (o. B. d. A. sei $q > 0$) *polarisiert* den Leiter; es *influenziert* Oberflächenladungen. Die negativen Oberflächenladungen befinden sich näher an q als die positiven. Da die Coulomb-Kraft mit dem Abstand abfällt, ist die Gesamtkraft attraktiv.

- (b) Betrachte einen ungeladenen *kugelförmigen* Leiter mit einem unregelmäßigen Hohlraum im Inneren. Dieser soll eine unregelmäßig verteilte Ladung q enthalten. Was ist das elektrische Feld außerhalb der Kugel?



Für eine Gaußsche Oberfläche $\partial\mathcal{V}$, die ganz im Inneren des Leiters liegt, gilt

$$\frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0} = \oiint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \underbrace{\vec{E}}_0 = 0. \quad (3.143)$$

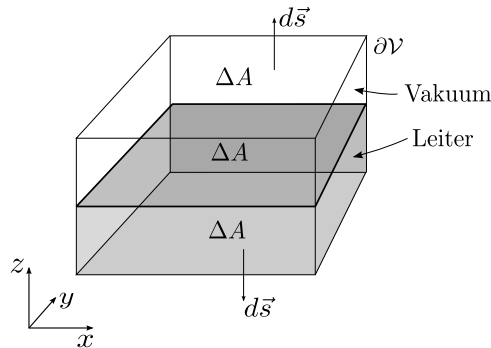
Daher muss die auf der *inneren* Oberfläche des Leiters influenzierte Ladung $-q$ betragen. (Die räumliche Verteilung dieser Oberflächenladung zu finden, kann schwierig sein!) Da der Leiter insgesamt neutral ist, muss auf der *äußeren* Oberfläche die Ladung $+q$ influenziert werden. *Diese* Ladung muss gleichmäßig verteilt sein, denn sonst würde ein Strom entlang der Oberfläche fließen, um sie auszugleichen. (Beachte, dass diese Oberflächenladung von der Ladungsverteilung im Inneren nicht beeinflusst wird, da deren elektrisches Feld im Leiter und damit an der äußeren Oberfläche verschwindet.) Damit ist das Feld im Außenraum das einer homogen geladenen Kugelschale, also

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}. \quad (3.144)$$

Nur die Gesamtladung q ist von außen sichtbar, die Information über ihre Verteilung ist nicht zugänglich. Elektrostatische Felder können daher nicht verwendet werden, um das Innere von Leitern zu untersuchen (elektrodynamische Felder hingegen schon, z. B. Röntgenstrahlen).

3.6.1 Oberflächenladung und elektrisches Feld

Wir betrachten ein kleines Flächenelement ΔA auf der Oberfläche eines Leiters. Da das Flächenelement klein ist, können wir die Oberfläche als eben ansehen. Wir wählen die z -Achse senkrecht zur Oberfläche und betrachten die folgende Gaußsche Oberfläche $\partial\mathcal{V}$, vgl. Abschnitt 3.3:



Das Gaußsche Gesetz lautet

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \vec{E} = \frac{\sigma \Delta A}{\epsilon_0}. \quad (3.145)$$

Für ein kleines Volumen \mathcal{V} ist \vec{E} parallel zu den Seitenflächen des Quaders und wir erhalten

$$\Delta A E_z^{\text{außen}} - \Delta A E_z^{\text{innen}} = \frac{\sigma \Delta A}{\epsilon_0}. \quad (3.146)$$

Oder allgemeiner, mit dem Einheitsvektor \hat{n} senkrecht zur Oberfläche und nach außen gerichtet:

$$\hat{n} \cdot \vec{E}^{\text{außen}} - \hat{n} \cdot \vec{E}^{\text{innen}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (3.147)$$

Innerhalb eines Leiters gilt jedoch $\vec{E} = 0$ und es folgt

$$\hat{n} \cdot \vec{E}^{\text{außen}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (3.148)$$

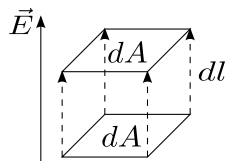
Da das \vec{E} -Feld wie besprochen senkrecht auf der Oberfläche steht (Äquipotentialfläche!), gilt im Außenraum, nahe der Oberfläche, $\vec{E}^{\text{außen}} \equiv \vec{E} = E \hat{n}$, also

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (3.149)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}. \quad (3.150)$$

Das ist ein sehr einfacher Zusammenhang zwischen dem elektrischen Feld an der Oberfläche eines *beliebigen* Leiters und der lokalen Oberflächenladungsdichte. Beachte, dass σ für einen nicht sphärischen Leiter nicht homogen ist. Die Beziehung (3.150) gilt dennoch an jedem Punkt der Oberfläche.

Wir berechnen noch die *Kraft*, die das Feld \vec{E} auf die Oberflächenladungen ausübt. Die Kraft wirkt senkrecht zur Oberfläche, da $\vec{E} \parallel \hat{n}$ ist. Wir bestimmen zunächst die bei einer Verschiebung der infinitesimalen Oberflächenladung σdA um eine Strecke dl senkrecht zur Oberfläche geleistete Arbeit dW .



Diese Arbeit ist die Änderung der Feldenergie. Im Außenraum ist die Energiedichte $\epsilon_0 E^2/2$, im Innenraum ist sie Null. Die Energieänderung ist also

$$dW = -\frac{\epsilon_0}{2} dA dl E^2. \quad (3.151)$$

Die Kraft erhalten wir einfach aus $dW = -dF dl$ zu

$$dF = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 dA = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma^2 dA. \quad (3.152)$$

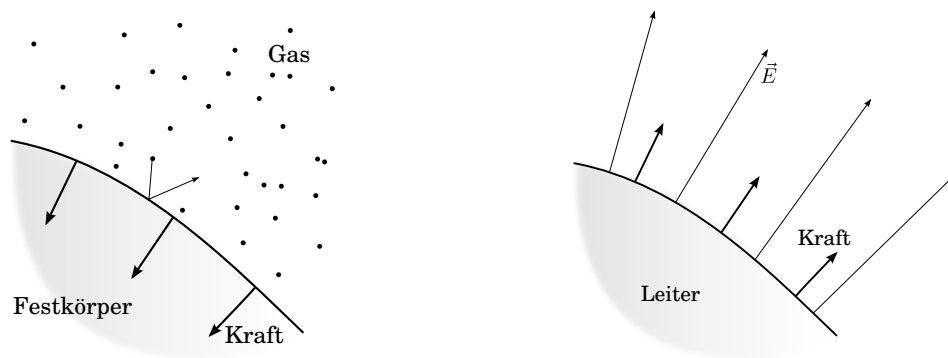
Die Kraft pro Fläche ist also

$$\vec{f} := \frac{d\vec{F}}{dA} = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma^2 \hat{n}. \quad (3.153)$$

Eine Normalkraft pro Fläche ist ein *Druck*

$$p = |\vec{f}| = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2. \quad (3.154)$$

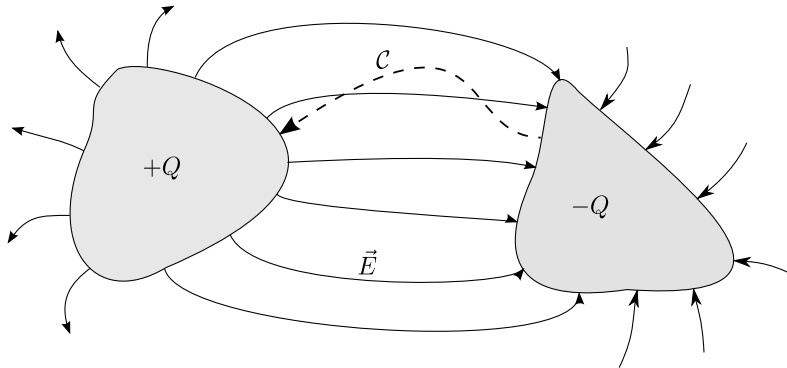
Man kann sagen, dass ein elektrisches Feld einen Druck auf einen Leiter ausübt. Zwar gibt man diesen Druck mit einer positiven Maßzahl an, er ist aber tatsächlich *negativ*, nämlich entgegengesetzt zum Druck aufgrund eines Gases.



Die Kraft bzw. der Druck *zieht* den Leiter *in das elektrische Feld hinein*. Dies vermindert die Feldenergie, da Vakuum (mit Energiedichte $\epsilon_0 E^2/2 > 0$) durch Leiter (mit Energiedichte Null) verdrängt wird.

3.7 Kondensatoren

Zwei leitende Körper beliebiger Form mögen die Gesamtladungen $Q > 0$ und $-Q < 0$ tragen. Sie bilden einen *Kondensator*.



Ein zusammenhängender Leiter hat ein gleichförmiges Potential ϕ im Inneren und an der Oberfläche. Daher ist die *Potentialdifferenz (Spannung)* zwischen den beiden Leitern eindeutig definiert:

$$U = \phi_+ - \phi_- = - \int_C d\vec{l} \cdot \vec{E} \quad (3.155)$$

mit einem *beliebigen* Integrationsweg C , der die beiden Leiter verbindet. $\vec{E}(\vec{r})$ ist i. A. kompliziert, jedoch *proportional zur Ladung* Q . Dies folgt aus der *Linearität* der Gleichungen der Elektrostatik (tatsächlich auch der gesamten Elektrodynamik): Wenn

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad Q = \iiint_{V_1} dV \rho(\vec{r}), \quad -Q = \iiint_{V_2} dV \rho(\vec{r}), \quad (3.156)$$

dann gilt mit einer beliebigen Konstanten α auch

$$\vec{\nabla} \cdot \alpha \vec{E} = \frac{\alpha \rho}{\epsilon_0}, \quad \alpha Q = \iiint_{V_1} dV \alpha \rho(\vec{r}), \quad -\alpha Q = \iiint_{V_2} dV \alpha \rho(\vec{r}). \quad (3.157)$$

Unter der Voraussetzung, dass die Lösung eindeutig ist, folgt aus einer Änderung der Ladung Q um den Faktor α also nur eine Änderung von $\rho(\vec{r})$ und $\vec{E}(\vec{r})$ um denselben Faktor α . Dann ändert sich auch die Spannung U nur um den Faktor α . Damit folgt, dass U proportional zu Q ist, wobei die Proportionalitätskonstante

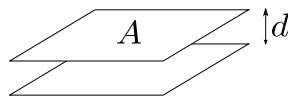
$$C := \frac{Q}{U} \quad (3.158)$$

Kapazität genannt wird. Sie ist eine *geometrische* Eigenschaft der leitenden Körper und für komplizierte Formen nicht leicht zu berechnen. Beachte, dass Q die (konventionell positive) Ladung auf *einem* der beiden Leiter ist. Die Gesamtladung der Anordnung ist Null. Liegt nur *ein* leitender Körper auf dem Potential ϕ vor und verschwindet das Potential im Unendlichen, so ist die Ladung Q des Körpers proportional zu ϕ . Wir definieren die *Selbstkapazität*

$$C := \frac{Q}{\phi}. \quad (3.159)$$

Sie stimmt mit der zuvor definierten Kapazität überein, wenn eine der Kondensatorplatten eine Hohlkugel mit dem Radius $R \rightarrow \infty$ ist.

■ Beispiel: Plattenkondensator.

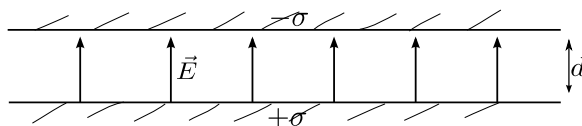


Für große Platten können wir den Kondensator als unendlich groß ansehen. (Was bedeutet „große Platten“? Die Fläche A muss mit einer anderen Größe derselben Einheit verglichen werden; die sinnvolle Formulierung der Bedingung ist also $A \gg d^2$.) Dann ist die Oberflächenladungsdichte auf der positiven Platte homogen gleich

$$\sigma = \frac{Q}{A} \quad (3.160)$$

und das \vec{E} -Feld im Inneren ist homogen gleich (siehe Abschnitt 3.3)

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A}. \quad (3.161)$$



Die Spannung ist

$$U = Ed = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A} d. \quad (3.162)$$

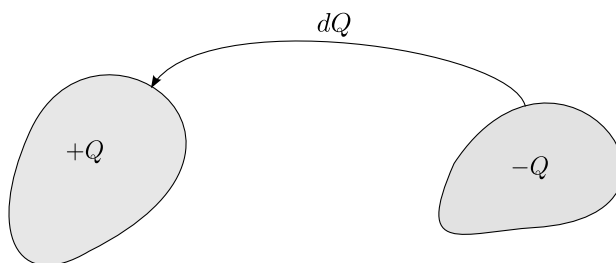
Daraus folgt für die Kapazität

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 A}{d}. \quad (3.163)$$

Wir erkennen, dass C/ϵ_0 nur von geometrischen Eigenschaften abhängt – es ist eine charakteristische Länge des Systems.

3.7.1 Energie in Kondensatoren

Das Aufladen eines Kondensators erfordert, Ladungen entgegen der elektrischen Kraft, also „bergauf“, zu verschieben. Dazu muss Arbeit verrichtet werden, die als Energie im Feld des Kondensators gespeichert wird.



Die Verschiebung von dQ erfordert die Arbeit

$$dW = U dQ = \frac{Q}{C} dQ. \quad (3.164)$$

Die Gesamtarbeit ist damit

$$W = \int_0^Q dQ' \frac{Q'}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (3.165)$$

für die Gesamtladung Q . W ist die im Kondensator gespeicherte Energie. Wir können auch schreiben

$$W = \frac{1}{2} CU^2 \quad (3.166)$$

mit der Spannung $U = Q/C$. Die Abhängigkeit der Energie von der Kapazität C ist also ganz unterschiedlich, wenn wir Kondensatoren bei konstanter Ladung oder konstanter Spannung vergleichen. Zum Beispiel: Wie ändert sich

die in einem geladenen, isolierten Plattenkondensator gespeicherte Energie, wenn der Plattenabstand d verdoppelt wird? Für

$$d \rightarrow 2d \quad \Rightarrow \quad C \rightarrow \frac{C}{2} \quad (3.167)$$

und $Q = \text{const}$ folgt

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \rightarrow \frac{Q^2}{C} = 2W, \quad (3.168)$$

die Energie *verdoppelt* sich. Das ist sinnvoll: Wir müssen Arbeit verrichten, um die Platten auseinander zu ziehen.

Wie ändert sich andererseits die Energie, wenn der Kondensator an eine Spannungsquelle U angeschlossen ist? Mit $U = \text{const}$ folgt

$$W = \frac{1}{2} CU^2 \rightarrow \frac{1}{4} CU^2 = \frac{W}{2}, \quad (3.169)$$

die Energie *halbiert* sich. Jetzt kann man aber nicht so leicht mit der geleisteten Arbeit argumentieren, da die *Spannungsquelle* ebenfalls Arbeit leistet, um die Spannung konstant zu halten.

3.8 Randwertprobleme

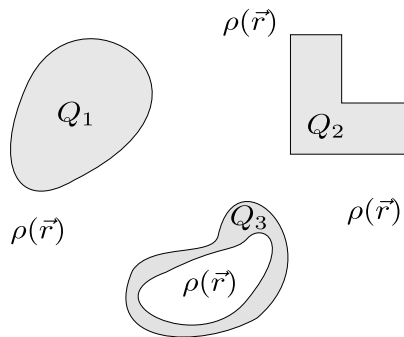
Eine wichtige Klasse von Aufgaben in der Elektrostatik besteht darin, das skalare Potential ϕ oder das elektrische Feld \vec{E} im Inneren eines Volumens \mathcal{V} zu bestimmen, wenn die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ im Inneren, die Form und die Gesamtladungen von Leitern im Inneren und bestimmte Bedingungen für ϕ und \vec{E} am Rand $\partial\mathcal{V}$ gegeben sind. Wir werden einige Methoden zur Lösung solcher Probleme kurz ansprechen. Es ist wichtig, dass die Lösung unter sehr schwachen Bedingungen *eindeutig* ist, hat man also *eine* Lösung gefunden, ist das Problem bereits vollständig gelöst. Die Eindeutigkeit der Lösung wird durch einige Sätze ausgedrückt, die wir hier angeben aber nicht beweisen:

1. Die Lösung $\phi(\vec{r})$ der Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (3.170)$$

in einem Volumen \mathcal{V} ist eindeutig bestimmt durch $\rho(\vec{r})$ in \mathcal{V} und die Vorgabe von $\phi(\vec{r})$ auf dem Rand $\partial\mathcal{V}$. Dann ist auch das \vec{E} -Feld eindeutig bestimmt.

2. Gegeben seien Leiter bekannter Geometrie mit Ladungen Q_i , eingebettet in ein isolierendes Medium mit der Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$.



Das gesamte System habe eine endliche Ausdehnung. Dann ist das \vec{E} -Feld im gesamten Raum unter der natürlichen Annahme $\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{E}(\vec{r}) = 0$, die eine Randbedingung im Unendlichen darstellt, eindeutig bestimmt.

3. $\vec{E}(\vec{r})$ ist in einem Volumen \mathcal{V} eindeutig bestimmt, wenn $\rho(\vec{r})$ innerhalb des Volumens gegeben ist und an jedem Punkt der Oberfläche $\partial\mathcal{V}$ *entweder* $\phi(\vec{r})$ (*Dirichlet-Randbedingung*) *oder* die Normalkomponente

$$E_n(\vec{r}) = \hat{n}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) \equiv -\hat{n}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \phi \quad (3.171)$$

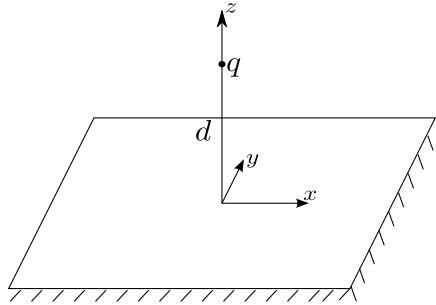
(*Neumann-Randbedingung*) gegeben ist. Man schreibt auch

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} := \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \phi \quad (3.172)$$

(*Normalenableitung*). In diesem Zusammenhang wird \hat{n} meist als nach *innen* zeigender Normaleneinheitsvektor definiert. Ist an mindestens einem Punkt von $\partial \mathcal{V}$ ϕ selbst vorgegeben, so ist $\phi(\vec{r})$ in \mathcal{V} auch eindeutig bestimmt, ansonsten nur bis auf eine additive Konstante.

3.8.1 Bildladungsmethode

Diese Methode ist nützlich, um das Feld für leitende Körper *hoher Symmetrie* und zusätzliche, explizit gegebene Ladungen zu bestimmen. Wir illustrieren die Methode anhand einer Punktladung q im Abstand d von einer Ebene. Diese sei geerdet, d. h. sie liegt auf dem Potential $\phi = 0$.



Wir haben also die Poisson-Gleichung

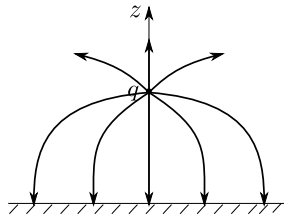
$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - d \hat{z}) \quad \text{für } z > 0 \quad (3.173)$$

mit den Randbedingungen

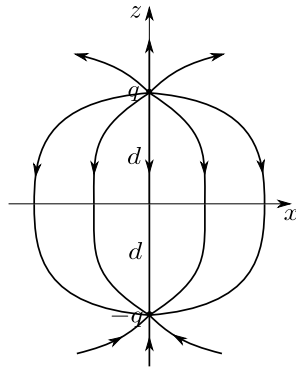
$$\phi(x, y, 0) = 0, \quad (3.174)$$

$$\lim_{\substack{\vec{r} \rightarrow \infty \\ z > 0}} \phi(\vec{r}) = 0 \quad (3.175)$$

zu lösen. Wir wissen, dass \vec{E} senkrecht auf der Leiteroberfläche steht und können daher die Feldlinien ohne Rechnung skizzieren:



Die zu diskutierende Lösungsmethode basiert auf der folgenden Erkenntnis: Wenn wir ein Potential $\phi(\vec{r})$ gefunden haben, das die Gleichung und die Randbedingungen erfüllt, dann ist die Aufgabe wegen der Eindeutigkeitsätze gelöst, unabhängig davon, wie wir uns $\phi(\vec{r})$ beschafft haben. Das \vec{E} -Feld sieht aber im oberen Halbraum dem Feld eines Paares von Punktladungen $\pm q$ in Abwesenheit der leitenden Ebene ähnlich.



Für dieses Ersatzsystem ist

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\vec{r} - d\hat{z}|} - \frac{q}{|\vec{r} + d\hat{z}|} \right). \quad (3.176)$$

Dieses Potential erfüllt

$$\nabla^2\phi = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - d\hat{z}) \quad \text{im oberen Halbraum,} \quad (3.177)$$

$$\phi(x, y, 0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + d^2}} \right) = 0, \quad (3.178)$$

$$\lim_{\substack{\vec{r} \rightarrow \infty \\ z > 0}} \phi(\vec{r}) = 0, \quad (3.179)$$

ist also für $z \geq 0$ eine – und damit die einzige – Lösung des ursprünglichen Problems. Im unteren Halbraum ist dies *keine* korrekte Lösung; befinden sich hier keine Ladungen, so gilt hier $\phi \equiv 0$. Aber der Bereich $z < 0$ war auch nicht der Gegenstand der Aufgabe.

Die wesentliche Idee ist, im „verbotenen“ Bereich *fiktive Bildladungen* (Spiegelbildungen) einzuführen, die, zusammen mit den physikalischen Ladungen, ein Potential erzeugen, das die Randbedingungen erfüllt. Sie heißen Bildladungen, weil sie in gewissem Sinn Spiegelbilder der physikalischen Ladungen sind. Bevor wir weitere Beispiele ansehen, können wir für das System mit einer Punktladung oberhalb einer leitenden Ebene weitere Schlüsse aus dem Ergebnis ziehen: Das elektrische Feld für $z \geq 0$ ist

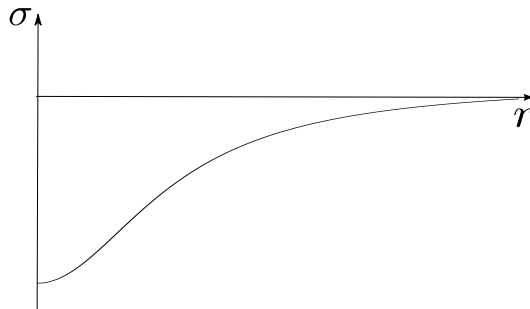
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r} - d\hat{z}}{|\vec{r} - d\hat{z}|^3} - \frac{\vec{r} + d\hat{z}}{|\vec{r} + d\hat{z}|^3} \right). \quad (3.180)$$

Auf der leitenden Ebene lautet es

$$\vec{E}(x, y, 0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x, y, -d) - (x, y, d)}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{d}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} \hat{z}. \quad (3.181)$$

Das Feld steht also, wie erwartet, senkrecht auf der leitenden Oberfläche. Aus dem \vec{E} -Feld erhalten wir gemäß Abschnitt 3.6 sofort die *influenzierte Ladungsdichte*

$$\sigma(x, y) = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{n} = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{z} = -\frac{q}{2\pi} \frac{d}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} = -\frac{q}{2\pi} \frac{d}{(r^2 + d^2)^{3/2}}. \quad (3.182)$$



Damit ist die insgesamt auf der Oberfläche influenzierte Ladung

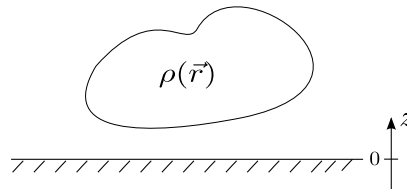
$$q_{\text{ind}} = \iint dx dy \sigma(x, y) = \int_0^\infty dr r \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \sigma(r) = -q d \underbrace{\int_0^\infty dr \frac{r}{(r^2 + d^2)^{3/2}}}_{=1/d} = -q. \quad (3.183)$$

Dieses Ergebnis war zu erwarten, da das Potential für $z \geq 0$ dasselbe ist wie für ein $\pm q$ Paar, das auch eine verschwindende Gesamtladung hat. Da die Kraft auf die Ladung q *nur* vom lokalen \vec{E} -Feld abhängt, können wir sie ebenfalls sofort berechnen. Wichtig ist dabei aber, dass nur das Feld aufgrund der influenzierten Oberflächenladung (oder äquivalent der Bildladung) berücksichtigt werden darf. Das von q selbst erzeugte Feld übt keine Kraft auf q aus (Selbstwechselwirkung). Also ist die Kraft

$$\vec{F} = q \vec{E}_{\text{ohne } q}(d\hat{z}) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\hat{z} + d\hat{z}}{|d\hat{z} + d\hat{z}|^3} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2d}{|2d|^3} \hat{z} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|2d|^2} \hat{z}. \quad (3.184)$$

Dies ist natürlich einfach die Coulomb-Kraft für ein Paar von Punktladungen $q, -q$ im Abstand $2d$.

Die Bildladungsmethode funktioniert auch für *beliebige* Ladungsdichten $\rho(\vec{r})$ außerhalb der Leiter – in diesem Fall wenden wir einfach das Superpositionsprinzip an. Z. B. für eine leitende Ebene:



Die Bildladungen sind einfach

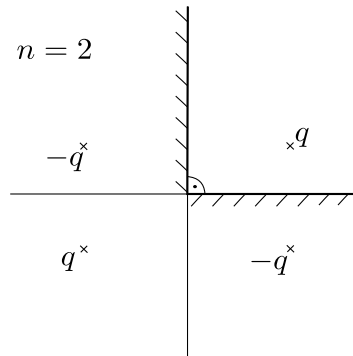
$$\rho'(x, y, z) = -\rho(x, y, -z) \quad \text{für } z < 0 \quad (3.185)$$

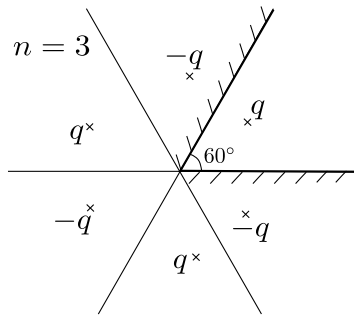
und das Potential lautet, für $z > 0$,

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \frac{\rho(\vec{r}') + \rho'(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dx dy dz \frac{\rho(x', y', z') - \rho(x', y', -z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}. \quad (3.186)$$

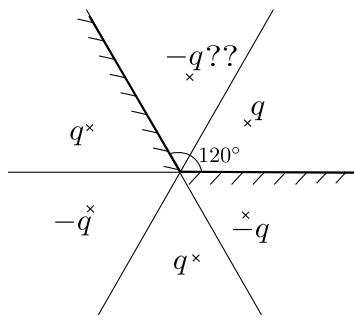
Die Methode ist auch für bestimmte andere Geometrien von Leitern anwendbar; diese müssen aber so beschaffen sein, dass alle Bildladungen *außerhalb* des physikalischen Bereichs liegen, d. h. *hinter* der leitenden Oberfläche. Folgende Geometrien sind z. B. so behandelbar:

1. Zwei geerdete leitende Ebenen, die sich unter einem Winkel π/n (also $180^\circ/n$) mit $n = 1, 2, 3 \dots$ treffen. $n = 1$ entspricht der leitenden Ebene.

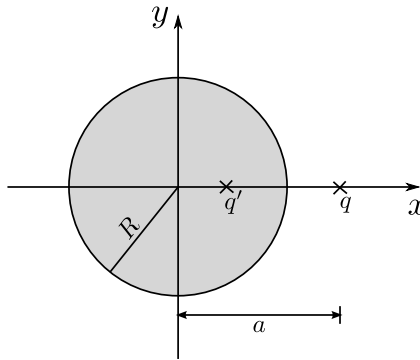




Bei einem Winkel von 120° funktioniert die Methode nicht, da eine der Bildladungen, die erforderlich ist, um $\phi = 0$ auf den Leiteroberflächen zu gewährleisten, im physikalischen Bereich liegen müsste. Dann hätten ϕ und \vec{E} einen Pol und die Poisson-Gleichung $\rho = -\epsilon_0 \nabla^2 \phi$ würde dort eine reale Ladung ergeben, die gar nicht vorhanden ist.



2. Drei leitende Ebenen, die sich unter bestimmten Winkeln treffen, z. B. jeweils 90° .
3. Überraschenderweise eine leitende Kugel. Hier ist die Bildladung nicht $q' = -q$, sondern reduziert zu $q' = -Rq/a$, was wir hier aber nicht nachrechnen.



Für einen unendlich langen Zylinder (einen dicken Draht) findet man dagegen keine geeigneten Bildladungen.

3.8.2 Separation der Variablen

Für die Lösung der Laplace-Gleichung $\nabla^2 \phi = 0$, für die ϕ oder $\vec{E} \cdot \hat{n} = -\partial \phi / \partial n$ auf einer Fläche \mathcal{S} vorgegeben ist, ist die Separation der Variablen eine nützliche Methode. Sie ist auch in der Quantenmechanik wichtig. Die Idee ist, für $\phi(\vec{r})$ einen Ansatz als *Produkt* von Funktionen zu schreiben, die jeweils nur von einer Koordinaten abhängen (*Separationsansatz*). Die *Wahl* der Koordinaten ist entscheidend dafür, ob dieser Ansatz Erfolg hat. Haben die

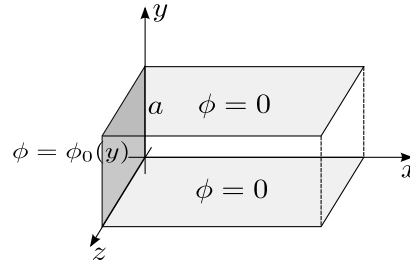
Ränder keine besonders hohe Symmetrie, lässt sich i. A. keine Lösung in Produktform finden. Wir illustrieren die Methode wieder anhand eines Beispiels: Löse die Laplace-Gleichung $\nabla^2\phi = 0$ mit den Randbedingungen

$$\phi(x, 0, z) = 0, \quad (3.187)$$

$$\phi(x, a, z) = 0, \quad (3.188)$$

$$\phi(0, y, z) = \phi_0(y) \quad (\text{vorgegeben}), \quad (3.189)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x, y, z) = 0. \quad (3.190)$$



Das Problem ist translationsinvariant in der z -Richtung, also erwarten wir, dass die Lösung ϕ nicht von z abhängt. Nun machen wir den Separationsansatz

$$\phi(x, y) = X(x) Y(y) \quad (3.191)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 X}{dx^2} Y + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 \quad \Big| : XY \quad (3.192)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 \quad (3.193)$$

(wir müssen im Prinzip am Ende prüfen, was bei Nullstellen von $X(x)$ und $Y(y)$ passiert). Es folgt

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} \quad \forall x, y. \quad (3.194)$$

Aber jetzt hängt die linke Seite der Gleichung gar nicht von y ab und die rechte nicht von x . Sie sind aber für alle x, y gleich. Wir bezeichnen diese Größe mit C . C ist also einerseits gleich einer von y unabhängigen Größe und andererseits gleich einer von x unabhängigen Größe. Damit ist C unabhängig von x und von y und damit eine Konstante. Sie wird *Separationskonstante* genannt.

Wir können die Separationskonstante natürlich nennen, wie wir wollen, und bezeichnen sie hier mit k^2 , weil das später nützlich ist. Also haben wir

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = k^2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k^2 \quad (3.195)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 X}{dx^2} = k^2 X \quad \text{und} \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k^2 Y. \quad (3.196)$$

Dies sind zwei *gewöhnliche* Differentialgleichungen. Die allgemeinen Lösungen sind bekannt:

$$X(x) = A e^{kx} + B e^{-kx}, \quad (3.197)$$

$$Y(y) = C \sin ky + D \cos ky. \quad (3.198)$$

Es folgt

$$\phi(\vec{r}) = (A e^{kx} + B e^{-kx}) (C \sin ky + D \cos ky). \quad (3.199)$$

Nun müssen wir versuchen, die Konstanten k, A, B, C und D aus den Randbedingungen zu bestimmen. Es kann passieren, dass der Separationsansatz hier scheitert. Aus

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x, y, z) = 0 \quad (3.200)$$

folgt $A = 0$. Dann können wir den Faktor B in C und D absorbieren: $BC \rightarrow C$, $BD \rightarrow D$. Aus

$$0 = \phi(x, y = 0, z) = e^{-kx} D \quad (3.201)$$

folgt $D = 0$. Aus

$$0 = \phi(x, y = a, z) = e^{-kx} C \sin ka \quad (3.202)$$

folgt dann $\sin ka = 0$, also

$$k = n \frac{\pi}{a}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.203)$$

(negative n ergeben keine neuen Lösungen). Die Lösung mit $n = 0$ ist $\phi \equiv 0$, die wir auch für $C = 0$ und $n > 0$ erhalten. Der Fall $n = 0$ ist also redundant und kann also ausgeschlossen werden. Die Lösung $\phi \equiv 0$ trifft natürlich nur zu, wenn die noch übrig gebliebene Randbedingung $\phi(x = 0, y, z) = \phi_0(y) = 0$ lautet. Schließlich erhalten wir

$$\phi(\vec{r}) = C e^{-kx} \sin ky \quad \text{mit } k = n \frac{\pi}{a}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.204)$$

Aber wir müssen noch die Randbedingung

$$\phi_0(y) = \phi(x = 0, y, z) = C \sin ky \quad (3.205)$$

erfüllen. Das wird *nicht* möglich sein, es sei denn, $\phi_0(y)$ ist von der speziellen Form $\phi_0(y) = \alpha \sin(n\pi y/a)$, $n \in \mathbb{N}$. Für allgemeines $\phi_0(y)$ scheint die Methode gescheitert zu sein. Es gibt aber einen Ausweg: Wir haben einen unendlichen Satz von unabhängigen Lösungen (abgezählt durch $n \in \mathbb{N}$) einer *linearen* Differentialgleichung gefunden. Daher können wir nach einer *Superposition* dieser Lösungen suchen, die die Randbedingungen erfüllt. Die *allgemeine* Lösung ist

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left(-\frac{n\pi x}{a}\right) \sin \frac{n\pi y}{a} \quad (3.206)$$

mit beliebigen Koeffizienten C_n . Die Randbedingung bei $x = 0$ lautet dann

$$\phi_0(y) = \phi(x = 0, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi y}{a}. \quad (3.207)$$

Dies ist eine *Fourier-Sinus-Reihe*. Wir können die C_n daher durch Fourier-Rücktransformation ermitteln. Konkret: Für $n' \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \int_0^a dy \sin \frac{n'\pi y}{a} \phi_0(y) &= \int_0^a dy \sin \frac{n'\pi y}{a} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi y}{a} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \underbrace{\int_0^a dy \sin \frac{n'\pi y}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}}_{= \begin{cases} 0 & \text{für } n' \neq n \\ a/2 & \text{für } n' = n \end{cases} = \delta_{n'n} \frac{a}{2}} \\ &= \frac{a}{2} C_{n'} \end{aligned} \quad (3.208)$$

(hier haben wir die *Orthogonalität* der Sinus-Funktionen auf dem Intervall $[0, a]$ ausgenutzt). Es folgt

$$C_n = \frac{2}{a} \int_0^a dy \sin \left(\frac{n\pi y}{a}\right) \phi_0(y). \quad (3.209)$$

Damit ist das Problem vollständig gelöst.

Als Beispiel betrachten wir den besonders ungünstigen Fall $\phi_0(y) = \phi_0 = \text{const} \neq 0$, d. h. die Fläche bei $x = 0$ liegt auf einem anderen Potential als die Flächen bei $y = 0$ und $y = a$. Dann ist

$$C_n = \frac{2}{a} \int_0^a dy \sin \left(\frac{n\pi y}{a}\right) \phi_0 = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ \frac{4\phi_0}{n\pi} & \text{für } n \text{ ungerade,} \end{cases} \quad (3.210)$$

also

$$\phi(\vec{r}) = \frac{4\phi_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{n\pi x}{a}\right) \sin \frac{n\pi y}{a}. \quad (3.211)$$

Diese Reihe konvergiert für $x < a$ sehr langsam; wir brauchen viele Terme, um eine gute Näherung zu erhalten. Die Ursache ist, dass ϕ an den Linien, an denen die Seitenflächen zusammenstoßen, unstetig ist.

3.8.3 Green-Funktionen

Sogenannte *Green-Funktionen* oder *Greensche Funktionen* bilden das wohl wichtigste Instrument für die Lösung partieller Differentialgleichungen in vielen Zweigen der Physik. Wir diskutieren die wesentliche Idee anhand des folgenden Randwertproblems: $\rho(\vec{r})$ sei in einem Volumen \mathcal{V} gegeben und $\phi(\vec{r})$ sei auf dessen Rand $\partial\mathcal{V}$ gegeben (Dirichlet-Randbedingungen). Bestimme $\phi(\vec{r})$ in \mathcal{V} . Wir zeigen nun, dass man dieses Problem auf ein *viel einfacheres* zurückführen kann: Finde $\phi(\vec{r})$ in \mathcal{V} für eine *Punktladung* am Ort $\vec{r}' \in \mathcal{V}$ und $\phi \equiv 0$ auf $\partial\mathcal{V}$! Wir nehmen an, dass wir dieses einfachere Problem gelöst haben und bezeichnen das skalare Potential am Ort \vec{r} für eine Einheitspunktladung ($q = 1$) am Ort \vec{r}' mit $G(\vec{r}, \vec{r}')$ (das Potential hängt natürlich vom Ort der Punktladung ab, hier machen wir diese Abhängigkeit explizit). Also gilt

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (3.212)$$

und

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad \forall \vec{r} \in \partial\mathcal{V}. \quad (3.213)$$

Man kann zeigen, dass G symmetrisch ist: $G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}', \vec{r})$, siehe z. B. Das Lehrbuch von W. Greiner. Dann folgt auch

$$(\nabla')^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = (\nabla')^2 G(\vec{r}', \vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\vec{r}' - \vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (3.214)$$

und

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad \forall \vec{r}' \in \partial\mathcal{V}. \quad (3.215)$$

Die wesentliche Behauptung ist nun, dass die Lösung des ursprünglichen Problems lautet

$$\phi(\vec{r}) = \iiint_{\mathcal{V}} dV' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') - \epsilon_0 \iint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s}' \cdot [\vec{\nabla}' G(\vec{r}, \vec{r}')] \phi(\vec{r}'). \quad (3.216)$$

Beachte, dass die rechte Seite $\rho(\vec{r}')$ auf \mathcal{V} , aber $\phi(\vec{r}')$ nur auf $\partial\mathcal{V}$ enthält.

□ Beweis: Wende den Gaußschen Satz auf $\Phi \vec{\nabla} \Psi$ und $\Psi \vec{\nabla} \Phi$ an:

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{\nabla} \cdot [\Phi(\vec{r}) \vec{\nabla} \Psi(\vec{r})] = \iint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \Phi(\vec{r}) \vec{\nabla} \Psi(\vec{r}), \quad (3.217)$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{\nabla} \cdot [\Psi(\vec{r}) \vec{\nabla} \Phi(\vec{r})] = \iint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \Psi(\vec{r}) \vec{\nabla} \Phi(\vec{r}). \quad (3.218)$$

Bilde die Differenz:

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{\nabla} \cdot [\Phi(\vec{r}) \vec{\nabla} \Psi(\vec{r}) - \Psi(\vec{r}) \vec{\nabla} \Phi(\vec{r})] = \iint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} \cdot [\Phi(\vec{r}) \vec{\nabla} \Psi(\vec{r}) - \Psi(\vec{r}) \vec{\nabla} \Phi(\vec{r})]. \quad (3.219)$$

Wende auf der linken Seite die Produktregel an:

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV \left[\vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{\nabla} \Psi) + \Phi \nabla^2 \Psi - \vec{\nabla} \cdot (\Psi \vec{\nabla} \Phi) - \Psi \nabla^2 \Phi \right] = \iint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} \cdot [\Phi \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Phi], \quad (3.220)$$

dieses Ergebnis heißt *2. Greenscher Satz*. Nenne nun die Integrationsvariable \vec{r}' und wähle

$$\Psi(\vec{r}') = \phi(\vec{r}'), \quad (3.221)$$

$$\Phi(\vec{r}') = G(\vec{r}, \vec{r}'). \quad (3.222)$$

Dann folgt

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV' \left[\underbrace{\phi(\vec{r}') \underbrace{(\nabla')^2 G(\vec{r}, \vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}')}_{-\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}')}}_{-\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}')} \right] = \iint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s}' \cdot \left[\phi(\vec{r}') \vec{\nabla}' G(\vec{r}, \vec{r}') - \underbrace{G(\vec{r}, \vec{r}')}_{=0, \text{ da } \vec{r}' \in \partial\mathcal{V}} \vec{\nabla}' \phi(\vec{r}') \right] \quad (3.223)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\epsilon_0} \phi(\vec{r}) + \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} dV' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') = \iint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s}' \cdot [\vec{\nabla}' G(\vec{r}, \vec{r}')] \phi(\vec{r}'), \quad (3.224)$$

woraus die Behauptung folgt. $G(\vec{r}, \vec{r}')$ nennt man die *Green-Funktion* für das gegebene Randwertproblem. Sie hängt *nur* von der Form von $\partial\mathcal{V}$ ab – wir müssen also $G(\vec{r}, \vec{r}')$ nur *einmal* bestimmen und finden dann die Lösung für *beliebige* $\rho(\vec{r}')$ in \mathcal{V} und $\phi(\vec{r})$ auf $\partial\mathcal{V}$.

■ Beispiel 1: Seien $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ und die Randbedingung $\lim_{\vec{r} \rightarrow \infty} \phi(x, y, z) = 0$. Dann ist die Green-Funktion einfach das Potential einer Punktladung im freien Raum:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3.225)$$

und es folgt

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (3.226)$$

Das ist das schon bekannte allgemeine Coulomb-Gesetz. Es ist also ein Spezialfall der Green-Funktions-Lösung.

■ Beispiel 2: $\rho(\vec{r}')$ sei im Halbraum $z > 0$ gegeben, als Randbedingung sei $\phi(x, y, 0)$ gegeben und es sei $\lim_{z \rightarrow \infty} \phi(x, y, z) = 0$. Die Green-Funktion, also das Potential einer Punktladung vor einer geerdeten Ebene, hatten wir schon mit Hilfe der Bildladungsmethode bestimmt:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \underbrace{(\vec{r}' - 2z' \hat{z})}_{\text{Ort der Bildladung}}|} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}' + 2z' \hat{z}|} \right). \quad (3.227)$$

Dies können wir nun in die allgemeine Formel einsetzen. Ist z. B. $\rho \equiv 0$ und

$$\phi(x, y, 0) = \begin{cases} \phi_0 & \text{für } x > 0, \\ -\phi_0 & \text{für } x < 0, \end{cases} \quad (3.228)$$

so erhalten wir die Lösung

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= -\epsilon_0 \iint dx' dy' \underbrace{(-\hat{z})}_{\text{nach außen}} \cdot [\vec{\nabla}' G(\vec{r}, \vec{r}')] \phi(x', y', 0) = \frac{\phi_0}{4\pi} \iint dx' dy' \frac{\partial}{\partial z'} G(\vec{r}, \vec{r}') \operatorname{sgn} x' \\ &= \frac{\phi_0}{4\pi} \iint dx' dy' \left(-\frac{z' - z}{((x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2)^{3/2}} + \frac{z' + z}{((x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' + z)^2)^{3/2}} \right)_{z'=0} \\ &\quad \times \operatorname{sgn} x' \\ &= \frac{\phi_0}{2\pi} z \iint dx' dy' \left(-\frac{\operatorname{sgn} x'}{((x' - x)^2 + (y' - y)^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \frac{\phi_0}{\pi} z \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\operatorname{sgn} x'}{(x' - x)^2 + z^2} \\ &= \frac{\phi_0}{\pi} \left(-\arctan \frac{x' - x}{z} \Big|_{-\infty}^0 + \arctan \frac{x' - x}{z} \Big|_0^{\infty} \right) = \frac{\phi_0}{\pi} \left[-\arctan \left(-\frac{x}{z} \right) + \left(-\frac{\pi}{2} \right) + \left(\frac{\pi}{2} \right) - \arctan \left(-\frac{x}{z} \right) \right] \\ &= \frac{2\phi_0}{\pi} \arctan \frac{x}{z}. \end{aligned} \quad (3.229)$$

3.9 Multipolentwicklung

Für die freie Randbedingung $\lim_{\vec{r} \rightarrow \infty} \phi(x, y, z) = 0$ und eine räumlich begrenzte Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ interessiert man sich manchmal nicht für das exakte Potential, sondern für eine gute Näherung für große r , weit entfernt von den Ladungen. Mathematisch werden wir eine Taylor-Entwicklung nach einem geeigneten kleinen Parameter durchführen. Daher erinnern wir zunächst an deren mathematische Grundlagen.

3.9.1 Die Taylor-Reihe

Die Taylor-Entwicklung ist eine in allen Zweigen der Physik sehr wichtige Methode. Sie erlaubt die systematische Konstruktion von Näherungen, oft mit expliziter Abschätzung des Fehlers, und gelegentlich sogar die Herleitung exakter Resultate durch Resummation der Taylor-Reihe. Die zentralen Aussagen werden durch die folgenden Sätze ausgedrückt, die wir hier nicht beweisen. Die Beweise sind nicht schwierig und finden sich in einführenden Lehrbüchern der Analysis.

Taylor'sche Formel: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und f eine auf I $(n+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für $x, x_0 \in I$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x, x_0) \quad (3.230)$$

mit dem Restglied

$$R_{n+1}(x, x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x dx' (x - x')^n f^{(n+1)}(x'). \quad (3.231)$$

Man kann auch zeigen, dass ein x_1 mit $x_0 \leq x_1 \leq x$ oder $x \leq x_1 \leq x_0$ existiert, so dass gilt

$$R_{n+1}(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_1)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (3.232)$$

(Laplacesche Form des Restglieds).

■ Beispiel: Sei $f(x) = e^x$. Es ist

$$f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x, \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = e^x. \quad (3.233)$$

Daraus folgt für $x_0 = 0$:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^{x_1}}{(n+1)!}x^{n+1}. \quad (3.234)$$

So finden wir eine Reihenentwicklung für die Exponentialfunktion mit einer Fehlerabschätzung. Z. B. für $x = 1$ ergibt sich die Reihendarstellung der Zahl e :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{x_1}}{(n+1)!}. \quad (3.235)$$

mit $0 < x_1 < 1$. Der absolute Fehler (das Restglied) ist also kleiner als $e/(n+1)!$ und der relative Fehler ist kleiner als

$$\frac{\frac{e}{(n+1)!}}{e} = \frac{1}{(n+1)!}, \quad (3.236)$$

er fällt daher wie das Inverse der Fakultät mit der Ordnung n ab.

Ist die Funktion f beliebig oft differenzierbar, so können wir n nach unendlich schicken. Falls gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x, x_0) = 0$, so konvergiert die Taylor-Reihe gegen $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \quad (3.237)$$

Geht das Restglied nicht gegen Null, so konvergiert die Taylor-Reihe gar nicht, oder sie konvergiert zwar, aber nicht gegen $f(x)$. Der letztere Fall kann zu schwer zu entdeckenden Fehlern führen.

Konvergiert die Taylor-Reihe auf dem offenen Intervall $]x_0 - r, x_0 + r[$ gegen $f(x)$, gilt dies aber nicht mehr für irgendein größeres r , so nennt man r den *Konvergenzradius* der Taylor-Reihe im Punkt x_0 . Man schreibt $r = 0$, wenn die Reihe (trivialerweise) für $x = x_0$ konvergiert, aber für beliebig kleine $|x - x_0|$ nicht. Ein interessantes Beispiel ist

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \exp(-1/x^2) & \text{für } x \neq 0. \end{cases} \quad (3.238)$$

Diese Funktion ist beliebig oft differenzierbar und es gilt $f^{(n)}(0) = 0 \forall n$, also ist die Taylor-Reihe um $x_0 = 0$ identisch Null und der Konvergenzradius ist $r = 0$.

In der Funktionentheorie findet man ein nützliches Ergebnis für den Konvergenzradius: Ist $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ auf einer Kreisscheibe $K \subset \mathbb{C}$ um z_0 mit dem Radius r *holomorph*, aber nicht auf irgendeiner größeren Kreisscheibe, so ist der Konvergenzradius r . (Holomorph bedeutet i. W., dass die Funktion nur von $z = x + iy$ abhängt und nicht von $z^* = x - iy$, und dass sie beliebig oft differenzierbar ist.)

■ Beispiel 1: Die oben angegebene Funktion lautet, erweitert auf \mathbb{C} ,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } z = 0 \\ \exp(-1/z^2) & \text{für } z \neq 0. \end{cases} \quad (3.239)$$

Aber

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(iy) = \exp\left(-\frac{1}{(iy)^2}\right) = \exp\left(\frac{1}{y^2}\right) = \infty \quad (3.240)$$

ist nicht gleich $f(0) = 0$, also ist die Funktion auf \mathbb{C} noch nicht einmal stetig im Punkt 0. Daher ist der Konvergenzradius Null.

■ Beispiel 2: Die Exponentialfunktion $f(z) = e^z$ ist holomorph auf ganz \mathbb{C} , daher ist der Konvergenzradius für alle reellen x_0 unendlich.

■ Beispiel 3: Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} \quad (3.241)$$

ist stetig und beliebig oft differenzierbar auf \mathbb{R} . Sie hat aber Pole bei $z = \pm i$. Der Konvergenzradius bei einem reellen x_0 ist also

$$r = |x_0 - (\pm i)| = |x_0 \mp i| = \sqrt{x_0^2 + 1}. \quad (3.242)$$

3.9.2 Multipolentwicklung für das Coulomb-Gesetz

Das Potential einer gegebenen Ladungsverteilung lautet

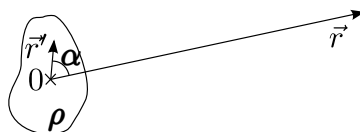
$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (3.243)$$

Hier ist

$$\Delta r = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \alpha}, \quad (3.244)$$

wobei α der von \vec{r} und \vec{r}' eingeschlossene Winkel ist (Kosinussatz). Wir schreiben

$$\Delta r = r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2 \frac{r'}{r} \cos \alpha}. \quad (3.245)$$



Ist $\rho(\vec{r})$ auf die Umgebung des Koordinatenursprungs beschränkt (Koordinatenursprung entsprechend wählen!), so kommen für große Abstände r nur $r' \ll r$ vor. Daher ist r'/r ein geeigneter kleiner Parameter und wir entwickeln den Faktor $1/\Delta r$ in eine Taylor-Reihe in r'/r . Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta r} &= \frac{1}{r} \left[1 - 2 \frac{r'}{r} \cos \alpha + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \right]^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r} \left[1 + \frac{r'}{r} \cos \alpha + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \frac{3 \cos^2 \alpha - 1}{2} + \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \frac{5 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha}{2} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (3.246)$$

Man kann zeigen, dass sich die Taylor-Reihe schreiben lässt als

$$\frac{1}{\Delta r} = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^k P_k(\cos \alpha) \quad (3.247)$$

mit den *Legendre-Polynomen* $P_k(x)$. Diese lassen sich zum Beispiel mittels der *Rodrigues-Formel*

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k \quad (3.248)$$

darstellen. Die ersten Polynome lauten

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}, \quad P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2}, \quad \dots \quad (3.249)$$

Damit erhalten wir für das Potential

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r^{k+1}} \iiint dV' (r')^k P_k(\cos \alpha) \rho(\vec{r}'). \quad (3.250)$$

Dies ist die *Multipolentwicklung* für das skalare Potential. Die Terme fallen offensichtlich mit $1/r^{k+1}$ ab, also schneller für höhere Ordnungen k . Sinnvolle Näherungen für größere Abstände bestehen also darin, nur die ersten paar nicht verschwindenden Terme mitzunehmen. Den Term k -ter Ordnung nennt man 2^k -Polterm, wobei 2^k aber durch Wortbestandteile griechischer oder lateinischer Herkunft ausgedrückt wird:

k	2^k	Term
0	1	Monopol
1	2	Dipol
2	4	Quadrupol
3	8	Oktupol
4	16	Hexadekupol
...		

Der Monopolterm lautet demnach

$$\phi_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \iiint dV' \underbrace{P_0(\cos \alpha)}_1 \rho(\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (3.251)$$

mit der Gesamtladung Q . Für eine Punktladung (einen „Monopol“) existiert nur dieser Term. Der Dipolterm ist

$$\phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \iiint dV' r' \underbrace{P_1(\cos \alpha)}_{=\cos \alpha} \rho(\vec{r}'). \quad (3.252)$$

Mit $\cos \alpha = \hat{r} \cdot \hat{r}'$ erhalten wir

$$\phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot \iiint dV' \vec{r}' \rho(\vec{r}'). \quad (3.253)$$

Wir definieren nun das (elektrische) *Dipolmoment*

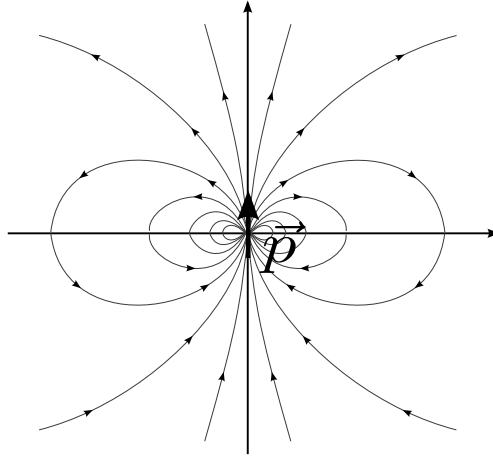
$$\vec{p} := \iiint dV' \vec{r}' \rho(\vec{r}') \quad (3.254)$$

der Ladungsanordnung. Es ist offensichtlich ein Vektor. Damit wird

$$\phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r} \cdot \vec{p}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3}. \quad (3.255)$$

Der Dipolbeitrag zum elektrischen Feld ist

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{\nabla}(\vec{r} \cdot \vec{p})}{r^3} + (\vec{r} \cdot \vec{p}) \vec{\nabla} \frac{1}{r^3} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{p}}{r^3} - (\vec{r} \cdot \vec{p}) 3 \frac{\hat{r}}{r^4} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{p}) - \vec{p}}{r^3}. \quad (3.256)$$



Der Quadrupolterm lautet

$$\begin{aligned} \phi_2(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \iiint dV' (r')^2 P_2(\cos \alpha) \rho(\vec{r}') = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \iiint dV' (r')^2 (3 \cos^2 \alpha - 1) \rho(\vec{r}') \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \iiint dV' (r')^2 [3(\hat{r} \cdot \hat{r}')^2 - 1] \rho(\vec{r}') = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \iiint dV' [3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - r^2 (r')^2] \rho(\vec{r}'). \end{aligned} \quad (3.257)$$

Dies schreiben wir nun in kartesischen Komponenten $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$:

$$\begin{aligned} \phi_2(\vec{r}) &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \iiint dx'_1 dx'_2 dx'_3 \left[3 \sum_{i,j} x_i x'_i x'_j x'_j - \sum_i x_i x_i (r')^2 \right] \rho(\vec{r}') \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \sum_{i,j} x_i x_j \iiint dx'_1 dx'_2 dx'_3 [3x'_i x'_j - \delta_{ij} (r')^2] \rho(\vec{r}') \\ &=: \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \sum_{i,j} x_i x_j Q_{ij} \end{aligned} \quad (3.258)$$

mit den Komponenten des *Quadrupoltensors*,

$$Q_{ij} = \iiint dx'_1 dx'_2 dx'_3 [3x'_i x'_j - \delta_{ij} (r')^2] \rho(\vec{r}'). \quad (3.259)$$

Beachte, dass die Spur des Quadrupoltensors immer verschwindet:

$$\text{Sp} \overleftrightarrow{Q} = \sum_i Q_{ii} = \iiint dx'_1 dx'_2 dx'_3 [3(r')^2 - 3(r')^2] \rho(\vec{r}') = 0. \quad (3.260)$$

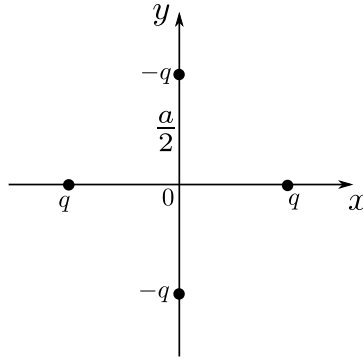
■ Beispiel 1: Betrachte zwei Punktladungen $\pm q$ an den Orten $\pm d\hat{z}/2$. Es ist

$$Q = \iiint dV' \rho(\vec{r}') = \iiint dV' \left[q\delta\left(\vec{r}' - \frac{d}{2}\hat{z}\right) - q\delta\left(\vec{r}' + \frac{d}{2}\hat{z}\right) \right] = q - q = 0, \quad (3.261)$$

$$\vec{p} = \iiint dV' \vec{r}' \rho(\vec{r}') = \iiint dV' \vec{r}' \left[q\delta\left(\vec{r}' - \frac{d}{2}\hat{z}\right) - q\delta\left(\vec{r}' + \frac{d}{2}\hat{z}\right) \right] = q\frac{d}{2}\hat{z} + q\frac{d}{2}\hat{z} = qd\hat{z}, \quad (3.262)$$

$$\begin{aligned} Q_{ij} &= \iiint dV' [3x'_i x'_j - \delta_{ij}(r')^2] \left[q\delta\left(\vec{r}' - \frac{d}{2}\hat{z}\right) - q\delta\left(\vec{r}' + \frac{d}{2}\hat{z}\right) \right] \\ &= q \left[3 \left(\frac{d}{2}\hat{z}\right)_i \left(\frac{d}{2}\hat{z}\right)_j - \delta_{ij} \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 3 \left(-\frac{d}{2}\hat{z}\right)_i \left(-\frac{d}{2}\hat{z}\right)_j + \delta_{ij} \left(\frac{d}{2}\right)^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.263)$$

■ Beispiel 2: Berechne den Quadrupoltensor für vier Punktladungen in folgender Anordnung:



$$\begin{aligned} Q_{ij} &= \iiint dV' [3x'_i x'_j - \delta_{ij}(r')^2] \left[q\delta\left(\vec{r}' - \frac{a}{2}\hat{x}\right) - q\delta\left(\vec{r}' - \frac{a}{2}\hat{y}\right) + q\delta\left(\vec{r}' + \frac{a}{2}\hat{x}\right) - q\delta\left(\vec{r}' + \frac{a}{2}\hat{y}\right) \right] \\ &= q \left[3 \left(\frac{a}{2}\hat{x}\right)_i \left(\frac{a}{2}\hat{x}\right)_j - \delta_{ij} \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 3 \left(\frac{a}{2}\hat{y}\right)_i \left(\frac{a}{2}\hat{y}\right)_j + \delta_{ij} \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 3 \left(-\frac{a}{2}\hat{x}\right)_i \left(-\frac{a}{2}\hat{x}\right)_j - \delta_{ij} \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 3 \left(-\frac{a}{2}\hat{y}\right)_i \left(-\frac{a}{2}\hat{y}\right)_j + \delta_{ij} \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right] \\ &= \frac{3}{2} q a^2 (\delta_{i1}\delta_{j1} - \delta_{i2}\delta_{j2}), \end{aligned} \quad (3.264)$$

oder als Matrix:

$$\overleftrightarrow{Q} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} q a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} q a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.265)$$

Kapitel 4

Makroskopische Elektrostatik

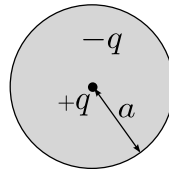
Die bisher entwickelte Beschreibung der Elektrostatik ist im Prinzip vollständig. Sie ist aber nicht besonders nützlich, wenn wir das elektrische Feld in einem nicht leitenden Medium bestimmen wollen. Das ist z. B. für Kondensatoren wichtig, die mit einem Dielektrikum gefüllt sind. Dies trifft für alle technisch eingesetzten Kondensatoren zu. Ihre Kapazität ist gegenüber einem luftgefüllten Kondensator deutlich erhöht.

In einem Leiter ist zumindest ein Teil der Ladungsträger beweglich. *Isolatoren (Dielektrika)* enthalten dagegen keine frei beweglichen Ladungsträger, jedenfalls nicht bei niedrigen Energien. In normaler Materie bedeutet dies, dass alle Elektronen in Atomen, Ionen oder Molekülen gebunden sind. Daher können sie sich als Reaktion auf ein nicht zu starkes äußeres elektrisches Feld nur wenig bewegen, typischerweise über Entfernungen, die kleiner als die Größe der Atome, Ionen oder Moleküle sind. Es ist daher klar, dass sich Isolatoren im \vec{E} -Feld ganz anders verhalten als Leiter.

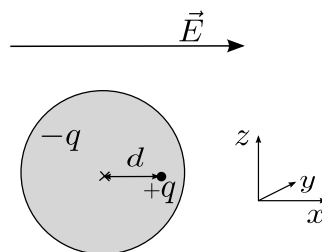
4.1 Polarisation von Atomen und Molekülen

4.1.1 Induzierte Dipole

Wir betrachten zunächst ein einzelnes Atom im äußeren Feld; Ionen und Moleküle lassen sich analog verstehen. Ein sehr einfaches Atommodell besteht aus einem Kern der Ladung $+q$ und einer Elektronenhülle mit der Gesamtladung $-q$ und homogener Ladungsdichte innerhalb einer Vollkugel.



In einem elektrischen Feld \vec{E} werden Kern und Hülle gegeneinander verschoben (in der Skizze ist diese Verschiebung stark übertrieben):



Im Gleichgewicht ist die Gesamtkraft auf den Kern (oder die Hülle) Null, d. h. das elektrische Feld am Kernort verschwindet. Es lautet

$$\vec{E}_{\text{ges}} = \vec{E} + \vec{E}_{\text{el}} \quad (4.1)$$

mit dem Beitrag der Elektronenhülle, vgl. Abschnitt 3.3,

$$\vec{E}_{\text{el}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^3} d\hat{x} \quad (4.2)$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{ges}} = E\hat{x} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^3} d\hat{x} \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.3)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{a^3} = E. \quad (4.4)$$

Der Ort des Kerns sei \vec{r}_K , Der Mittelpunkt der Hülle sei \vec{r}_H . Dann ist $\vec{r}_K - \vec{r}_H = d\hat{x}$. Das *Dipolmoment* des Atoms ist

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \iiint dV \vec{r} \rho(\vec{r}) = q\vec{r}_K + \rho \iiint dV \vec{r} \theta(a - |\vec{r} - \vec{r}_H|) = q\vec{r}_K + \rho \iiint dV (\underbrace{\vec{r} - \vec{r}_H}_{=: \vec{u}} + \vec{r}_H) \theta(a - |\vec{r} - \vec{r}_H|) \\ &= q\vec{r}_K + \rho \underbrace{\iiint d^3u \vec{u} \theta(a - u)}_0 + \rho\vec{r}_H \underbrace{\iiint d^3u \theta(a - u)}_{\frac{4\pi}{3} a^3}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

wobei

$$\rho = \frac{-q}{\frac{4\pi}{3} a^3} \quad (4.6)$$

die Ladungsdichte der Hülle ist. Es folgt

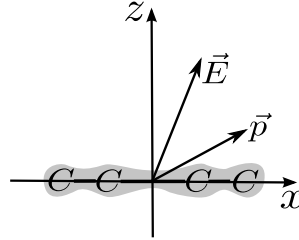
$$\vec{p} = q(\vec{r}_K - \vec{r}_H) = qd\hat{x} = 4\pi\epsilon_0 a^3 E\hat{x} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \vec{E}. \quad (4.7)$$

Das Dipolmoment ist also proportional zum angelegten Feld. Die Proportionalitätskonstante nennen wir *atomare Polarisierbarkeit* α , also ist

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}. \quad (4.8)$$

Dieser lineare Zusammenhang gilt nur für schwache Felder. Man findet ihn auch bei einer genaueren, insbesondere quantenmechanischen, Betrachtung. Es bleibt auch richtig, dass große Atome eine größere Polarisierbarkeit haben als kleine. Das Dipolmoment \vec{p} ist *induziert*, da es für $\vec{E} = 0$ nicht vorhanden ist. Man sagt, das Atom, und auch die gesamte Probe, sei (elektrisch) *polarisiert*.

Bei einem *Molekül* ist die Polarisierbarkeit i. A. nicht isotrop. Ein Benzolmolekül ist z. B. in der Molekülebene viel leichter polarisierbar als senkrecht dazu. Daher ist i. A. \vec{p} nicht parallel zu \vec{E} .



Für schwache Felder ist \vec{p} aber immer noch linear in \vec{E} . Der allgemeinste lineare Zusammenhang lautet

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \equiv \overleftrightarrow{\alpha} \vec{E} \quad (4.9)$$

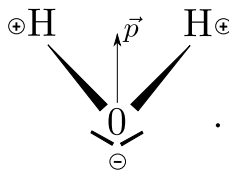
mit dem *Polarisierbarkeitstensor* $\overleftrightarrow{\alpha}$. $\overleftrightarrow{\alpha}$ ist symmetrisch. (Das ist plausibel: Ein antisymmetrischer Anteil würde sich schreiben lassen als $\vec{b} \times \vec{E}$ mit einem Pseudovektor \vec{b} , aber in der Elektrostatik gibt es keinen natürlichen Pseudovektor.) Daher können wir $\overleftrightarrow{\alpha}$ diagonalisieren; es existiert ein Koordinatensystem, in dem $\overleftrightarrow{\alpha}$ diagonal ist (*Hauptachsensystem*),

$$\overleftrightarrow{\alpha}' = \begin{pmatrix} \alpha'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha'_{33} \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Dies ist ähnlich zur Diagonalisierung des Trägheitstensors in der Mechanik.

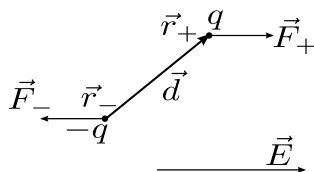
4.1.2 Polare Moleküle

Manche Moleküle haben auch ohne angelegtes \vec{E} -Feld ein elektrisches Dipolmoment. Ein Beispiel ist das Wassermolekül:



Wir können einen Dipol durch zwei Punktladungen $\pm q$ im Abstand d darstellen, wobei das Dipolmoment $p = qd$ beträgt. Im Limes $d \rightarrow 0, q \rightarrow \infty$ mit $p = \text{const}$ erhalten wir einen elementaren Dipol (*Punkt dipol*).

Wir betrachten nun einen Dipol in einem homogenen \vec{E} -Feld:



Die *Gesamtkraft* auf den Dipol ist

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q\vec{E} - q\vec{E} = 0. \quad (4.11)$$

Aber es wirkt ein *Drehmoment*

$$\vec{M} = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- = \frac{\vec{d}}{2} \times q\vec{E} + \left(-\frac{\vec{d}}{2}\right) \times (-q)\vec{E} = q\vec{d} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}. \quad (4.12)$$

Dieses Drehmoment ist bestrebt, den Dipol parallel zu \vec{E} auszurichten. (Ohne Dämpfung würde der Dipol Dreh-schwingungen ausführen.) Bei der Temperatur $T = 0$ wären tatsächlich alle Dipole parallel zu \vec{E} ausgerichtet. Bei hohen Temperaturen *fluktuieren* die Dipole dagegen aufgrund ihrer thermischen Energie. Man findet für hohe Temperaturen T einen („thermischen“) Mittelwert

$$\langle \vec{p} \rangle \sim \frac{p\vec{E}}{T}. \quad (4.13)$$

Dieses gemittelte Dipolmoment ist also wieder linear im \vec{E} -Feld.

4.2 Polarisation von Materie

In einem nicht leitenden Medium werden elektrische Dipole induziert oder bereits existierende Dipole durch ein elektrisches Feld ausgerichtet; das Medium wird elektrisch polarisiert. Dieser Effekt wird quantitativ durch die (elektrische) *Polarisation* \vec{P} beschrieben, diese ist das Dipolmoment pro Volumen, also die Dipoldichte. Die lokale Polarisation können wir also schreiben als

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}. \quad (4.14)$$

Hier haben wir offensichtlich ein *kontinuierliches* Medium angenommen. In Wirklichkeit besteht (gewöhnliche) Materie natürlich aus diskreten Atomen, Ionen oder Molekülen. In der makroskopischen Elektrostatik – und auch in der makroskopischen Elektrodynamik – betrachten wir Größen, die über im Vergleich zu atomaren Längenskalen (10^{-10} m) große, aber im Vergleich zur Systemgröße kleine, Skalen gemittelt sind. Insbesondere sind auch die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ und das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ als gemittelte Größen zu verstehen. Es ist etwas unglücklich, dass sie meist mit denselben Symbolen wie die mikroskopischen Größen bezeichnet werden. Auf atomaren Skalen gilt die makroskopische Theorie nicht und z. B. die Polarisation \vec{P} hat keinen Sinn. Hier müssen wir stattdessen die mikroskopische Beschreibung für die elementaren Ladungen verwenden.

Die Polarisation wird nicht nur i. A. vom \vec{E} -Feld *erzeugt*, sie *generiert* auch selbst einen Beitrag zum elektrischen Feld. Wir wollen das skalare Potential aufgrund eines polarisierten Mediums berechnen. Das Potential bei \vec{r} eines infinitesimalen Dipolmoments $d\vec{p}$ am Ort \vec{r}' ist, vgl. Abschnitt 3.9.2,

$$d\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot d\vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (4.15)$$

Das gesamte Potential lautet also

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot d\vec{p}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} dV' \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (4.16)$$

Nun ist

$$\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (4.17)$$

und analog

$$\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = + \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (4.18)$$

Daraus folgt

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} dV' \left(\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \vec{P}(\vec{r}') \stackrel{\text{partiell}}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s}' \cdot \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} dV' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (4.19)$$

Der erste Term sieht aus wie das Potential einer Flächenladungsdichte

$$\sigma_g := \hat{n} \cdot \vec{P} \quad (4.20)$$

auf $\partial\mathcal{V}$ (der Subskript „g“ steht für „gebunden“) und der zweite Term wie das Potential einer Volumenladungsdichte

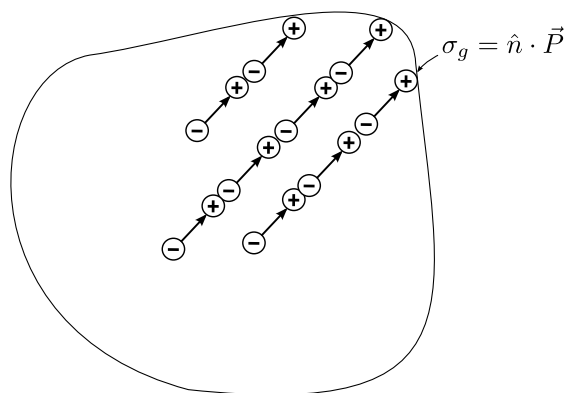
$$\rho_g := -\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}. \quad (4.21)$$

Damit wird

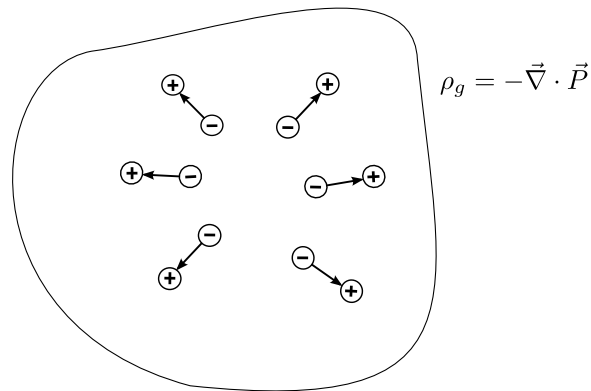
$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\partial\mathcal{V}} ds' \frac{\sigma_g(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} dV' \frac{\rho_g(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (4.22)$$

σ_g und ρ_g heißen *gebundene Ladungen* oder *Polarisationsladungen* in Abgrenzung zu freien Ladungen σ_f , ρ_f . Wir können nun alle bekannten Methoden zur Bestimmung des Potentials oder des \vec{E} -Feldes anwenden, *wenn* die Polarisation \vec{P} gegeben ist.

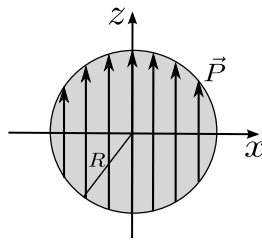
Man kann intuitiv verstehen, wie die gebundenen Ladungen aufgrund der Polarisation zustande kommen. Wir stellen uns \vec{P} als aus kleinen Dipolen zusammengesetzt vor. Ist $\vec{P} = \text{const}$, so kompensieren sich die positiven und negativen Enden der Dipole im Inneren, aber nicht an der Oberfläche:



Ist \vec{P} nicht gleichförmig, so kompensieren sich auch die gebundenen Ladungen im Inneren nicht:



■ Beispiel: gleichförmig polarisierte Kugel.



Hier ist

$$\rho_g = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0, \quad (4.23)$$

$$\sigma_g = \hat{n} \cdot \vec{P} = \hat{r} \cdot \vec{P} = P \cos \theta \quad (4.24)$$

mit der üblichen sphärischen Koordinate θ . Damit ist das Potential

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' R^2 \sin \theta' \frac{P \cos \theta'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (4.25)$$

Dieses Integral kann man mit einer Multipolentwicklung auswerten, was wir hier nicht durchführen. Das Ergebnis lautet

$$\phi(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{P}{3\epsilon_0} z & \text{für } r \leq R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} & \text{für } r > R, \end{cases} \quad (4.26)$$

wobei

$$\vec{p} = \frac{4\pi}{3} R^3 \vec{P} \quad (4.27)$$

das Dipolmoment der Kugel ist. Wir überprüfen die Lösung: Im Inneren der Kugel gilt offensichtlich

$$\nabla^2 \phi = \frac{P}{3\epsilon_0} \frac{\partial^2 z}{\partial z^2} = 0. \quad (4.28)$$

Im Außenraum ist ϕ das Potential eines Punktdipols bei $\vec{r}' = 0$, daher auch $\nabla^2 \phi = 0$. $\nabla^2 \phi$ kann also nur an der Oberfläche von Null verschieden sein. Wegen der Rotationssymmetrie um die z -Achse gilt

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta}. \quad (4.29)$$

Mit

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{r}) &= \begin{cases} \frac{P}{3\epsilon_0} r \cos \theta & \text{für } r \leq R \\ \frac{P}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \cos \theta & \text{für } r > R, \end{cases} \\
&= \frac{P}{3\epsilon_0} \cos \theta \frac{1}{r^2} \begin{cases} r^3 & \text{für } r \leq R \\ R^3 & \text{für } r > R, \end{cases} \\
&= \frac{P}{3\epsilon_0} \cos \theta \frac{r^3 + R^3 - |r^3 - R^3|}{2r^2}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

folgt

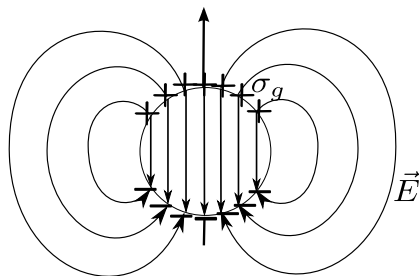
$$\begin{aligned}
\nabla^2 \phi &= \frac{P}{3\epsilon_0} \cos \theta \frac{1}{2r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{(3r^2 - \text{sgn}(r-R)3r^2) r^2 - (r^3 + R^3 - |r^3 - R^3|) 2r}{r^4} \\
&\quad - \frac{P}{3\epsilon_0} \frac{(r^3 + R^3 - |r^3 - R^3|)}{2r^2} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin^2 \theta \\
&= \frac{P}{6\epsilon_0} \cos \theta \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 - 3\text{sgn}(r-R)r^2 - \frac{2R^3}{r} + \frac{2|r^3 - R^3|}{r} \right) \\
&\quad - \frac{P}{3\epsilon_0} \frac{(r^3 + R^3 - |r^3 - R^3|)}{r^4} \cos \theta \\
&= \frac{P}{6\epsilon_0} \cos \theta \left(\frac{2}{r} - 6\delta(r-R) - \frac{6\text{sgn}(r-R)}{r} + \frac{2R^3}{r^4} + \frac{6\text{sgn}(r-R)}{r} - \frac{2|r^3 - R^3|}{r^4} \right) \\
&\quad - \frac{P}{3\epsilon_0} \frac{(r^3 + R^3 - |r^3 - R^3|)}{r^4} \cos \theta \\
&= \frac{P}{3\epsilon_0} \left(-3\delta(r-R) + \frac{(r^3 + R^3 - |r^3 - R^3|)}{r^4} - \frac{(r^3 + R^3 - |r^3 - R^3|)}{r^4} \right) \cos \theta \\
&= -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(r-R) \underbrace{P \cos \theta}_{\sigma_g}.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

$\phi(\vec{r})$ erfüllt also die Poisson-Gleichung für die Flächenladungsdichte σ_g .

Das elektrische Feld der polarisierten Kugel beträgt offenbar im Inneren

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi = -\frac{P}{3\epsilon_0} \hat{z} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}. \tag{4.32}$$

Also ist \vec{E} wie \vec{P} gleichförmig. Dies ist ein spezielles Resultat für Ellipsoide. In anderen homogen polarisierten Körpern ist nicht $\vec{E} = \text{const.}$ Im Außenraum finden wir das \vec{E} -Feld eines Punktdipols. Dieses Ergebnis ist nur für eine Kugel exakt, aber für beliebige Körper näherungsweise für große r gültig; es ist der führende Term der Multipolentwicklung.



4.3 Das Verschiebungsfeld

Im Allgemeinen liegen in Medien sowohl gebundene Ladungen ρ_g (aufgrund der Polarisation) als auch freie Ladungen ρ_f (aufgrund einer Aufladung, d. h. eines makroskopischen Transports von Ladungsträgern) vor. Die Gesamtladung

$$\rho = \rho_g + \rho_f \quad (4.33)$$

erzeugt das elektrostatische Feld, also gilt das Gaußsche Gesetz

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho = \rho_g + \rho_f = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} + \rho_f. \quad (4.34)$$

Das können wir umschreiben als

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f. \quad (4.35)$$

Wir definieren das *elektrische Verschiebungsfeld*

$$\vec{D} := \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (4.36)$$

Damit gilt also

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f, \quad (4.37)$$

die Quellen des Verschiebungsfelds sind nur die *freien* Ladungen. In Integralform lautet es in offensichtlicher Schreibweise

$$\oiint_{\partial V} d\vec{s} \cdot \vec{D} = Q_{\text{in},f}. \quad (4.38)$$

Vergleich mit dem Gaußschen Gesetz

$$\oiint_{\partial V} d\vec{s} \cdot \vec{E} = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0} \quad (4.39)$$

legt die Vermutung nahe, dass \vec{D} ganz analog zu \vec{E} bestimmt werden kann, indem man nur überall Gesamtladungen durch freie Ladungen (multipliziert mit dem trivialen Einheitenfaktor ϵ_0) ersetzt. Das ist *falsch*. Es gilt nämlich

$$\vec{\nabla} \times \vec{D} = \epsilon_0 \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{E}}_{=0} + \vec{\nabla} \times \vec{P}, \quad (4.40)$$

was i. A. nicht verschwindet. Dagegen gilt immer $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ und das ist für die Herleitung des Coulomb-Gesetzes

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \frac{\rho}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (4.41)$$

notwendig. Es gilt also i. A. *nicht*

$$\vec{D}(\vec{r}) \stackrel{?}{=} \frac{1}{4\pi} \iiint dV' \frac{\rho_f(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'). \quad (4.42)$$

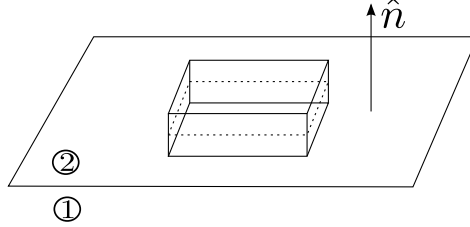
Dieses „Coulomb-Gesetz für das Verschiebungsfeld“ ist nur korrekt, wenn $\vec{\nabla} \times \vec{P} = 0$ und damit $\vec{\nabla} \times \vec{D} = 0$ im gesamten Raum gilt.

■ **Beispiel:** Für die gleichförmig polarisierte Kugel haben wir $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ im Außenraum, da dort \vec{P} verschwindet. Also ist \vec{D} , wie \vec{E} , ein Dipolfeld und insbesondere ungleich Null, obwohl gar keine freien Ladungen vorhanden sind.

Ganz allgemein wird es für die Bestimmung von \vec{D} nicht ausreichen, nur die freien Ladungen $\rho_f(\vec{r})$ zu kennen. Man benötigt auch die Polarisation $\vec{P}(\vec{r})$.

4.3.1 Anschlussbedingungen

Für die Lösung von elektrostatischen Problemen mit Dielektrika ist es wichtig zu wissen, wie sich das \vec{E} - und das \vec{D} -Feld an der Grenzfläche zwischen zwei Medien ändern. Eines der Medien kann natürlich Luft oder Vakuum sein. Wir betrachten ein kleines Volumenelement, das ein Stück der Grenzfläche einschließt und dessen Seitenflächen parallel oder senkrecht dazu stehen.



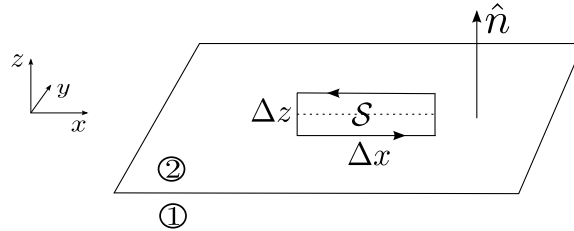
Aus

$$\oiint_{\partial V} d\vec{s} \cdot \vec{D} = Q_{\text{in},f} \quad (4.43)$$

folgt mit den üblichen Argumenten

$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma_f, \quad (4.44)$$

dabei ist D_{nk} die Normalkomponente von \vec{D} im Medium $k = 1, 2$. Wir haben den Normaleneinheitsvektor \vec{n} so gewählt, dass er von Medium 1 nach Medium 2 zeigt. Nun betrachten wir die *tangentialen* Komponenten. Dazu untersuchen wir eine kleine *geschlossene Kurve* der folgenden rechteckigen Form:



Wir verwenden nun den *Stokesschen Satz*, siehe Abschnitt 2.3.1:

$$\oint_{\partial S} d\vec{l} \cdot \vec{E} = \iint_S d\vec{s} \cdot (\underbrace{\nabla \times \vec{E}}_0) = 0. \quad (4.45)$$

Das Linienintegral zerlegen wir in Beiträge von den Kanten des Rechtecks:

$$\oint_{\partial S} d\vec{l} \cdot \vec{E} = \underbrace{\Delta x E_{t1}}_{\text{unten}} + \underbrace{\frac{\Delta z}{2} E_{n1} + \frac{\Delta z}{2} E_{n2}}_{\text{rechts}} - \underbrace{\Delta x E_{t2}}_{\text{oben}} - \underbrace{\frac{\Delta z}{2} E_{n1} - \frac{\Delta z}{2} E_{n2}}_{\text{links}} = \Delta x (E_{t1} - E_{t2}). \quad (4.46)$$

Es folgt $E_{t2} - E_{t1} = 0$ für die tangentialen Komponenten, hier speziell für die x -Komponenten. Für die y -Komponenten erhalten wir natürlich eine analoge Beziehung. Damit gilt für die *zweikomponentigen* tangentialen Anteile des \vec{E} -Feldes

$$\vec{E}_{t2} - \vec{E}_{t1} = 0. \quad (4.47)$$

Daraus folgt natürlich

$$\vec{D}_{t2} - \vec{D}_{t1} = \vec{P}_{t2} - \vec{P}_{t1}. \quad (4.48)$$

Das Potential ϕ ist stetig auch in Anwesenheit von Flächenladungsdichten, also gilt

$$\phi_2 - \phi_1 = 0. \quad (4.49)$$

An einer Grenzfläche ohne *freie* Ladungen gilt speziell

$$D_{n2} = D_{n1}, \quad \vec{E}_{t2} = \vec{E}_{t1}, \quad (4.50)$$

also sind die Normalkomponente von \vec{D} , aber die Tangentialkomponenten von \vec{E} stetig.

4.4 Lineare Dielektrika

Der Ursprung der Polarisation \vec{P} in Isolatoren liegt in den Dipolmomenten der einzelnen Atome, Ionen bzw. Moleküle. Haben diese in Abwesenheit eines elektrischen Feldes nicht verschwindende Dipolmomente (*permanente* Dipolmomente) *und* sind diese bevorzugt in einer Richtung ausgerichtet, so ist $\vec{P} \neq 0$ in Abwesenheit eines angelegten \vec{E} -Feldes. Ein Material mit dieser Eigenschaft bezeichnet man als *ferroelektrisch* oder als *Elektret*. (Als Elektret bezeichnet man auch einen ferroelektrischen, polarisierten Körper. In diesem Sinne ist ein Elektret analog zu einem Stabmagneten, nur mit elektrischer anstelle von magnetischer Polarisation. Jedoch kann man ein Elektret nicht im Laden kaufen, im Gegensatz zu einem Stabmagneten. Der Grund ist, dass die Polarisationsladungen σ_j an der Oberfläche eines Elektrets schnell durch Ionen aus der Luft kompensiert werden. Danach hat der Körper kein makroskopisches elektrisches Feld mehr. Mit Stabmagneten kann eine analoge Kompensation nicht stattfinden, da keine magnetischen freien Ladungen, d. h., Monopole, existieren.) In einem Elektret geht die Polarisation i. A. auf eine spontane Symmetriebrechung zurück, typischerweise eine Verschiebung der positiv geladenen Ionen gegenüber den negativen. Dann existieren für $\vec{E} = 0$ mehrere gleichberechtigte Lösungen für \vec{P} . Daher kann \vec{P} in diesem Fall keine Funktion von \vec{E} sein – die Abbildung ist nicht eindeutig. In einem nicht ferroelektrischen Material ist die Abbildung im stationären Fall aber eindeutig, also

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}). \quad (4.51)$$

Wir entwickeln für kleine \vec{E} :

$$P_i(\vec{E}) = \underbrace{P_i(0)}_0 + \sum_j \frac{\partial P_i(0)}{\partial E_j} E_j + \mathcal{O}(E^2), \quad (4.52)$$

wobei der konstante Term für nicht ferroelektrische Materialien verschwindet. Die Koeffizienten des linearen Terms bilden die Komponenten der *elektrischen Suszeptibilität*,

$$\epsilon_0 \chi_{e,ij} := \left. \frac{\partial P_i}{\partial E_j} \right|_{\vec{E}=0}. \quad (4.53)$$

Ist \vec{E} hinreichend klein, so ist

$$\vec{P} \cong \epsilon_0 \overleftrightarrow{\chi}_e \vec{E}, \quad (4.54)$$

wenn dies gilt, spricht man von einem *linearen Dielektrikum*. Ist es zusätzlich *isotrop*, so ist für alle Richtungen von \vec{E} die Polarisation \vec{P} parallel zu \vec{E} . Dies erfordert

$$\overleftrightarrow{\chi}_e = \chi_e \mathbb{1} \quad (4.55)$$

mit der skalaren Suszeptibilität χ_e .

Es ist wichtig, sich klarzumachen, dass \vec{E} das gesamte elektrische Feld ist, einschließlich eines Anteils, der vom polarisierten Körper selbst erzeugt wird. Daher ist $\vec{P} = \epsilon_0 \overleftrightarrow{\chi}_e \vec{E}$ i. A. eine komplizierte implizite Gleichung für \vec{E} bzw. \vec{P} .

In linearen Dielektrika gilt also

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \overleftrightarrow{\chi}_e \vec{E} = \epsilon_0 (\mathbb{1} + \overleftrightarrow{\chi}_e) \vec{E} =: \epsilon_0 \overleftrightarrow{\epsilon}_r \vec{E} \equiv \overleftrightarrow{\epsilon} \vec{E}. \quad (4.56)$$

Hier ist $\overleftrightarrow{\epsilon}_r$ die (i. A. tensorwertige) *Dielektrizitätskonstante*, die offenbar einheitenlos ist, und $\overleftrightarrow{\epsilon}$ die *Permittivität*. In einem isotropen Medium haben wir

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \quad (4.57)$$

und speziell im Vakuum

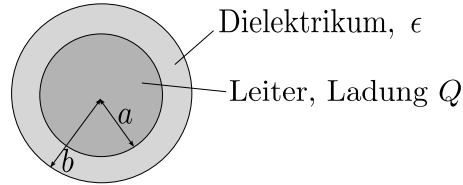
$$\epsilon_r = 1 \quad \text{und} \quad \epsilon = \epsilon_0. \quad (4.58)$$

Beispiele:

	ϵ_r
Luft (Normalbedingungen)	1,00054
Diamant	5,7
NaCl	5,9
Si	11,8
H ₂ O (-30°C)	99

Die Dielektrizitätskonstante von Wassereis ist hoch, da das H₂O-Molekül ein permanentes Dipolmoment besitzt, das bei $T = -30^\circ$ jedoch thermisch fluktuiert. Wir werden von nun an nur isotrope, lineare Dielektrika betrachten.

■ Beispiel 1:



Es sei $\phi(\vec{r} \rightarrow \infty) = 0$, gesucht ist das Potential $\phi(\vec{r})$.

Lösung: Das Verschiebungsfeld folgt aus dem Gaußschen Gesetz (Kugelsymmetrie!):

$$\vec{D}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad \text{für alle } r \geq a. \quad (4.59)$$

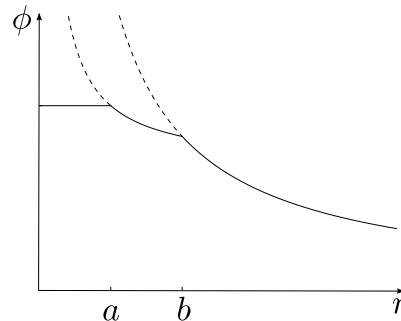
Innerhalb des Leiters ist $\vec{E} = 0$ und $\vec{D} = 0$. Außerhalb des Leiters bestimmen wir \vec{E} aus \vec{D} :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} & \text{für } r \geq b, \\ \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \hat{r} & \text{für } a \leq r < b. \end{cases} \quad (4.60)$$

Daher ist

$$\phi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} d\vec{l}' \cdot \vec{E}(\vec{r}') \quad (4.61)$$

$$= \begin{cases} - \int_{\infty}^r dr' \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(r')^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} & \text{für } r \geq b \\ - \int_{\infty}^b dr' \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(r')^2} - \int_b^r dr' \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{(r')^2} = \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon_0 b} + \frac{1}{\epsilon r} - \frac{1}{\epsilon b} \right) & \text{für } a \leq r < b \\ - \int_{\infty}^b dr' \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(r')^2} - \int_b^a dr' \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{(r')^2} = \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon_0 b} + \frac{1}{\epsilon a} - \frac{1}{\epsilon b} \right) & \text{für } r < a. \end{cases} \quad (4.62)$$



Wir können auch \vec{P} und die gebundenen Ladungen im Dielektrikum ausrechnen:

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E} = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \hat{r} = \frac{\epsilon_r - 1}{4\pi\epsilon_r} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad \text{für } a \leq r < b. \quad (4.63)$$

Damit ist

$$\rho_g = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0 \quad (\text{da } \vec{r} \neq 0) \quad (4.64)$$

und

$$\sigma_g = \hat{n} \cdot \vec{P} = \begin{cases} \frac{\epsilon_r - 1}{4\pi \epsilon_r} \frac{Q}{b^2} & \text{für } r = b, \\ -\frac{\epsilon_r - 1}{4\pi \epsilon_r} \frac{Q}{a^2} & \text{für } r = a, \end{cases} \quad (4.65)$$

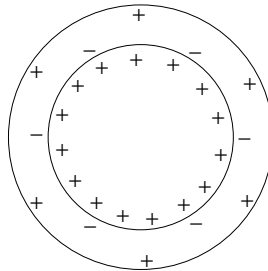
da \hat{n} vom Dielektrikum weg zeigt. Die gebundene Gesamtladung ist

$$Q_g = \underbrace{4\pi b^2 \frac{\epsilon_r - 1}{4\pi \epsilon_r} \frac{Q}{b^2}}_{\text{Außenfläche}} - \underbrace{4\pi a^2 \frac{\epsilon_r - 1}{4\pi \epsilon_r} \frac{Q}{a^2}}_{\text{Innenfläche}} = 0, \quad (4.66)$$

wie es sein muss.

Zum Vergleich, die *freie* Ladung an der Metalloberfläche bei $r = a$ ist

$$\sigma_f = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{a^2}. \quad (4.67)$$



Die Gesamtflächenladung an der Leiter-Dielektrikum-Grenzfläche ist also

$$\sigma = \sigma_f + \sigma_g = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{a^2} \left(1 - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) = \frac{1}{4\pi \epsilon_r} \frac{Q}{a^2}, \quad (4.68)$$

was mit dem \vec{E} -Feld für $a \leq r < b$ konsistent ist.

■ Beispiel 2: Ist das *gesamte* Volumen \mathcal{V} , in dem das Feld von Null verschieden ist, mit einem *homogenen* Dielektrikum gefüllt, dann und nur dann gilt neben

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \quad (4.69)$$

auch

$$\vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{\nabla} \times \epsilon \vec{E} = \epsilon \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \quad (4.70)$$

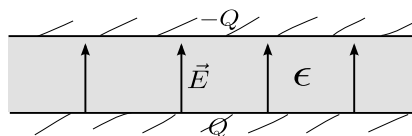
Dann gilt ein Coulomb-Gesetz für das Verschiebungsfeld:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint dV' \frac{\rho_f(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (4.71)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon} \iiint dV' \frac{\rho_f(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (4.72)$$

(beachte die Größe ϵ statt ϵ_0). \vec{E} ist gegenüber dem Vakuum um den Faktor $\epsilon_0/\epsilon = 1/\epsilon_r$ reduziert.

Anwendung: Kondensator mit Dielektrikum.



Das \vec{E} -Feld für gegebene Ladungen $\pm Q$ ist gegenüber dem luftgefüllten Kondensator um $1/\epsilon_r$ reduziert. Daher ist auch das Potential ϕ um $1/\epsilon_r$ reduziert und ebenso die Potentialdifferenz (Spannung) U . Wir schließen, dass die Kapazität

$$C = \frac{Q}{U} \quad (4.73)$$

um den Faktor ϵ_r *erhöht* ist:

$$C = \epsilon_r C_{\text{vac}} \quad (4.74)$$

(C_{vac} ist die Kapazität des leeren Kondensators). Dies ist der übliche Weg, die Kapazität von Kondensatoren zu erhöhen.

4.4.1 Die Laplace-Gleichung in Dielektrika

In einem homogenen, linearen und isotropen Dielektrikum gilt

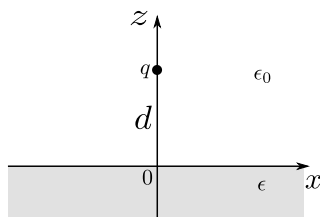
$$\rho_g = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\vec{\nabla} \cdot \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \frac{\epsilon_0 \chi_e \vec{D}}{\epsilon} = -\frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = -\frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \rho_f. \quad (4.75)$$

Die gebundene Ladungsdichte ist somit proportional zur freien Ladungsdichte. In fast allen praktisch relevanten Fällen ist die freie Ladungsdichte im Inneren von Dielektrika aber Null und daher gilt $\rho_f = 0$ und $\rho = \rho_f + \rho_g = 0$. Dann gilt die Laplace-Gleichung

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (4.76)$$

im Inneren von Dielektrika und Komplikationen kommen höchstens von den Anschlussbedingungen an den Grenzflächen zwischen Dielektrika (evtl. Luft oder Vakuum).

■ Beispiel: Punktladung und dielektrischer Halbraum.



Die Anschlussbedingungen lauten

$$D_z(x, y, 0^+) = D_z(x, y, 0^-), \quad (4.77)$$

$$E_x(x, y, 0^+) = E_x(x, y, 0^-), \quad (4.78)$$

$$E_y(x, y, 0^+) = E_y(x, y, 0^-), \quad (4.79)$$

$$\phi(x, y, 0^+) = \phi(x, y, 0^-). \quad (4.80)$$

Wir werden nur die erste und die vierte benötigen. Die erste impliziert

$$\epsilon_0 E_z(x, y, 0^+) = \epsilon E_z(x, y, 0^-). \quad (4.81)$$

Das Problem lässt sich mit Hilfe der Bildladungsmethode lösen, wobei wir immer aufpassen müssen, dass alle Bildladungen im unphysikalischen Bereich liegen. Jetzt interessiert uns aber das Feld sowohl im Vakuum ($z > 0$) als auch im Medium ($z < 0$). Wir machen eine Fallunterscheidung:

- Für $z > 0$ führen wir eine noch zu bestimmende Bildladung q' am Ort $-d\hat{z}$ ein (außerhalb des Bereichs $z > 0$!).
- Für $z < 0$ ersetzen wir die physikalische Ladung q bei $d\hat{z}$ durch die noch unbekannte Ladung q'' (außerhalb des Bereichs $z < 0$!).

Dann ist

$$\phi(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right] & \text{für } z > 0, \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q''}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} \right] & \text{für } z < 0. \end{cases} \quad (4.82)$$

Im Limes $z \rightarrow 0$ müssen beide Ausdrücke wegen der Stetigkeit von ϕ identisch sein. Daraus folgt sofort

$$q + q' = q''. \quad (4.83)$$

Die Bedingung für E_z ergibt

$$\frac{\epsilon_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} (-d) + \frac{q'}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} d \right] = \frac{\epsilon}{4\pi\epsilon_0} \frac{q''}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} (-d) \quad (4.84)$$

$$\Rightarrow -q + q' = -\epsilon_r q'' = -\epsilon_r (q + q') \quad (4.85)$$

$$\Rightarrow (1 + \epsilon_r) q' = (1 - \epsilon_r) q \quad (4.86)$$

$$\Rightarrow q' = \frac{1 - \epsilon_r}{1 + \epsilon_r} q = -\frac{\chi_e}{\chi_e + 2} q, \quad (4.87)$$

sowie

$$q'' = q - \frac{\chi_e}{\chi_e + 2} q = \frac{2}{\chi_e + 2} q. \quad (4.88)$$

Der Ansatz ist also erfolgreich, d. h. die Anschlussbedingungen lassen sich alle erfüllen (für \vec{E}_t wäre das noch zu prüfen). Wir könnten nun $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$, \vec{D} , \vec{P} und σ_g sofort ausrechnen.

4.4.2 Feldenergie in Dielektrika

Da ein Dielektrikum die Kapazität eines Kondensators ändert, erwarten wir, dass es auch die im Feld gespeicherte Energie $W = \frac{1}{2} CU^2$ ändert. Um allgemein die Feldenergie zu bestimmen, stellen wir uns vor, ein *freies* Ladungselement ρ_f aus dem Unendlichen heran zu bringen, wofür wir gegen das Feld der schon vorhandenen Ladungen die Arbeit

$$\Delta W = \iiint dV \Delta\rho_f(\vec{r}) \phi(\vec{r}) \quad (4.89)$$

leisten müssen. Es ist

$$\Delta\rho_f = \vec{\nabla} \cdot \Delta\vec{D} \quad (4.90)$$

mit der Änderung $\Delta\vec{D}$ des Verschiebungsfeldes aufgrund von $\Delta\rho_f$. Daher folgt

$$\Delta W = \iiint dV (\vec{\nabla} \cdot \Delta\vec{D}) \phi \stackrel{\text{partiell}}{=} \underbrace{\iint d\vec{s} \cdot \Delta\vec{D} \phi}_0 - \iiint dV \Delta\vec{D} \cdot \vec{\nabla} \phi + \iiint dV \Delta\vec{D} \cdot \vec{E}. \quad (4.91)$$

Dies gilt für jedes Dielektrikum. Nun nehmen wir an, dass es *linear* ist: $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$. Dann folgt für infinitesimales $\Delta\vec{D}$:

$$\Delta\vec{D} \cdot \vec{E} = \epsilon \Delta\vec{E} \cdot \vec{E} = \frac{\epsilon}{2} \Delta(\vec{E} \cdot \vec{E}) = \frac{1}{2} \Delta(\vec{D} \cdot \vec{E}) \quad (4.92)$$

$$\Rightarrow \Delta W = \frac{1}{2} \iiint dV \Delta(\vec{D} \cdot \vec{E}) = \Delta \left(\frac{1}{2} \iiint dV \vec{D} \cdot \vec{E} \right). \quad (4.93)$$

Die Gesamtenergie nach dem Heranbringen aller freien Ladungen ist also

$$W = \frac{1}{2} \iiint dV \vec{D} \cdot \vec{E} \quad (4.94)$$

und die Energiedichte ist

$$w = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}. \quad (4.95)$$

Es stellt sich die Frage, wie diese Beziehungen und der oben hergeleitete Zusammenhang

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint dV E^2 \quad (4.96)$$

zugleich korrekt sein können. Die Antwort ist, dass die beiden Ausdrücke (4.94) und (4.96) die Energie für unterschiedliche Situationen wiedergeben. Gleichung (4.94) gilt, wenn ein polarisierbares Medium (ein Dielektrikum) schon vorhanden ist und freie Ladungen herangeführt werden. Gleichung (4.96) betrifft dagegen den Fall, dass *alle* Ladungen, auch die Kerne und Elektronen, die das Medium aufbauen, herangeführt werden. Oder kurz: Gleichung (4.94) gibt die zum Aufladen eines Kondensators nötige Energie, Gleichung (4.96) die Energie, die erforderlich ist, den (geladenen) Kondensator zu bauen.

Kapitel 5

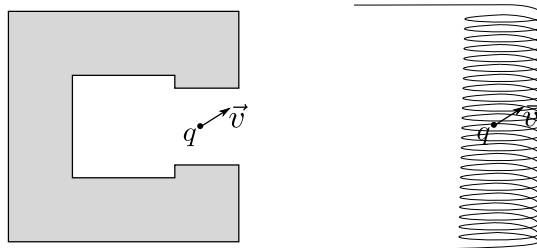
Mikroskopische Magnetostatik

Magnetische Phänomene sind zumindest seit der Antike bekannt. Plato und Aristoteles erwähnen Permanentmagnete. Es handelte sich um natürlich vorkommende „Magnetsteine“ aus Magnetit (Fe_3O_4). Das Erdmagnetfeld wurde offenbar in China entdeckt und beweglich aufgehängte Permanentmagnete wurden dort spätestens um 1040 u. Z. als Kompass verwendet, möglicherweise aber schon viel früher. Dieses Kapitel beschäftigt sich mit dem Konzept des *magnetischen Feldes* sowie mit dessen Ursachen und Konsequenzen. Wir beschränken uns hier auf zeitunabhängige Magnetfelder, dies definiert das Gebiet der *Magnetostatik*. Zunächst betrachten wir die Konsequenzen des Feldes.

5.1 Die Lorentz-Kraft

Wir führen das Magnetfeld hier empirisch ein. Man kann seine Existenz und Eigenschaften alternativ auch aus unserer Kenntnis des elektrischen Feldes und der Forderung der Lorentz-Invarianz ableiten. Experimente zeigen, dass auf ein Teilchen mit der Ladung q , das sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} zwischen den Polen eines Permanentmagneten oder in einer langen Spule bewegt, eine Kraft \vec{F} wirkt, die folgende Eigenschaften hat:

- die Kraft ist proportional zur Geschwindigkeit, $F \sim v$,
- sie steht senkrecht auf der Geschwindigkeit, $\vec{F} \perp \vec{v}$, also $\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$,
- sie ist proportional zur Ladung, $F \sim q$,
- es existiert eine von der Geschwindigkeit und Ladung des Teilchens unabhängige Richtung \hat{B} , so dass die Kraft \vec{F} für alle Geschwindigkeiten und Ladungen senkrecht auf \hat{B} steht: $\vec{F} \cdot \hat{B} = 0 \forall \vec{v}, q$. Außerdem bilden \vec{v} , \hat{B} und \vec{F} ein Rechtssystem (Linkssystem) für $q > 0$ ($q < 0$).
- Die Kraft ist proportional zum Sinus des von \vec{v} und \hat{B} eingeschlossenen Winkels, $F \sim \sin \varphi(\vec{v}, \hat{B})$.



Aus diesen Beobachtungen können wir schließen, dass eine Proportionalitätskonstante $B > 0$ existiert, so dass gilt

$$\vec{F} = B q \vec{v} \times \hat{B}. \quad (5.1)$$

Wir führen $\vec{B} := B\hat{B}$ ein und erhalten die *Lorentz-Kraft*, genauer ihren magnetischen Anteil,

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}. \quad (5.2)$$

Die gesamte Lorentz-Kraft beinhaltet auch den elektrischen Anteil $q\vec{E}$:

$$\vec{F} = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B}. \quad (5.3)$$

Man findet i. A. an verschiedenen Orten verschiedene \vec{B} , also ist $\vec{B}(\vec{r})$ ein *Feld*. Wir nennen es die *magnetische Induktion* oder *magnetische Flussdichte*. Es repräsentiert das magnetische Feld, aber leider ist der Begriff „Magnetfeld“ aus historischen Gründen für eine andere Größe reserviert, nämlich i. W. für das magnetische Analogon des elektrischen Verschiebungsfeldes, wie wir im nächsten Kapitel diskutieren werden.

Wir hatten in Abschnitt 2.1.4 gesehen, dass das Vektorprodukt zweier Vektoren ein *Pseudovektor* ist. Zur Erinnerung: Vektoren ändern unter Inversion des Raumes ihr Vorzeichen, Pseudovektoren dagegen nicht. Wenn nun die Induktion \vec{B} wie die Geschwindigkeit \vec{v} ein Vektor wäre, so müsste die Kraft ein Pseudovektor sein. Das widerspricht aber dem Newtonschen Gesetz $\vec{F} = m\vec{a}$ und der Tatsache, dass die Beschleunigung ein Vektor ist. Daher müssen wir folgern, dass die Induktion ein Pseudovektor ist.

Die magnetische Lorentz-Kraft ist offensichtlich nicht konservativ, da sie von der Geschwindigkeit abhängt – ein Kraftfeld \vec{F} ist konservativ, wenn \vec{F} nur von \vec{r} abhängt und $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ gilt. Wir können aber die Arbeit ausrechnen, die eine sich im \vec{B} -Feld bewegende Ladung verrichtet. Während des Zeitintervalls dt bewegt sich die Ladung um

$$d\vec{r} = \vec{v} dt. \quad (5.4)$$

Dabei verrichtet sie die Arbeit

$$dW_{\text{mag}} = \vec{F}_{\text{mag}} \cdot d\vec{r} = q \underbrace{(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}}_0 dt = 0. \quad (5.5)$$

Also gilt für eine *beliebige* Bewegung der Ladung $W_{\text{mag}} = 0$, d. h. die magnetische Kraft verrichtet keine Arbeit. (Wir sehen, dass die magnetische Lorentz-Kraft eine ganz spezielle Kraft ist: Obwohl sie nicht konservativ ist, ist die Arbeit wie bei einer konservativen Kraft wegunabhängig, nämlich immer Null.) In einem rein magnetischen Kraftfeld ist somit die kinetische Energie $\frac{1}{2}mv^2$ erhalten und daher ebenso der Betrag $v = |\vec{v}|$ der Geschwindigkeit.

Wir betrachten die Bewegung für zwei einfache Fälle. Der Einfachheit halber sei jeweils $q > 0$.

- (a) Homogenes \vec{B} -Feld, verschwindendes \vec{E} -Feld. Da $\vec{F} \perp \vec{B}$, ist die Bewegung in Feldrichtung kräftefrei und daher unbeschleunigt. Wir beschränken uns auf den Fall $\vec{v} \perp \vec{B}$. Das mechanische Problem wird durch die Newton-Gleichung

$$m\dot{\vec{v}} = q \vec{v} \times \vec{B} \quad (5.6)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 \perp \vec{B} \quad (5.7)$$

ausgedrückt. Wir wählen kartesische Koordinaten mit $\hat{z} = \hat{B}$ und $\hat{x} = \hat{v}_0$. Es folgt

$$m\dot{v}_x = qv_y B, \quad (5.8)$$

$$m\dot{v}_y = -qv_x B \quad (5.9)$$

$$\Rightarrow m\ddot{v}_x = q\dot{v}_y B = -\frac{q^2 B^2}{m} v_x \quad (5.10)$$

$$\Rightarrow \ddot{v}_x = -\frac{q^2 B^2}{m^2} v_x \quad (5.11)$$

mit der Anfangsbedingung $v_x(0) = v_0$. Die Lösung lautet

$$v_x = v_0 \cos \omega_c t \quad (5.12)$$

mit der *Zyklotronfrequenz*

$$\omega_c := \frac{qB}{m}. \quad (5.13)$$

Es folgt

$$v_y = \frac{m}{qB} \dot{v}_x = \frac{\dot{v}_x}{\omega_c} = -v_0 \sin \omega_c t. \quad (5.14)$$

Die Trajektorie ist, ausgehend von einem Anfangsort $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$,

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t dt' \vec{v}(t') = \vec{r}_0 + \frac{v_0}{\omega_c} \left(\begin{array}{c} \sin \omega_c t' \\ \cos \omega_c t' \\ 0 \end{array} \right) \Big|_0^t = \vec{r}_0 + \frac{v_0}{\omega_c} \left(\begin{array}{c} \sin \omega_c t \\ \cos \omega_c t - 1 \\ 0 \end{array} \right) = \vec{r}_0 - \frac{v_0}{\omega_c} \hat{y} + \frac{v_0}{\omega_c} \left(\begin{array}{c} \sin \omega_c t \\ \cos \omega_c t \\ 0 \end{array} \right). \quad (5.15)$$

Das ist eine *Kreisbahn* (genannt Zyklotronbahn) mit dem Radius

$$R_c = \frac{v_0}{\omega_c} = \frac{mv_0}{qB}. \quad (5.16)$$

Diesen Zusammenhang kann man verwenden, um das Verhältnis e/m für Elektronen zu messen. Das ist ein recht einfacher Praktikumsversuch. Die Messung der Elementarladung e oder der Elektronenmasse m einzeln ist sehr viel schwieriger. Es ist bemerkenswert, dass mit einer einfachen Messung die spezifische Ladung e/m von Elementarteilchen bestimmt werden kann.

- (b) Homogene \vec{E} - und \vec{B} -Felder, orthogonal zueinander. Weiter sei $\vec{v}(0) = 0$ und o. B. d. A. $\vec{r}(0) = 0$. Wähle $\hat{x} = \hat{B}$ und $\hat{z} = \hat{E}$. Es ist

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (5.17)$$

also

$$F_x = 0, \quad (5.18)$$

$$F_y = qv_z B, \quad (5.19)$$

$$F_z = qE - qv_y B. \quad (5.20)$$

Wegen $F_x = 0$ und $v_x(0) = 0$ liegt die Trajektorie in der yz -Ebene. Die Newton-Gleichung liefert

$$m\dot{v}_y = qv_z B, \quad (5.21)$$

$$m\dot{v}_z = qE - qv_y B \quad (5.22)$$

Wir geben hier nur das Ergebnis an:

$$v_y(t) = \frac{E}{B} (1 - \cos \omega_c t), \quad (5.23)$$

$$v_z(t) = \frac{E}{B} \sin \omega_c t, \quad (5.24)$$

was man durch Einsetzen überprüfen kann. Die Bewegung ist die Überlagerung einer gleichförmigen Bewegung in Richtung $\vec{E} \times \vec{B}$ mit der *Driftgeschwindigkeit*

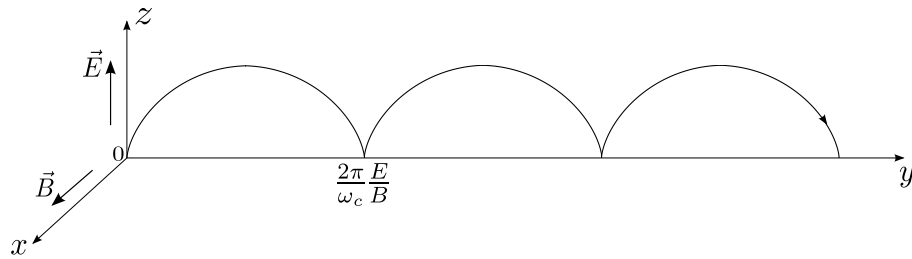
$$v_{\text{Drift}} = \frac{E}{B} \quad (5.25)$$

und einer Kreisbewegung mit der Zyklotronfrequenz ω_c . Durch Integration erhalten wir die Trajektorie (beachte $\vec{r}(0) = 0$)

$$r_y(t) = \frac{E}{B} \left(t - \frac{1}{\omega_c} \sin \omega_c t \right), \quad (5.26)$$

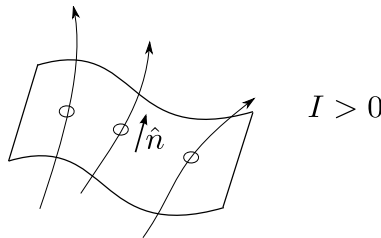
$$r_z(t) = -\frac{E}{B} \frac{1}{\omega_c} (\cos \omega_c t - 1). \quad (5.27)$$

Die Bahnkurve ist eine *Zykloide*. Das Teilchen kommt zu den Zeiten $t = 2\pi n/\omega_c$, $n = 0, 1, 2, \dots$ zur Ruhe.



5.2 Ströme

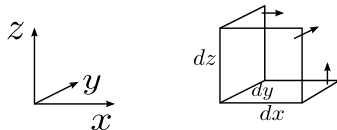
Die (elektrische) *Stromstärke* I ist definiert als die Ladung pro Zeitintervall, die durch eine orientierte Fläche hindurchtritt. Wir müssen festlegen, in welcher Richtung wir einen Strom aus positiven Ladungen als positiv zählen wollen. Dies ist die *Referenzstromrichtung*. Sie entspricht der Wahl einer der beiden möglichen Orientierungen der Fläche.



Wir können schreiben

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (5.28)$$

Wir definieren auch die (elektrische) *Stromdichte* als transportierte Ladung dq pro Zeitintervall dt und Fläche dA . Da es im dreidimensionalen Raum drei linear unabhängige Orientierungen von Flächenelementen $d\vec{A}$ gibt, liegt es nahe, die Stromdichte als *Vektor* zu definieren.



Sei

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)_\alpha \quad \text{für } \alpha = x, y, z \quad (5.29)$$

die Ladung pro Zeit, die durch das zu $\hat{\alpha} = \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ senkrechte Flächenelement tritt. Dann schreiben wir in kartesischen Koordinaten

$$j_x = \left(\frac{dq}{dt}\right)_x \frac{1}{dy dz}, \quad (5.30)$$

$$j_y = \left(\frac{dq}{dt}\right)_y \frac{1}{dz dx}, \quad (5.31)$$

$$j_z = \left(\frac{dq}{dt}\right)_z \frac{1}{dx dy}. \quad (5.32)$$

Für ein beliebig orientiertes Flächenelement $d\vec{A} = dA \hat{n}$ ist die Normalkomponente von \vec{j} analog

$$j_n \equiv \hat{n} \cdot \vec{j} = \left(\frac{dq}{dt}\right)_n \frac{1}{dA}. \quad (5.33)$$

Die Stromdichte ist i. A. ortsabhängig und daher ein Vektorfeld. Ihr Fluss durch eine Fläche \mathcal{S} ist die Stromstärke:

$$\iint_{\mathcal{S}} d\vec{A} \cdot \vec{j} = \iint_{\mathcal{S}} dA j_n = \iint_{\mathcal{S}} dA \left(\frac{dq}{dt} \right)_n \frac{1}{dA} = \iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{dq}{dt} \right)_n \equiv \frac{dQ}{dt} = I. \quad (5.34)$$

Die Stromstärke ist offensichtlich ein Skalar.

Wird eine Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ von Teilchen gebildet, die sich mit der evtl. ortsabhängigen Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r})$ bewegen, so erzeugen sie die Stromdichte

$$\vec{j} = \rho \vec{v}. \quad (5.35)$$

Gibt es mehrere Arten von Teilchen, z. B. Elektronen und Löcher in einem Halbleiter oder Anionen und Kationen in einem Elektrolyt, so ist die gesamte Stromdichte

$$\vec{j} = \sum_n \rho_n \vec{v}_n, \quad (5.36)$$

wobei n die Teilchenart abzählt. In einem stromdurchflossenen Metall bewegen sich nur die Elektronen, aber nicht die Ionenrümpfe. Die Ladungen gleichen sich aber aus, das Metall ist (evtl. bis auf relativ kleine Oberflächenladungen) elektrisch neutral. Es gilt also

$$\rho = \rho_e + \rho_i = 0, \quad (5.37)$$

aber

$$\vec{j} = \rho_e \vec{v}_e + \rho_i \underbrace{\vec{v}_i}_0 = \rho_e \vec{v}_e \neq 0. \quad (5.38)$$

Beachte, dass ein sich insgesamt bewegendes elektrisch neutraler Leiter *keinen* Strom repräsentiert: Es ist

$$\vec{j} = \rho_e \vec{v} + \rho_i \vec{v} = (\rho_e - \rho_e) \vec{v} = 0. \quad (5.39)$$

Ist die Ladungsdichte auf eine Fläche oder eine Kurve beschränkt, können wir in Analogie zur Flächen- und Linienladungsdichte entsprechende Stromdichten definieren:

- die *Linienstromdichte* $\vec{I} = \lambda \vec{v}$, diese ist ein Vektor tangential zur Kurve, auf die die Ladung beschränkt ist („Draht“); es gilt $\vec{I} = I \hat{t}$, wobei \hat{t} der Tangenteneinheitsvektor in der Referenzstromrichtung und I die Stromstärke ist,
- die *Flächenstromdichte* $\vec{K} = \sigma \vec{v}$, diese ist ein zur Fläche tangentialer Vektor.

In der *Magnetostatik* nehmen wir an, dass die Stromdichten \vec{j} , \vec{K} , \vec{I} und die Ladungsdichten ρ , σ , λ zeitunabhängig sind. Das bedeutet nicht, dass die Ladungen ruhen, sondern nur, dass sie sich nicht anhäufen.

Wir können jetzt die Kraft auf einen stromdurchflossenen Draht ausrechnen: Die Lorentz-Kraft auf ein Element $d\vec{l}$ des Drahtes mit der Ladung dq ist

$$d\vec{F} = dq \vec{v} \times \vec{B} = \lambda dl \vec{v} \times \vec{B} = dl \vec{I} \times \vec{B} = I d\vec{l} \times \vec{B}, \quad (5.40)$$

wenn wir $d\vec{l}$ in der Richtung der Referenzstromrichtung wählen. Die Gesamtkraft auf den Draht ist dann

$$\vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B}. \quad (5.41)$$

Fließt derselbe Strom I durch den gesamten Draht, so folgt

$$\vec{F} = I \int d\vec{l} \times \vec{B}. \quad (5.42)$$

Wir kommen darauf in Abschnitt 5.3 zurück.

Wir können auch das Drehmoment (bzgl. des Koordinatenursprungs) auf einen Draht ausrechnen:

$$d\vec{M} = \vec{r} \times d\vec{F} = I \vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B}) \quad (5.43)$$

$$\Rightarrow \vec{M} = \int I \vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B}) = I \int \vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B}) = I \int d\vec{l} (\vec{r} \cdot \vec{B}) - I \int (d\vec{l} \cdot \vec{r}) \vec{B}. \quad (5.44)$$

5.2.1 Die Kontinuitätsgleichung

Ein zentrales Postulat der Elektrodynamik ist die lokale Erhaltung der Ladung. *Lokale* Erhaltung bedeutet, dass an keinem Punkt Ladung erzeugt oder vernichtet wird. *Globale* Erhaltung wäre die viel schwächere Forderung, dass die *Gesamtladung* zeitunabhängig sein soll; dies würde zulassen, dass Ladung an einem Ort verschwindet und gleichzeitig an einem anderen auftaucht. Die Struktur der Elektrodynamik (als „Eichtheorie“) beruht wesentlich auf der lokalen Ladungserhaltung.

Ist die Ladung lokal erhalten, so muss für *jedes* Volumen \mathcal{V} gelten, dass die Änderung der enthaltenen Ladung Q nur durch einen Strom durch die Oberfläche $\partial\mathcal{V}$ erfolgen kann. Der Strom durch die Oberfläche ist

$$I = \oint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{A} \cdot \vec{j}. \quad (5.45)$$

Wählen wir die Referenzstromrichtung nach außen, so muss für die Änderung der eingeschlossenen Ladung Q gelten

$$dQ = -I dt \quad (5.46)$$

(die Ladung nimmt ab, wenn Strom herausfließt). Es folgt

$$\frac{dQ}{dt} = -I \quad (5.47)$$

$$\Rightarrow \iiint_{\mathcal{V}} dV \frac{\partial\rho}{\partial t} = - \oint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{A} \cdot \vec{j}. \quad (5.48)$$

Mit dem Gaußschen Satz folgt

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV \frac{\partial\rho}{\partial t} = - \iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{\nabla} \cdot \vec{j}. \quad (5.49)$$

Da dies für jedes \mathcal{V} gilt, folgt

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j} \quad (5.50)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (5.51)$$

Dies ist die *Kontinuitätsgleichung* für die elektrische Ladung. Sie ist eine kompakte Formulierung der lokalen Ladungserhaltung. Speziell in der Magnetostatik fordern wir $\partial\rho/\partial t = 0$, woraus folgt $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$. Die Stromdichte ist in diesem Fall quellenfrei.

5.3 Das Biot-Savart-Gesetz

Eine sich bewegende Punktladung q mit der Trajektorie $\vec{r} = \vec{r}_q(t)$ hat die Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}, t) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_q(t)) \quad (5.52)$$

und die Stromdichte

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho \vec{v} = q \frac{d\vec{r}_q}{dt} \delta(\vec{r} - \vec{r}_q(t)). \quad (5.53)$$

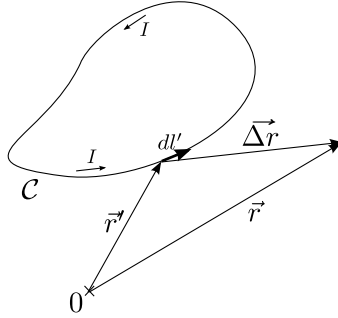
Diese sind offensichtlich nicht stationär. Dieser Fall kann daher nicht im Rahmen der Magnetostatik beschrieben werden. Der einfachste der Magnetostatik zugängliche Fall ist ein stationärer Strom entlang eines Drahtes (Linienstrom).

Beachte, dass das Induktionsfeld \vec{B} unter Ausnutzung der Lorentzkraft gemessen werden kann. (Typische Magnetfeldresonanzen beruhen auf dem Hall-Effekt, der in der Tat die Lorentz-Kraft auf Elektronen in Metallen ausnutzt.) Für eine gegebene Linienstromdichte \vec{I} findet man experimentell das Induktionsfeld

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} dl' \frac{\vec{I} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} dl' \frac{\vec{I} \times \vec{\Delta r}}{(\Delta r)^3} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} dl' \frac{\vec{I} \times \widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^2}. \quad (5.54)$$

Ist der Strom entlang des gesamten Drahtes gleich groß, so können wir I aus dem Integral herausziehen:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_C \frac{d\vec{l}' \times \widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^2}. \quad (5.55)$$



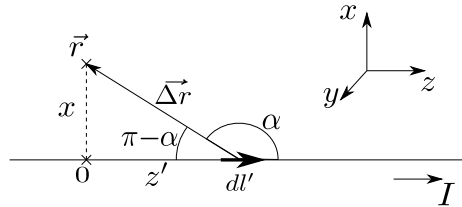
Alle diese Formen nennt man das *Biot-Savartsche* (oder Biot-Savart-) *Gesetz*. μ_0 ist die *Permeabilität des Vakuums*. In SI-Einheiten ist $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ (exakt). Wie ϵ_0 ist μ_0 einfach ein Umrechnungsfaktor, der sich aus der Wahl der Einheiten ergibt. Der Vergleich mit dem Coulomb-Gesetz für eine Linienladung,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C dl' \frac{\lambda(\vec{r}') \widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^2}, \quad (5.56)$$

zeigt, dass das Biot-Savart-Gesetz das magnetische Analogon des Coulomb-Gesetzes ist.

Am Biot-Savart-Gesetz erkennen wir auch, dass das \vec{B} -Feld ein *Pseudovektor* (axialer Vektor) ist: In Gl. (5.55) ist die Stromstärke I ein Skalar und $d\vec{l}'$ sowie $\widehat{\Delta r}$ sind Vektoren. Unter Raumspiegelung (Inversion) ändert sich I nicht, während $d\vec{l}'$ und $\widehat{\Delta r}$ das Vorzeichen wechseln. Das \vec{B} -Feld ändert sein Vorzeichen unter Inversion also *nicht*, was es als Pseudovektorfeld kennzeichnet. Das ist konsistent mit der magnetischen Lorentz-Kraft $\vec{F}_{\text{mag}} = q \vec{v} \times \vec{B}$: \vec{v} ist ein Vektor, \vec{B} ist ein Pseudovektor, daher ist die Kraft \vec{F}_{mag} ein Vektor.

■ Beispiel 1: \vec{B} -Feld eines langen, geraden, stromführenden Drahtes:



Das Linienelement $d\vec{l}'$ bei \vec{r}' erzeugt am Ort $\vec{r} = x\hat{x}$ das Feld

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l}' \times \widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dz' \sin \alpha \hat{y}}{x^2 + (z')^2}. \quad (5.57)$$

Es ist

$$\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (z')^2}} \quad (5.58)$$

$$\Rightarrow d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{x}{(x^2 + (z')^2)^{3/2}} \hat{y} dz'. \quad (5.59)$$

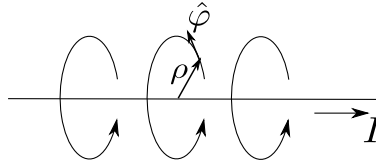
Das gesamte \vec{B} -Feld ist also

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{x}{(x^2 + (z')^2)^{3/2}} \hat{y} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\hat{y}}{x} \frac{z'}{\sqrt{x^2 + (z')^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{\hat{y}}{x} \underbrace{\lim_{z' \rightarrow \infty} \frac{z'}{\sqrt{x^2 + (z')^2}}}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{x} \hat{y}. \quad (5.60)$$

Unter Ausnutzung der Rotationssymmetrie um die z -Achse erhalten wir allgemein, in Zylinderkoordinaten ρ , φ , z ,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \hat{\varphi}. \quad (5.61)$$

Insbesondere ist das \vec{B} -Feld *tangential* an Kreisen mit ihrem Mittelpunkt auf dem Draht. Die Richtung von \vec{B} gehorcht der Rechte-Hand-Regel.

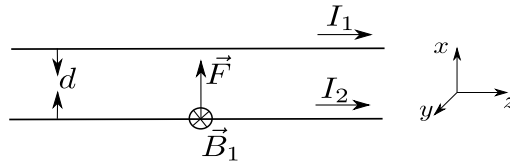


Wir betrachten noch das Verhalten dieses Gesetzes unter Inversion des Raumes. Unter Inversion kehrt sich der Strom um: $I \rightarrow -I$. Da \vec{B} ein Pseudovektor ist, könnte man annehmen, dass \vec{B} unverändert bleibt. Das kann aber nicht stimmen – wegen der Linearität der Gleichung muss \vec{B} mit -1 multipliziert werden, wenn I mit -1 multipliziert wird. Tatsächlich kehrt sich das Feld $\vec{B}(\vec{r})$ lokal um, denn unter Inversion gilt

$$\vec{r} \rightarrow -\vec{r} \Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) \rightarrow +\vec{B}(-\vec{r}) = -\vec{B}(\vec{r}), \quad (5.62)$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass \vec{B} eine ungerade Funktion von \vec{r} ist.

Mit dem Ergebnis für die Induktion können wir die Kraft zwischen zwei parallelen Drähten mit den Strömen I_1 und I_2 bestimmen.



An einem beliebigen Punkt auf Draht 2 beträgt das \vec{B} -Feld aufgrund von Draht 1,

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} (-\hat{y}). \quad (5.63)$$

Die Kraft auf Draht 2 ist also, gemäß Gl. (5.42),

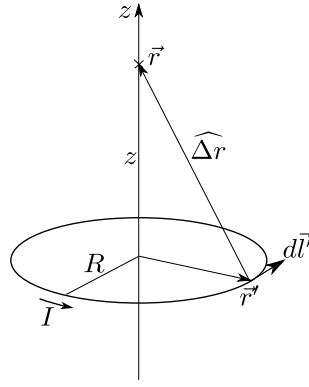
$$\vec{F}_{21} = I_2 \int d\vec{l} \times \vec{B}_1 = I_2 \int dz \hat{z} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} (-\hat{y}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} \hat{x} \int dz. \quad (5.64)$$

Das Integral ist die Länge des zweiten Drahtes und damit formal unendlich. Es ist sinnvoll, die Kraft pro Länge anzugeben:

$$\vec{f}_{21} := \frac{d\vec{F}_{21}}{dl} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} \hat{x}. \quad (5.65)$$

Beachte, dass die Kraft für in *dieselbe* Richtung fließende Ströme *anziehend* ist. Diese Kraft wird für die Definition der Einheit Ampère verwendet.

■ Beispiel 2: \vec{B} -Feld auf der Symmetrieachse einer kreisförmigen Leiterschleife.



Aus Symmetriegründen gilt auf der Achse $\vec{B}(z) = B_z(z) \hat{z}$. Das Biot-Savart-Gesetz ergibt

$$\begin{aligned}
 B_z(z) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \hat{z} \cdot \int_C \frac{d\vec{l}' \times \vec{\Delta r}}{(\Delta r)^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_C \frac{\hat{z} \cdot (d\vec{l}' \times \vec{\Delta r})}{(\Delta r)^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_C \frac{d\vec{l}' \cdot (\vec{\Delta r} \times \hat{z})}{(\Delta r)^3} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_C \frac{d\vec{l}' \cdot (\vec{r} \times \hat{z} - \vec{r}' \times \hat{z})}{(\Delta r)^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_C \frac{dl' R}{(R^2 + z^2)^{3/2}}, \tag{5.66}
 \end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $d\vec{l}'$, $-\vec{r}'$ und \hat{z} ein orthogonales Rechtssystem bilden. Es folgt

$$B_z(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}. \tag{5.67}$$

Wir werden später auf das \vec{B} -Feld einer Leiterschleife zurückkommen.

Die Verallgemeinerung des Biot-Savart-Gesetzes auf Flächen- und Volumenstromdichten ist naheliegend:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint ds' \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times \widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^2}, \tag{5.68}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times \widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^2}. \tag{5.69}$$

Der letztere Ausdruck enthält Flächen- und Linienströme als Spezialfälle, analog zum Coulomb-Gesetz.

5.4 Das Ampèresche Gesetz und das Vektorpotential

Mittels des Biot-Savartschen Gesetzes können wir die Rotation und die Divergenz von \vec{B} bestimmen. Ähnlich hatten wir oben die Rotation und die Divergenz des elektrischen Feldes mit Hilfe des Coulomb-Gesetzes ermittelt.

5.4.1 Das Ampèresche Gesetz

Zunächst finden wir

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \vec{\nabla} \times \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \left[\underbrace{\left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{j}(\vec{r}')}_0 - \left(\vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla} \right) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \underbrace{\vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}}_{4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}')}_0 \right]. \tag{5.70}
 \end{aligned}$$

Den zweiten Term betrachten wir gesondert:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \left(\vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla} \right) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\
 &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \sum_{i=1}^3 j_i(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = +\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \sum_i j_i(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial x'_i} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \sum_i \left[\frac{\partial}{\partial x'_i} j_i(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - \frac{\partial j_i(\vec{r}')}{\partial x'_i} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iint dx'_2 dx'_3 j_1(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \Big|_{x'_1=-\infty}^{x'_1=\infty} + \dots + \dots - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' (\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}')) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (5.71)
 \end{aligned}$$

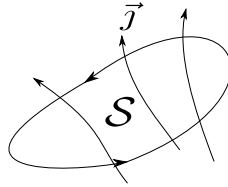
Die Oberflächenterme verschwinden unter der Annahme, dass keine Ströme ins Unendliche oder aus dem Unendlichen fließen. Der Volumenterm verschwindet in der Magnetostatik, da

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (5.72)$$

Damit verschwindet der gesamte zweite Term in Gl. (5.70) und wir erhalten

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \iiint dV' \vec{j}(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}). \quad (5.73)$$

Die *Wirbel* des \vec{B} -Feldes sind also in der Magnetostatik durch die Stromdichte gegeben. Dies ist das *Ampèresche Gesetz* in differentieller Form.



Wenn wir beide Seiten des Ampèreschen Gesetzes über eine berandete Fläche \mathcal{S} integrieren, erhalten wir

$$\iint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \iint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot \vec{j}. \quad (5.74)$$

Mit dem Stokesschen Satz folgt

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} d\vec{l} \cdot \vec{B} = \mu_0 \iint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot \vec{j}. \quad (5.75)$$

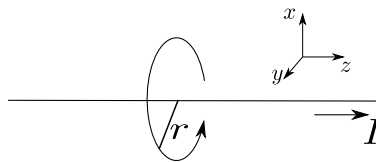
Die rechte Seite ist, bis auf den Faktor μ_0 , der Fluss von $\vec{j}(\vec{r})$ durch \mathcal{S} , also der elektrische *Strom* durch \mathcal{S} :

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} d\vec{l} \cdot \vec{B} = \mu_0 I_{\text{in}}. \quad (5.76)$$

Dies ist das Ampèresche Gesetz in Integralform. Die Referenzstromrichtung zur Festlegung des Vorzeichens von I_{in} gehorcht dabei der Rechte-Hand-Regel in Bezug auf die Richtung des Integrationsweges $\partial\mathcal{S}$.

Das Ampèresche Gesetz spielt offenbar in der Magnetostatik eine ähnliche Rolle wie das Gaußsche Gesetz in der Elektrostatik. Insbesondere können wir es verwenden, um \vec{B} für Situationen mit hoher Symmetrie einfach auszurechnen, ohne das Biot-Savart-Gesetz anwenden zu müssen.

■ Beispiel: \vec{B} für einen langen, geraden, stromführenden Draht.



Wir wählen eine „Ampèresche Schleife“ $\partial\mathcal{S}$ als Kreis mit dem Radius r , in einer Ebene senkrecht zum Draht und mit dem Mittelpunkt auf dem Draht. Es gilt

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} d\vec{l} \cdot \vec{B} = \mu_0 I. \quad (5.77)$$

Wegen der Rotationssymmetrie um die Drehachse ist $d\vec{l} \cdot \vec{B}$ konstant entlang $\partial\mathcal{S}$. Es ist

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} d\vec{l} \cdot \vec{B} = \int_0^{2\pi} d\varphi r \hat{\varphi} \cdot \vec{B} = r B_\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi r B_\varphi \quad (5.78)$$

in Zylinderkoordinaten. Es folgt für die Tangentialkomponente

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (5.79)$$

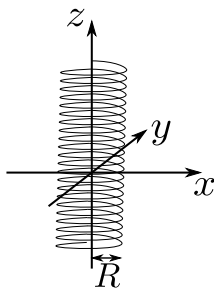
Wir müssen noch erklären, wieso die übrigen Komponenten B_z und B_ρ verschwinden. Wegen der Translations-symmetrie entlang z und der Rotationssymmetrie um die z -Achse müssen B_z und B_ρ unabhängig von z und φ sein. Dann folgt aus $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, was unten gezeigt wird, dass die radiale Komponente von \vec{B} verschwindet, dass also $B_\rho = 0$ gilt. Aus den Bedingungen für die Rotation und die Divergenz von \vec{B} folgt, wie man zeigen kann, dass B_z höchstens im gesamten Raum konstant sein kann. Aus der plausiblen Annahme, dass \vec{B} weit weg vom Draht verschwindet, folgt, dass nur $B_z \equiv 0$ gelten kann. Es folgt das schon bekannte Ergebnis

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \hat{\varphi}. \quad (5.80)$$

In Analogie zum Gaußschen Gesetz in der Elektrostatik ist es in der Magnetostatik empfehlenswert, das Ampèresche Gesetz zu verwenden, sofern die Symmetrie des Systems hoch genug ist. Beachte die Möglichkeit, die vorgegebenen Ströme zunächst in Beiträge hoher Symmetrie zu zerlegen (Superpositionsprinzip). Das Ampèresche Gesetz erfordert im Gegensatz zum Gaußschen die Betrachtung von geschlossenen Kurven anstelle von Flächen.

5.4.2 Die ideale Spule

Wir betrachten eine lange, eng gewickelte Spule mit $n = dN/dl$ Windungen pro Längeneinheit und dem Radius R , die von einem Strom I durchflossen wird. Wir wollen das \vec{B} -Feld innerhalb und außerhalb der Spule bestimmen.



Wegen $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ haben wir $B_\rho = 0$. Wählen wir eine Ampèresche Schleife als Kreis um die z -Achse, so finden wir analog zum letzten Beispiel

$$B_\varphi = 0 \quad \text{für } \rho < R \quad (\text{im Inneren}) \quad (5.81)$$

und

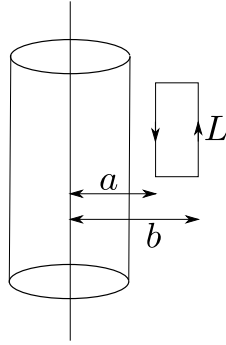
$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \quad \text{für } \rho > R \quad (\text{im Außenraum}). \quad (5.82)$$

Das ist einfach das vom Strom I erzeugte Feld, das man bei der idealisierten Betrachtung i. A. vernachlässigt. Dies ist äquivalent dazu, den Strom durch eine *rein tangentielle* Flächenstromdichte

$$\vec{K}(\vec{r}) = nI \hat{\varphi} \quad (5.83)$$

zu ersetzen. Damit bleibt nur noch die z -Komponente übrig:

1. Fall: Außerhalb der Spule ergibt eine rechteckige Ampèresche Schleife:



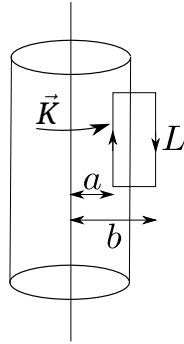
$$\oint d\vec{l} \cdot \vec{B} = B_z(b)L - B_z(a)L = \mu_0 I_{\text{in}} = 0 \quad (5.84)$$

$$\Rightarrow B_z(b) = B_z(a). \quad (5.85)$$

Da jedoch die Spule für große Abstände ρ wie ein dünner Draht erscheint, gilt $\lim_{\rho \rightarrow \infty} B_z(\rho) = 0$ und daher

$$B_z(\rho) = 0 \quad \forall \rho > R. \quad (5.86)$$

2. Fall: Innerhalb der Spule finden wir das Feld mit Hilfe einer Schleife, die die Drähte umschließt (beachte die Richtung):



$$\oint d\vec{l} \cdot \vec{B} = B_z(a)L - \underbrace{B_z(b)L}_0 = \mu_0 I_{\text{in}} = \mu_0 nLI \quad (5.87)$$

$$\Rightarrow B_z(a) = \mu_0 nI. \quad (5.88)$$

Damit finden wir für die ideale Spule

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \mu_0 nI \hat{z} & \text{für } \rho < R, \\ 0 & \text{für } \rho > R. \end{cases} \quad (5.89)$$

Das \vec{B} -Feld innerhalb der Spule ist also *homogen*.

5.4.3 Divergenz des Induktionsfeldes und Vektorpotential

Neben der Rotation können wir auch die Divergenz von \vec{B} aus dem Biot-Savart-Gesetz ermitteln:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{j}(\vec{r}'))}_0 - \vec{j}(\vec{r}') \cdot \left(\vec{\nabla} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \right]. \quad (5.90)$$

Hier verschwindet $\vec{\nabla} \times \vec{j}(\vec{r}')$, da die Ableitung nach \vec{r} erfolgt, wovon \vec{j} gar nicht abhängt. Weiter ist

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (5.91)$$

proportional zum statischen \vec{E} -Feld einer Punktladung bei \vec{r}' und damit wirbelfrei. Also verschwindet auch der zweite Term unter dem Integral und wir erhalten

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (5.92)$$

Das \vec{B} -Feld ist also quellenfrei. Das bedeutet insbesondere, dass die Feldlinien von \vec{B} nicht enden können. Sie sind also immer *geschlossene Kurven* oder reichen, für idealisierte Modellsysteme wie die ideale Spule, ins Unendliche. Man kann die Beziehung $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ *Gaußsches Gesetz für die magnetische Induktion* nennen. Der Vergleich mit dem Gaußschen Gesetz für \vec{E} ,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (5.93)$$

legt nahe, das Gesetz für \vec{B} als Abwesenheit von *magnetischen Ladungen (Monopolen)* zu interpretieren:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mu_0 \rho_m = 0. \quad (5.94)$$

In der Tat wurden bisher keine magnetischen Monopole als fundamentale Teilchen entdeckt. Ihre Existenz wäre durchaus willkommen, denn Dirac hat gezeigt, dass man dann die Quantisierung der elektrischen Ladung leicht verstehen könnte. Es ist auch interessant, dass magnetische Monopole zwar wohl nicht als Elementarteilchen vorkommen, wohl aber als Anregungen in bestimmten magnetischen Festkörpern, sogenanntem *Spin-Eis*.

In Integralform lautet das Gaußsche Gesetz für die Induktion

$$\oiint_{\partial V} d\vec{s} \cdot \vec{B} = 0. \quad (5.95)$$

Also verschwindet der *magnetische Fluss* durch jede geschlossene Oberfläche.

Wie in Abschnitt 2.3.2 besprochen, folgt aus $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, dass zu \vec{B} ein *Vektorpotential* \vec{A} existiert, so dass gilt

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (5.96)$$

Dieses neue Feld \vec{A} nennt man einfach *das* Vektorpotential. Wir hatten auch schon gesehen, dass wir einen beliebigen Gradienten zu \vec{A} addieren können, ohne das physikalisch relevante Feld \vec{B} zu ändern:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla}\chi) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\chi}_{=0} = \vec{B}. \quad (5.97)$$

Diese Freiheit bei der Wahl von \vec{A} ist eine *Eichinvarianz*, auf wir später zurück kommen werden. Wir setzen das Vektorpotential in die eben hergeleiteten Gesetze ein:

1. $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$ ist nun automatisch erfüllt.
2. $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$, also wird das Ampèresche Gesetz

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad (5.98)$$

oder äquivalent

$$\nabla^2 \vec{A} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\mu_0 \vec{j}. \quad (5.99)$$

Vergleiche die Poisson-Gleichung für das skalare Potential:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (5.100)$$

Die Eichinvarianz können wir dazu verwenden, die Gleichung für \vec{A} zu vereinfachen. Wir können nämlich *fordern*, dass

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (5.101)$$

gelten soll. Das ist eine Bestimmungsgleichung für das „Umeichfeld“ χ : Sei

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + \vec{\nabla}\chi. \quad (5.102)$$

Aus $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ folgt

$$\nabla^2 \chi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0. \quad (5.103)$$

Diese Poisson-Gleichung für χ müssen wir lösen, um für gegebenes Vektorpotential \vec{A}_0 ein anderes zu finden, das $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ erfüllt. Dies ist immer möglich. Für freie Randbedingungen im Unendlichen ($\vec{A}, \vec{A}_0 \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$) ist die Lösung nämlich explizit

$$\chi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint dV' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}_0(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (5.104)$$

Die Bedingung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (5.105)$$

heißt *Coulomb-Eichung*. Nur unter Festlegung auf die Coulomb-Eichung gilt

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}. \quad (5.106)$$

Das ist nun ein Satz von drei Poisson-Gleichungen für die Komponenten von \vec{A} , die analog zur elektrischen Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.107)$$

sind. Falls \vec{j} für $r \rightarrow \infty$ schnell genug abfällt, insbesondere wenn die Ströme auf einen endlichen Bereich beschränkt sind, können wir die Poisson-Gleichung für \vec{A} analog zu der für ϕ lösen:

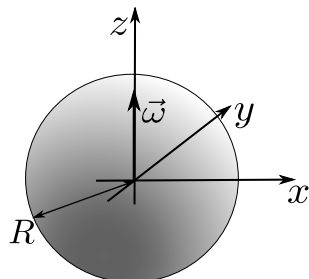
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (5.108)$$

Für Linien- und Flächenstromdichten erhalten wir natürlich

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dl' \frac{\vec{I}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (5.109)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint ds' \frac{\vec{K}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (5.110)$$

■ Beispiel: Vektorpotential für rotierende, gleichförmig geladene dünne Kugelschale.



Wir wählen $\hat{z} \parallel \vec{\omega}$. Die Flächenstromdichte ist

$$\vec{K}(\vec{r}') = \sigma \vec{v}(\vec{r}') = \sigma \vec{\omega} \times \vec{r}', \quad (5.111)$$

daraus folgt

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint ds' \frac{\sigma \vec{\omega} \times \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sigma \vec{\omega} \times \iint ds' \frac{\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (5.112)$$

Das Integral ist

$$\iint ds' \frac{\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = R \iint ds' \frac{\hat{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = R \iint \frac{d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (5.113)$$

Hier benötigen wir eine Variante des Gaußschen Satzes, die wir leicht durch partielle Integration herleiten können:

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{\nabla} f(\vec{r}) = \iiint_{\mathcal{V}} dV 1 \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r}) \stackrel{\text{partiell}}{=} \oint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} f(\vec{r}) - \iiint_{\mathcal{V}} dV (\vec{\nabla} 1) f(\vec{r}) = \oint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} f(\vec{r}). \quad (5.114)$$

Für unseren Fall folgt

$$\iint ds' \frac{\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \dots = R \iiint dV' \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = R \iiint dV' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (5.115)$$

Wenn wir hier R durch $\rho/4\pi\epsilon_0$ ersetzen, erhalten wir das Coulomb-Gesetz für das \vec{E} -Feld einer homogen geladenen Kugel. Dafür kennen wir die Lösungen schon (ermittelt z. B. mittels des Gaußschen Gesetzes):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r} & \text{für } r < R, \\ \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^3} \vec{r} & \text{für } r > R. \end{cases} \quad (5.116)$$

Daher ist (ersetze $\rho/4\pi\epsilon_0 \rightarrow R$):

$$\iint ds' \frac{\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{4\pi}{3} \vec{r} \begin{cases} R & \text{für } r < R, \\ \frac{R^4}{r^3} & \text{für } r > R. \end{cases} \quad (5.117)$$

Damit ist schließlich

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{3} \sigma \vec{\omega} \times \vec{r} \begin{cases} R & \text{für } r < R, \\ \frac{R^4}{r^3} & \text{für } r > R. \end{cases} \quad (5.118)$$

Das \vec{B} -Feld erhalten wir sofort aus $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Im Inneren der Kugel gilt z. B.

$$\begin{aligned} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \frac{\mu_0 \sigma R}{3} \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{\mu_0 \sigma R}{3} \underbrace{[(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} + \vec{\omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) - \vec{r} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega})]}_0 \\ &= \frac{\mu_0 \sigma R}{3} [-\vec{\omega} + 3\vec{\omega}] = \frac{2\mu_0 \sigma R}{3} \vec{\omega}. \end{aligned} \quad (5.119)$$

Das Feld im Inneren ist offensichtlich homogen.

5.4.4 Vektorpotential und magnetischer Fluss

Für eine beliebige geschlossene Kurve $\partial\mathcal{S}$ gilt

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} d\vec{l} \cdot \vec{A} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \iint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \iint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot \vec{B} \equiv \Phi_m, \quad (5.120)$$

dies ist der *magnetische Fluss* durch die Fläche \mathcal{S} . Dieser Zusammenhang hat interessante Konsequenzen: Wenn $\partial\mathcal{S}$ eine ideale Spule umschließt, ist Φ_m der Fluss im Inneren der Spule und damit

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} d\vec{l} \cdot \vec{A} = \Phi_m \neq 0. \quad (5.121)$$

Andererseits ist $\vec{B} = 0$ überall außerhalb der Spule und somit auch auf $\partial\mathcal{S}$. Anders als in \vec{B} , ist in \vec{A} die Information über das Vorhandensein der Spule enthalten. Eine Lösung für \vec{A} erhalten wir unter geeigneten Annahmen über die Symmetrie von \vec{A} aus dem Stokesschen Satz: Wähle $\partial\mathcal{S}$ als Kreis mit dem Radius r mit Mittelpunkt in der Spule. Dann ist

$$\Phi_m = \oint_{\partial\mathcal{S}} d\vec{l} \cdot \vec{A} = 2\pi r A_\varphi(\vec{r}) \quad (5.122)$$

$$\Rightarrow A_\varphi(\vec{r}) = \frac{\Phi_m}{2\pi r} \quad (5.123)$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\Phi_m}{2\pi r} \hat{\varphi} \quad (5.124)$$

außerhalb der Spule. Es wirkt merkwürdig, dass \vec{A} eine nichttriviale Ortsabhängigkeit hat, während \vec{B} identisch verschwindet. Hat \vec{A} irgendwelche beobachtbaren Konsequenzen? Das ist in der Tat der Fall. Die bekannteste Konsequenz ist der Aharonov-Bohm-Effekt, der die quantenmechanische Interferenz von Elektronenwellen betrifft, die links bzw. rechts im feldfreien Raum an einem magnetischen Fluss (Spule!) vorbeilaufen. Die physikalische Relevanz von \vec{A} ist aber kein reiner Quanteneffekt – auch klassisch hat \vec{A} in Abwesenheit von \vec{B} beobachtbare Konsequenzen. Das scheint zunächst merkwürdig, da \vec{A} ja eichabhängig ist; \vec{A} und $\vec{A} + \vec{\nabla}\chi$ sollten dieselbe Physik beschreiben. Es zeigt sich, dass die relevante eichunabhängige Größe nicht allein $\vec{B}(\vec{r})$ ist, sondern der *Fluss durch beliebige geschlossene Kurven*. Beachte

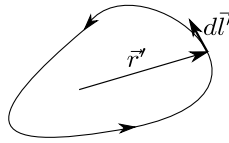
$$\oint_{\partial\mathcal{S}} d\vec{l} \cdot (\vec{A} + \vec{\nabla}\chi) = \oint_{\partial\mathcal{S}} d\vec{l} \cdot \vec{A} + \underbrace{\oint_{\partial\mathcal{S}} d\vec{l} \cdot \vec{\nabla}\chi}_0 = \Phi_m. \quad (5.125)$$

Dieser Fluss ist also eichunabhängig.

5.5 Multipolentwicklung

Für freie Randbedingungen $\lim_{\vec{r} \rightarrow \infty} \vec{A}(\vec{r}) = 0$ und räumlich begrenzte Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$ können wir analog zur Elektrostatik das Vektorpotential in Multipolbeiträge zerlegen. Für eine Stromschleife gilt (alles in diesem Abschnitt gesagt gilt auch für mehrere Stromschleifen, solange sie nur alle geschlossen sind)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (5.126)$$



Hier können wir $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ wie in Abschnitt 3.9.2 in eine Taylor-Reihe in r'/r entwickeln:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^k P_k(\cos\theta) \quad (5.127)$$

mit den Legendre-Polynomen $P_k(x)$. θ ist der von \vec{r} und \vec{r}' eingeschlossene Winkel. Dies ergibt

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left[\underbrace{\frac{1}{r} \oint d\vec{l}'}_0 + \frac{1}{r^2} \oint d\vec{l}' r' \cos\theta + \dots \right]. \quad (5.128)$$

Der Monopolterm verschwindet. Der führende Beitrag ist also der Dipolterm, sofern er nicht auch verschwindet. Er lautet

$$\vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} \oint d\vec{l}' r' \cos\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} \oint d\vec{l}' (\vec{r} \cdot \vec{r}'). \quad (5.129)$$

Die x -Komponente des Integrals ist

$$\begin{aligned}
 \hat{x} \cdot \oint d\vec{l}' (\vec{r} \cdot \vec{r}') &= \oint d\vec{l}' \cdot (\vec{r} \cdot \vec{r}') \hat{x} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \iint d\vec{s}' \cdot \left[\vec{\nabla}' \times (\vec{r} \cdot \vec{r}') \hat{x} \right] \\
 &= \iint d\vec{s}' \cdot \left[\hat{y} \frac{\partial}{\partial z'} (\vec{r} \cdot \vec{r}') - \hat{z} \frac{\partial}{\partial y'} (\vec{r} \cdot \vec{r}') \right] = \iint d\vec{s}' \cdot (\hat{y} z - \hat{z} y) \quad \left| \text{da } \vec{r} \cdot \vec{r}' = xx' + yy' + zz' \right. \\
 &= \iint (ds'_y z - ds'_z y) = \iint (d\vec{s}' \times \vec{r})_x = - \left(\vec{r} \times \iint d\vec{s}' \right)_x.
 \end{aligned} \tag{5.130}$$

Für alle Komponenten erhalten wir analog

$$\oint d\vec{l}' (\vec{r} \cdot \vec{r}') = -\vec{r} \times \iint d\vec{s}'. \tag{5.131}$$

Das Ergebnis lautet also

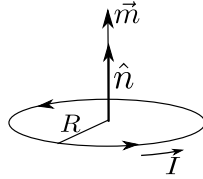
$$\vec{A}_1(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} \vec{r} \times \iint d\vec{s}' =: \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}, \tag{5.132}$$

wobei wir das *magnetische Dipolmoment*

$$\vec{m} = I \iint d\vec{s}' \tag{5.133}$$

der Leiterschleife(n) definiert haben. Für eine *flache* Schleife ist das Integral $\iint d\vec{s}'$ der *Flächeninhalt* multipliziert mit dem Normaleneinheitsvektor, $A \hat{n}$. Das Dipolmoment einer kreisförmigen Leiterschleife mit dem Radius R beträgt also

$$\vec{m} = I\pi R^2 \hat{n}. \tag{5.134}$$



Typischerweise existieren nicht verschwindende höhere Multipolmomente. Einen magnetischen *Punktdipol* oder reinen magnetischen Dipol erhalten wir im Grenzfall Fläche $A \rightarrow 0$, Strom $I \rightarrow \infty$, wobei $\vec{m} = \text{const.}$ Vergleiche den reinen elektrischen Dipol: $d \rightarrow 0$, $q \rightarrow \infty$, wobei $\vec{p} = \text{const.}$

Das \vec{B} -Feld eines magnetischen Dipols lautet

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-(\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{m} \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right]. \tag{5.135}$$

\vec{A} und daher auch \vec{B} sind singularär am Punkt $\vec{r} = 0$, den wir nun ausschließen. Der Ausdruck im zweiten Term ist

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = 4\pi \delta(\vec{r}) = 0 \quad \text{für } \vec{r} \neq 0. \tag{5.136}$$

Den ersten Term schreiben wir in kartesischen Komponenten:

$$- \sum_j m_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_i}{r^3} = - \sum_j m_j \frac{\delta_{ij} r^3 - x_i 3 r^2 \frac{x_j}{r}}{r^6} = - \sum_j m_j \left(\frac{\delta_{ij}}{r^3} - 3 \frac{x_i x_j}{r^5} \right) = 3 \sum_j \frac{x_i x_j m_j}{r^5} - \frac{m_i}{r^3}, \tag{5.137}$$

so dass folgt

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3 \vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{m})}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3 \hat{r} (\hat{r} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{r^3}. \tag{5.138}$$

Wir sehen, dass das magnetische Dipolfeld dieselbe Form hat wie das elektrische:

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \hat{r} (\hat{r} \cdot \vec{p}) - \vec{p}}{r^3}. \tag{5.139}$$

5.6 Leiter und der Hall-Effekt

In Analogie zum Vorgehen in der Elektrostatik diskutieren wir die Magnetostatik in Leitern im Kapitel zum Vakuum, während polarisierbare Medien ein eigenes Kapitel bekommen. Leiter haben einen dramatischen Effekt auf *elektrostatische* Felder: Das \vec{E} -Feld wird vollständig aus ihrem Inneren verdrängt. *Normale* Leiter beeinflussen das \vec{B} -Feld bei weitem nicht so stark. Unter Vernachlässigung der meist geringen magnetischen Polarisierbarkeit (siehe Kapitel 6), dringt das \vec{B} -Feld ungestört in einen normalen Leiter ein. Die Asymmetrie zwischen \vec{E} und \vec{B} beruht darauf, dass der Leiter zwar freie Ladungsträger enthält, aber keine freien magnetischen Monopole. Der wichtigste magnetische Effekt in normalen Leitern ist der Hall-Effekt, den wir gleich besprechen werden.

Ganz anders verhalten sich *Supraleiter*. Diese verdrängen nicht nur das \vec{E} -Feld (weil sie leiten), sondern auch das \vec{B} -Feld, bis auf eine Oberflächenschicht mikroskopischer Dicke λ (*Meissner-Ochsenfeld-Effekt*). Der Ursprung dieses Effekts kann hier nicht erklärt werden. Letztlich ist er analog zum Higgs-Mechanismus in der Hochenergiephysik. Im Zusammenhang mit Supraleitung spricht man vom *Anderson-Higgs-Mechanismus*. Er bewirkt, dass das *Photon* in supraleitenden Medien effektiv eine *Masse* erhält. Damit fallen \vec{E} - und \vec{B} -Felder exponentiell mit dem Abstand ab, also insbesondere auch exponentiell mit dem Abstand zur Oberfläche.

Es sei angemerkt, dass für statische Felder die Eigenschaften von Supraleitern im Rahmen der Magnetostatik beschrieben werden können, wenn man eine zusätzliche Gleichung einführt. Dies ist die *zweite London-Gleichung*

$$\vec{\nabla} \times \vec{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \vec{B}. \quad (5.140)$$

Diese liefert mit dem Ampèreschen Gesetz

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (5.141)$$

die Gleichung

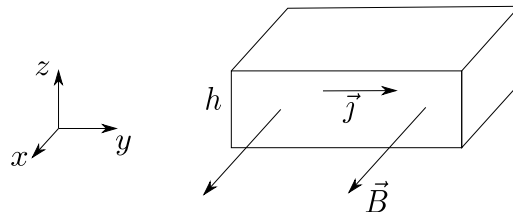
$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\frac{1}{\lambda^2} \vec{B} \quad (5.142)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}_0 - \nabla^2 \vec{B} = -\frac{1}{\lambda^2} \vec{B} \quad (5.143)$$

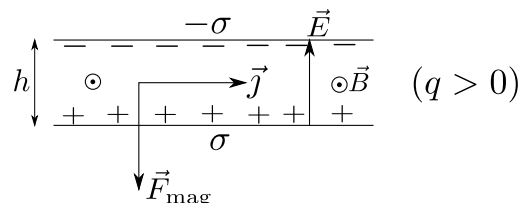
$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{B}, \quad (5.144)$$

die den exponentiellen Abfall von \vec{B} beschreibt.

Nun zum Hall-Effekt: Wir betrachten einen großen, leitenden Quader mit gleichförmiger Stromdichte \vec{j} parallel zu einer Kante und gleichförmigem \vec{B} -Feld parallel zu einer dazu senkrechten Kante.



Die Ladung der Ladungsträger sei q . Die magnetische Lorentz-Kraft $\vec{F}_{\text{mag}} = q \vec{v} \times \vec{B}$ lenkt die Ladungsträger nach unten (oben) ab, wenn $q > 0$ ($q < 0$) gilt. Dies führt zur Akkumulation von Flächenladungen $\pm\sigma$ auf der oberen und der unteren Seitenfläche. Diese Ladung nimmt zu, bis die von ihr hervorgerufene *elektrische* Kraft $\vec{F}_{\text{el}} = q \vec{E}$ die magnetische Kraft gerade kompensiert – dann gibt es keine Ablenkung mehr. Die Existenz des elektrischen Feldes \vec{E} aufgrund der Oberflächenladungen ist der *Hall-Effekt*.



Im stationären Zustand gilt also

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = 0 \quad (5.145)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} = -\frac{\vec{j}}{\rho} \times \vec{B}. \quad (5.146)$$

Für die hier betrachtete Geometrie bedeutet das

$$E_z = \frac{jB}{\rho}. \quad (5.147)$$

Die Spannung zwischen der oberen und der unteren Seitenfläche ist also

$$U_{\text{Hall}} = -hE_z = -\frac{jBh}{\rho}. \quad (5.148)$$

Dies ist die *Hall-Spannung*. Beachte, dass U_{Hall} vom Vorzeichen von ρ und damit vom Vorzeichen $\text{sgn } q$ der beweglichen Ladungsträger abhängt. (Dieses Vorzeichen kürzt sich nicht mit einem Faktor in \vec{j} heraus, da die Richtung von \vec{j} *unabhängig* vom Vorzeichen der Ladungsträger durch eine in y -Richtung angelegte Spannung bestimmt wird.) Der Hall-Effekt wird daher zur Messung des Vorzeichens und der Konzentration der dominierenden Ladungsträger verwendet (Elektronen oder Löcher?). Er wird auch, für bekanntes Material, zur Messung des \vec{B} -Feldes verwendet.

Kapitel 6

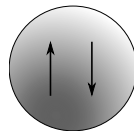
Makroskopische Magnetostatik

Magnetische Effekte in Materie sind sehr vielgestaltig. Sie sind Gegenstand aktueller Forschung in der experimentellen und theoretischen Physik. Das Verständnis der meisten magnetischen Eigenschaften erfordert eine quantenmechanische Beschreibung. Siehe dazu das Skript *Theory of Magnetism*, das allerdings eine Einführung in die Quantentheorie voraussetzt. In diesem Kapitel werden wir nur einige wichtige Konzepte anreißen.

Wir hatten gesehen, dass elektrische Ströme Magnetfelder hervorrufen. Können wir das Magnetfeld eines Stabmagneten auch auf Ströme zurückführen? Tatsächlich beruht dieses Feld zum (kleineren) Teil auf Elektronenströmen auf atomaren Längenskalen und zum (größeren) Teil auf der Rotation der Elektronen um die eigene Achse (ihrem *Spin*). Dass der letztere Effekt ein magnetisches Dipol und damit ein \vec{B} -Feld erzeugt, ist klassisch nicht zu verstehen, da Elektronen nach allen bisherigen Erkenntnissen punktförmig sind und das Dipolmoment einer rotierenden Kugel für verschwindenden Radius gegen Null geht.

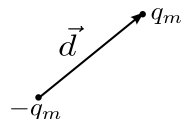
6.1 Magnetische Dipolmomente

Elementarteilchen, insbesondere Elektronen, tragen permanente *magnetische* Dipolmomente (magnetische Momente), aber, nach heutiger Kenntnis, keine *elektrischen* Dipolmomente. Daraus würde man zunächst schließen, dass magnetische Effekte in Materie weitaus stärker sein sollten, als man tatsächlich beobachtet. Die Ursache für die Abschwächung liegt wieder in der Quantenmechanik: zwei Elektronen mit *entgegengesetzten* magnetischen Dipolmomenten (und Spins) besetzen typischerweise ein Orbital, so dass sich die Dipolmomente vektoriell zu Null addieren.



6.1.1 Permanente magnetische Momente

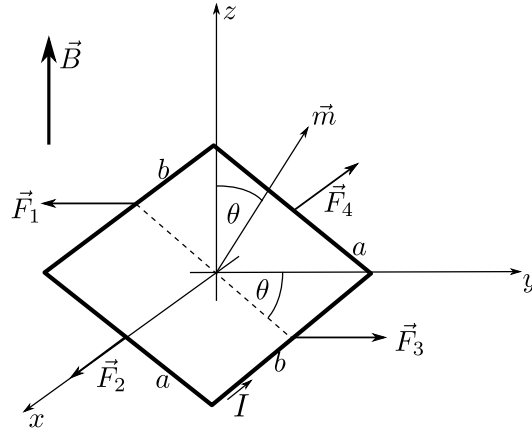
Wir können einen magnetischen Punktdipol analog zu einem elektrischen (Abschnitt 4.1.2) durch zwei magnetische Monopole $\pm q_m$ im Abstand d darstellen, wobei $q_m \rightarrow \infty$ und $d \rightarrow 0$ mit $m = q_m d = \text{const.}$ Das ist natürlich nur ein günstiges *effektives Modell*, keine *mikroskopische* Beschreibung wirklicher Dipole.



Damit finden wir für das *Drehmoment* auf einen magnetischen Dipol, analog zum elektrischen Fall,

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}. \quad (6.1)$$

Eine physikalisch befriedigendere Darstellung eines Dipols verwendet eine kleine Leiterschleife:



Unter der Annahme eines *homogenen* Induktionsfeldes \vec{B} finden wir dasselbe Ergebnis für das Drehmoment:

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = \frac{a}{2} F_1 \sin \theta \hat{x} - \left(-\frac{a}{2} F_1 \sin \theta \hat{x} \right) = a F_1 \sin \theta \hat{x} \quad (6.2)$$

mit

$$F_1 = IbB. \quad (6.3)$$

Es folgt

$$\vec{M} = \underbrace{Iab}_m B \sin \theta \hat{x}, \quad (6.4)$$

oder, für beliebige Koordinatenachsen,

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}. \quad (6.5)$$

Dieses Drehmoment ist bestrebt, das magnetische Moment parallel zu \vec{B} auszurichten. Im stationären Zustand erwarten wir daher eine magnetische Polarisierung (*Magnetisierung*) in der Richtung von \vec{B} . Eine Magnetisierung in Feldrichtung nennt man *Paramagnetismus*.

Mittels des Modells der (infinitesimalen) Leiterschleife können wir auch die *Kraft* auf einen Dipol in einem *inhomogenen* \vec{B} -Feld berechnen:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 \\ &= Ib \hat{x} \times \vec{B}_1 + Ia(\hat{y} \cos \theta - \hat{z} \sin \theta) \times \vec{B}_2 + Ib(-\hat{x}) \times \vec{B}_3 + Ia(-\hat{y} \cos \theta + \hat{z} \sin \theta) \times \vec{B}_4 \\ &= Ib(-\hat{x}) \times (\vec{B}_3 - \vec{B}_1) + Ia(-\hat{y} \cos \theta + \hat{z} \sin \theta) \times (\vec{B}_4 - \vec{B}_2). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Hier ist \vec{B}_i das über die Kante i gemittelte Induktionsfeld. Für eine infinitesimale Leiterschleife bzw. ein sich im Raum hinreichend langsam änderndes Feld gilt

$$\vec{B}_3 - \vec{B}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{pmatrix} a(\hat{y} \cos \theta - \hat{z} \sin \theta) = a \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \cos \theta - \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \sin \theta \right), \quad (6.7)$$

$$\vec{B}_4 - \vec{B}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{pmatrix} b(-\hat{x}) = -b \frac{\partial \vec{B}}{\partial x}. \quad (6.8)$$

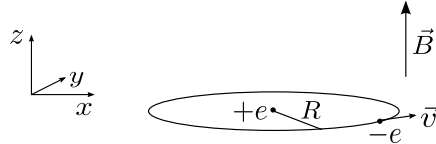
Es folgt

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= - \underbrace{Iab}_m \hat{x} \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \cos \theta - \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \sin \theta \right) - \underbrace{Iab}_m (-\hat{y} \cos \theta + \hat{z} \sin \theta) \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \\
&= -m \left(\cos \theta \hat{x} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} - \sin \theta \hat{x} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} - \cos \theta \hat{y} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + \sin \theta \hat{z} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \right) \\
&= -m \left(\frac{\partial}{\partial y} \cos \theta \hat{x} \times \vec{B} - \frac{\partial}{\partial z} \sin \theta \hat{x} \times \vec{B} - \frac{\partial}{\partial x} \cos \theta \hat{y} \times \vec{B} + \frac{\partial}{\partial x} \sin \theta \hat{z} \times \vec{B} \right) \\
&= -m \left[\frac{\partial}{\partial y} \cos \theta (-\hat{y}B_z + \hat{z}B_y) - \frac{\partial}{\partial z} \sin \theta (-\hat{y}B_z + \hat{z}B_y) - \frac{\partial}{\partial x} \cos \theta (-\hat{x}B_z + \hat{z}B_x) + \frac{\partial}{\partial x} \sin \theta (-\hat{x}B_y + \hat{y}B_x) \right] \\
&= - \left[\frac{\partial}{\partial y} m_z (-\hat{y}B_z + \hat{z}B_y) - \frac{\partial}{\partial z} m_y (-\hat{y}B_z + \hat{z}B_y) - \frac{\partial}{\partial x} m_z (-\hat{x}B_z + \hat{z}B_x) + \frac{\partial}{\partial x} m_y (-\hat{x}B_y + \hat{y}B_x) \right] \\
&= \underbrace{\left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right)}_{\vec{\nabla}} (m_y B_y + m_z B_z) \\
&\quad - \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} m_y B_y - \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} m_z B_z - \hat{z} \frac{\partial}{\partial y} m_z B_y - \hat{y} \frac{\partial}{\partial z} m_y B_z - \hat{z} \frac{\partial}{\partial x} m_z B_x - \hat{y} \frac{\partial}{\partial x} m_y B_x \\
&= \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}) - \underbrace{\vec{m}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}_0 = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}). \tag{6.9}
\end{aligned}$$

Ist der magnetische Dipol \vec{m} parallel (antiparallel) zum \vec{B} -Feld ausgerichtet, so zeigt die Kraft \vec{F} in Richtung des stärkeren (schwächeren) \vec{B} -Feldes. Wenn sich ein permanenter magnetischer Dipol also parallel zum Feld ausrichtet, wird er danach ins Feld hineingezogen. Dieses Verhalten können wir mit zwei Permanentmagneten leicht beobachten.

6.1.2 Induzierte magnetische Momente

Zur Abschätzung des *induzierten* magnetischen Dipolmoments eines Atoms führen wir ein neues, sehr grobes, Atommodell ein: Elektronen umlaufen den Kern auf Kepler-Bahnen. Wir beschränken uns auf ein Wasserstoff-Atom und eine Kreisbahn:



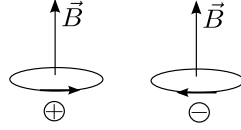
Ohne \vec{B} -Feld zwingt die Coulomb-Kraft das Elektron auf eine Kreisbahn. Daher ist die Coulomb-Kraft mit der Zentripetalkraft identisch:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2} = \frac{m_e v_0^2}{R}. \tag{6.10}$$

v_0 ist die Geschwindigkeit für $\vec{B} = 0$. Im \vec{B} -Feld kommt die magnetische Lorentz-Kraft hinzu. Wir nehmen hier der Einfachheit halber an, dass die Bahn in der Ebene senkrecht zu \vec{B} liegt. Dies reicht aus, um den Effekt qualitativ zu verstehen. Für eine quantitative Berechnung ist das Modell ohnehin zu stark vereinfacht. Die Gesamtkraft lautet nun

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2} \pm evB = \frac{m_e v^2}{R}. \tag{6.11}$$

Das Vorzeichen hängt von der Bewegungsrichtung ab (beachte $q = -e < 0$):



Je nach der Bewegungsrichtung wird die Zentralkraft also verstärkt oder abgeschwächt. Es folgt

$$evB = \pm \left(\frac{m_e v^2}{R} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2} \right) = \pm \left(\frac{m_e v^2}{R} - \frac{m_e v_0^2}{R} \right) = \pm \frac{m_e}{R} (v^2 - v_0^2) = \pm \frac{m_e}{R} (v + v_0)(v - v_0). \quad (6.12)$$

Ist nun die Änderung $\Delta v := v - v_0$ der Geschwindigkeit klein, $|\Delta v| \ll v_0$, was für realistische Induktionsfelder sehr gut erfüllt ist, so folgt

$$ev_0 B \cong \pm \frac{m_e}{R} 2v_0 \Delta v \quad (6.13)$$

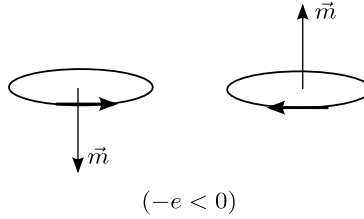
$$\Rightarrow \Delta v \cong \pm \frac{eRB}{2m_e}. \quad (6.14)$$

Ist die Umlaufzeit $T = 2\pi R/v$ klein im Vergleich zu experimentellen Zeitskalen, d. h. läuft das Elektron während der Messung sehr oft um, so kann man das Elektron durch einen stationären Kreisstrom ersetzen. Dann gilt die Magnetostatik. Die Stromstärke (oder Linienstromdichte) ist

$$I = \pm \frac{-e}{T} = \mp \frac{ev}{2\pi R} \quad (6.15)$$

und das Dipolmoment

$$\vec{m} = \pi R^2 I \hat{z} = \pi R^2 \left(\mp \frac{ev}{2\pi R} \right) \hat{z} = \mp \frac{evR}{2} \hat{z}. \quad (6.16)$$



Das Dipolmoment ändert sich im \vec{B} -Feld also um

$$\Delta \vec{m} = \mp \frac{e \Delta v R}{2} \hat{z} \cong \mp \pm \frac{eR}{2} \frac{eRB}{2m_e} \hat{z} = -\frac{e^2 R^2 B}{4m_e} \hat{z} = -\frac{e^2 R^2}{4m_e} \vec{B}. \quad (6.17)$$

Das wesentliche Ergebnis ist, dass $\Delta \vec{m}$ *antiparallel* zum \vec{B} -Feld steht. Beachte, dass dieses Ergebnis unabhängig davon ist, ob das Elektron links- oder rechtsherum läuft. (Wir haben angenommen, dass der Bahnradius R mit und ohne \vec{B} -Feld gleich ist. Ebenso gut hätten wir annehmen können, dass die Geschwindigkeit gleich bleibt und sich stattdessen der Radius ändert. Dies führt auf ein um einen Faktor 2 größeres Ergebnis für $\Delta \vec{m}$. Qualitativ bleibt die Schlussfolgerung aber bestehen. Für quantitative Aussagen ist das verwendete Atommodell ohnehin zu primitiv.)

Für $\vec{B} = 0$ erwarten wir, dass die Elektronenbahnen zufällig orientiert sind. Das *mittlere* Dipolmoment einer Probe ist dann $\langle \vec{m}_0 \rangle = 0$. Für $\vec{B} \neq 0$ finden wir daher

$$\langle \vec{m} \rangle = \langle \Delta \vec{m} \rangle = -\frac{e^2 R^2}{4m_e} \vec{B}, \quad (6.18)$$

antiparallel zu \vec{B} . Die induzierten magnetischen Dipolmomente der Atome sind also antiparallel zu \vec{B} . Dieses Phänomen nennt man *Diamagnetismus*. Beachte, dass der Diamagnetismus auf der Bahnbewegung der Elektronen beruht – die permanenten magnetischen Momente der Elektronen haben wir hier gar nicht beachtet. Im Vergleich dazu zeigen induzierte atomare *elektrische* Dipolmomente immer in *dieselbe* Richtung wie das \vec{E} -Feld, siehe Abschnitt 4.1.1. In realen Materialien tragen verschiedene para- und diamagnetische Beiträge zur Magnetisierung bei und es ist nicht trivial, magnetische Eigenschaften zu berechnen.

6.2 Magnetisierung von Materie

Analog zur elektrischen Polarisation \vec{P} definieren wir die *Magnetisierung* (oder magnetische Polarisation) \vec{M} als magnetisches Dipolmoment pro Volumen,

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}. \quad (6.19)$$

Ist $\vec{M} \neq 0$, auch wenn kein \vec{B} -Feld anliegt, so spricht man von einem *Permanentmagneten* und bezeichnet das Material als *ferromagnetisch* (oder ferrimagnetisch, s. u.). Ist dagegen $\vec{M} = 0$ in Abwesenheit eines angelegten Feldes, so können wir i. A. \vec{M} in eine Taylor-Reihe in \vec{B} entwickeln und finden in führender Ordnung eine lineare Abhängigkeit. Vereinfachend unterscheidet man folgende Arten von Materie hinsichtlich ihrer magnetischen Eigenschaften:

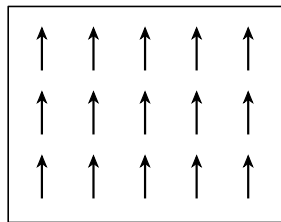
1. $\vec{M} = 0$ für verschwindendes angelegtes Feld, $\vec{B} = 0$, \vec{M} parallel zu \vec{B} für $\vec{B} \neq 0$: *Paramagnet*. Beispiele: einfache Metalle, (Na, K, Al, ...), die meisten Metalle und Isolatoren mit teilweise gefüllten 3d, 4d, 5d, 4f, 5f Schalen und daher permanenten magnetischen Momenten, organische Radikale, O₂. Paramagneten werden wegen

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}) \quad (6.20)$$

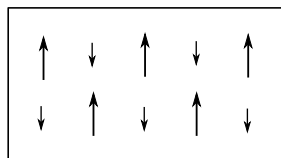
in ein inhomogenes \vec{B} -Feld hineingezogen.

Zum Vergleich: $\vec{P} = 0$ für $\vec{E} = 0$, \vec{P} parallel zu \vec{E} für $\vec{E} \neq 0$, definiert ein (isotropes) Dielektrikum. Dieses könnte man logischer als „Parelektrikum“ bezeichnen.

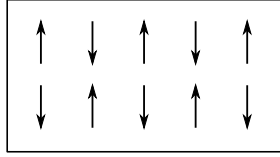
2. $\vec{M} = 0$ für $\vec{B} = 0$, \vec{M} antiparallel zu \vec{B} für $\vec{B} \neq 0$: *Diamagnet*. Beispiele: Edelgase, Edelmetalle, (Au, Ag, Cu), Hg, Bi, die meisten abgesättigten kovalent gebundenen Materialien, insbesondere die meisten organischen Materialien und H₂O, daher auch organisches Gewebe. Supraleiter sind *sehr starke* Diamagneten. Wegen $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B})$ werden Diamagneten aus einem inhomogenen \vec{B} -Feld *herausgedrängt*. Dies führt zu dem bekannten Phänomen der Levitation von Supraleitern und erklärt auch die Levitation von lebenden Fröschen (organisches Gewebe!) in sehr starken Magnetfeldern.
3. $\vec{M} \neq 0$ für $\vec{B} = 0$, mikroskopische magnetische Momente von Atomen/ Ionen parallel ausgerichtet: *Ferromagnet*. Beispiele: Fe, Co, Ni, Gd (bei tiefen Temperaturen), CrO₂, MnBi, Cu₂MnSn und weitere sogenannte Heusler-Verbindungen, ...



4. $\vec{M} \neq 0$ für $\vec{B} = 0$, mikroskopische magnetische Momente nicht alle parallel ausgerichtet: *Ferrimagnet*. Beispiele: Fe₃O₄ (Magnetit), verschiedene Metalloxide, ...



5. $\vec{M} = 0$ für $\vec{B} = 0$, mikroskopische magnetische Momente existieren und sind geordnet, kompensieren sich aber: *Antiferromagnet*. Beispiele: Cr, FeMn, NiO, FeSe, YBa₂Cu₃O₇, LaFeAsO, ...



Wir betrachten nun das Feld eines magnetisierten Körpers. Das Vektorpotential eines infinitesimalen Dipolmoments $d\vec{m}$ am Ort \vec{r}' ist gemäß Gl. (5.132)

$$d\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (6.21)$$

Das gesamte Vektorpotential eines magnetisierten Körpers ist daher

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{d\vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (6.22)$$

Analog zur Darstellung des \vec{E} -Feldes oder skalaren Potentials eines polarisierten Körpers durch gebundene Ladungen, können wir \vec{A} durch gebundene Ströme ausdrücken: Es ist

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} dV' \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} dV' \vec{\nabla}' \times \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} dV' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}') \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s}' \times \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} dV' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}'), \end{aligned} \quad (6.23)$$

wobei wir eine Variante des Gaußschen Satzes verwendet haben. Wir schreiben dies als

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s}' \frac{\vec{K}_g(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} dV' \frac{\vec{J}_g(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (6.24)$$

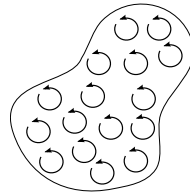
mit dem *gebundenen Oberflächenstrom*

$$\vec{K}_g := \vec{M} \times \hat{n} \quad (6.25)$$

und dem *gebundenen Volumenstrom*

$$\vec{J}_g := \vec{\nabla} \times \vec{M}. \quad (6.26)$$

Diese gebundenen Ströme sind, wie gebundene Ladungen, auf atomare Größenordnungen beschränkt.



Beachte auch die Identität

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_g = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}) = 0. \quad (6.27)$$

Die Kontinuitätsgleichung zeigt also, dass der gebundene Strom keine Ladungen anhäufen kann. Für gegebene Magnetisierung \vec{M} ist die Bestimmung von \vec{A} und auch von $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ damit auf ein bekanntes Problem zurückgeführt.

■ Beispiel: gleichförmig magnetisierte Kugel. Sei $\vec{M} = M\hat{z}$. Die gebundenen Ströme sind

$$\vec{j}_g = \vec{\nabla} \times \vec{M} = 0, \quad (6.28)$$

$$\vec{K}_g = \vec{M} \times \hat{n} = M\hat{z} \times \hat{r} = M \sin \theta \hat{\varphi}. \quad (6.29)$$

Vergleiche das schon behandelte Beispiel einer rotierenden dünnen Kugelschale. Dort war

$$\vec{K} = \sigma \vec{\omega} \times \vec{r} = \sigma \omega R \hat{z} \times \hat{r} = \sigma \omega R \sin \theta \hat{\varphi}. \quad (6.30)$$

Wir können also das Ergebnis mittels der Ersetzung $\sigma \vec{\omega} \rightarrow \vec{M}/R$ übertragen:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{3} \vec{M} \times \vec{r} \begin{cases} 1 & \text{für } r < R, \\ \frac{R^3}{r^3} & \text{für } r > R \end{cases} \quad (6.31)$$

und im Inneren finden wir das homogene Feld

$$\vec{B} = \frac{2\mu_0}{3} \vec{M} = \text{const.} \quad (6.32)$$

Vergleiche das \vec{E} -Feld im Inneren einer gleichförmig polarisierten Kugel; es ist ebenfalls homogen.

6.3 Das Magnetfeld \vec{H}

Die folgende Diskussion ist weitgehend analog zur Motivation des Verschiebungsfeldes \vec{D} in Abschnitt 4.3. Die totale Stromdichte setzt sich i. A. aus gebundenen und freien Strömen zusammen:

$$\vec{j} = \vec{j}_g + \vec{j}_f. \quad (6.33)$$

Sie erzeugt das Induktionsfeld \vec{B} gemäß des Ampèreschen Gesetzes

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} = \vec{j}_g + \vec{j}_f = \vec{\nabla} \times \vec{M} + \vec{j}_f. \quad (6.34)$$

Es folgt

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) = \vec{j}_f. \quad (6.35)$$

Wir definieren das *Magnetfeld*

$$\vec{H} := \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}, \quad (6.36)$$

so dass gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_f, \quad (6.37)$$

die Wirbel des Magnetfeldes sind nur die *freien* Ströme. In Integralform:

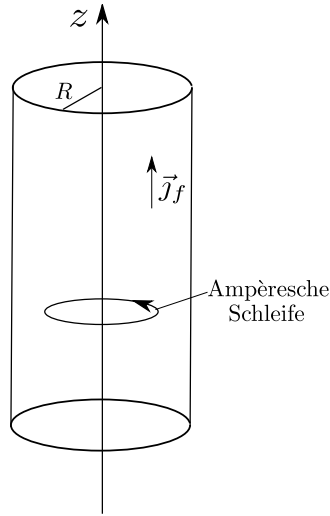
$$\oint_{\partial S} d\vec{l} \cdot \vec{H} = I_{f, \text{in}}. \quad (6.38)$$

Das Magnetfeld \vec{H} ist also analog zum Verschiebungsfeld $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ in der Elektrostatik. Die *fundamentalen* Felder sind \vec{E} und \vec{B} . Daher ist die historisch entstandene Bezeichnung von \vec{H} und nicht \vec{B} als „Magnetfeld“ unglücklich.

Es ist aber leicht zu verstehen, warum früher und in der Experimentalphysik noch heute oft \vec{E} und \vec{H} angegeben werden. In Experimenten kennt man i. A.

- die angelegte Spannung und daraus das elektrische Feld \vec{E} ,

- den fließenden *freien* Strom und daraus das Magnetfeld \vec{H} .
- Beispiel: \vec{H} -Feld für einen dicken Kupferdraht mit gleichförmigem freiem Strom I_f .



Aus Symmetriegründen ist \vec{H} tangential:

$$\vec{H} = H_\varphi \hat{\varphi}. \quad (6.39)$$

Das Ampèresche Gesetz für \vec{H} ergibt

$$\oint_{\partial S} d\vec{l} \cdot \vec{H} = \iint_S d\vec{s} \cdot \vec{j}_f \quad (6.40)$$

$$\Rightarrow 2\pi\rho H_\varphi = \begin{cases} \pi\rho^2 j_f & \text{für } \rho \leq R, \\ \pi R^2 j_f & \text{für } \rho > R. \end{cases} \quad (6.41)$$

Der gesamte freie Strom ist

$$I_f = \pi R^2 j_f, \quad (6.42)$$

woraus folgt

$$2\pi\rho H_\varphi = \begin{cases} \frac{\rho^2}{R^2} I_f & \text{für } \rho \leq R, \\ I_f & \text{für } \rho > R \end{cases} \quad (6.43)$$

$$\Rightarrow H_\varphi = \frac{I_f}{2\pi} \begin{cases} \frac{\rho}{R^2} & \text{für } \rho \leq R, \\ \frac{1}{\rho} & \text{für } \rho > R. \end{cases} \quad (6.44)$$

Im Außenraum ist $\vec{M} = 0$ und daher

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \frac{\mu_0}{2\pi} I_f \frac{1}{\rho} \hat{\varphi}, \quad (6.45)$$

wie für einen dünnen Draht. Im Inneren können wir \vec{B} nicht ohne weitere Informationen, insbesondere über den Zusammenhang von \vec{M} mit \vec{B} oder \vec{H} , bestimmen. Für Kupfer ist \vec{M} allerdings klein im Vergleich zu $\mu_0 \vec{H}$.

Ähnlich zur Elektrostatik reicht der Zusammenhang

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_f \quad (6.46)$$

i. A. nicht aus, um \vec{H} zu bestimmen. Im Beispiel war das nur aufgrund der hohen Symmetrie möglich. Allgemein ist

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}}_0 - \vec{\nabla} \cdot \vec{M} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} \quad (6.47)$$

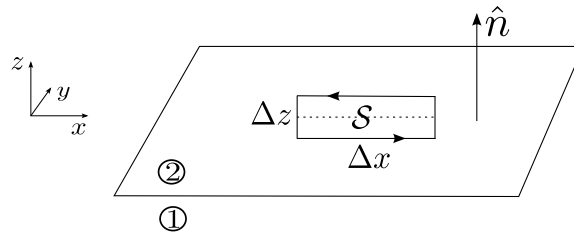
von Null verschieden. Beispiel: ein Stabmagnet hat $\vec{j}_f \equiv 0$ aber offensichtlich im Außenraum $\vec{B} \neq 0$ und damit $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 \neq 0$.

Analog zu \vec{E} und \vec{D} können wir auch für \vec{B} und \vec{H} Anschlussbedingungen an der Grenzfläche zwischen zwei Medien (evtl. Vakuum) herleiten. Das Ergebnis ist, hier ohne Beweis,

$$B_{n2} - B_{n1} = 0, \quad (6.48)$$

oder äquivalent $H_{n2} - H_{n1} = -(M_{n2} - M_{n1})$, und

$$\vec{H}_{t2} - \vec{H}_{t1} = \vec{K}_f \times \hat{n}. \quad (6.49)$$



6.4 Lineare Medien

Für Paramagneten und Diamagneten kann man \vec{M} für kleine \vec{B} entwickeln. Für nicht zu großes \vec{B} -Feld ist die Magnetisierung also linear in \vec{B} . In Analogie zur Beziehung $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ wäre es also naheliegend, diese Proportionalität als

$$\vec{M} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\mu_0} \chi_m \vec{B} \quad (6.50)$$

zu schreiben. Da \vec{H} experimentell besser zugänglich ist als \vec{B} , tut man das aber nicht, sondern schreibt stattdessen

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (6.51)$$

mit der *magnetischen Suszeptibilität* χ_m . Es folgt

$$\vec{B} \equiv \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}. \quad (6.52)$$

χ_m ist i. A. ein Tensor, aber wir betrachten hier nur den isotropen Fall, in dem χ_m als Skalar aufgefasst werden kann. Dann ist

$$\vec{H} = \frac{1}{1 + \chi_m} \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (6.53)$$

$$\Rightarrow \vec{M} = \chi_m \vec{H} = \frac{\chi_m}{1 + \chi_m} \frac{\vec{B}}{\mu_0}. \quad (6.54)$$

Es ist $\chi_m > 0$ für Paramagneten (\vec{M} zeigt in dieselbe Richtung wie \vec{B}) und $\chi_m < 0$ für Diamagneten (\vec{M} ist antiparallel zu \vec{B}). Man kann zeigen, dass χ_m nicht kleiner als -1 sein kann und den extremen Wert $\chi_m = -1$ nur für Supraleiter annimmt, in welchem Fall offenbar $\vec{B} = 0$ für beliebiges \vec{H} gilt. Wir definieren noch

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} =: \mu \vec{H} \quad (6.55)$$

mit der *Permeabilität* $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$. Man verwendet auch die *relative Permeabilität*

$$\mu_r := \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m. \quad (6.56)$$

■ Beispiel: ideale Spule, gefüllt mit linearem Medium. Analog zur luftgefüllten Spule erhalten wir im Inneren

$$\vec{H} = nI_f \hat{z} \quad (6.57)$$

(n ist die Zahl der Windungen pro Länge). Es folgt

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0(1 + \chi_m) nI_f \hat{z}. \quad (6.58)$$

Für Paramagneten ist das Feld *vergrößert*. Das kann man mit Hilfe des gebundenen Oberflächenstromes verstehen:

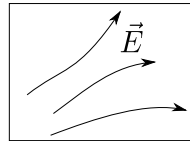
$$\vec{K}_g = \vec{M} \times \hat{n} = \chi_m \vec{H} \times \hat{n} = \chi_m nI_f \hat{z} \times \hat{\rho} = \chi_m nI_f \hat{\phi}. \quad (6.59)$$

Dieser fließt in *dieselbe* Richtung wie der freie Strom und verstärkt so das \vec{B} -Feld.

6.5 Das Ohmsche Gesetz

Im stationären Zustand der Elektrostatik gilt $\vec{E} = 0$ im Inneren von Leitern, siehe Abschnitt 3.6. In diesem stationären Zustand fließt auch kein Strom ($\vec{j} = 0$) und die Ladungen sind in Ruhe (zumindest gemittelt über Längenskalen, die groß gegenüber atomaren Skalen sind). Legen wir aber ein \vec{E} -Feld an einen Leiter an, so wird dieser stromlose Zustand nie erreicht, noch nicht einmal für ein zeitlich konstantes Feld, z. B. realisiert mit einer Batterie. Für zeitlich konstantes Feld stellt sich stattdessen eine *stationäre Stromdichte* $\vec{j} \neq 0$ ein und die Ladungen sind dann natürlich nicht in Ruhe. Dies ist die Situation in der Magnetostatik, weshalb wir dieses Thema hier besprechen, obwohl wir im Moment gar nicht an magnetischen Effekten interessiert sind. Da die Ladungen nie zur Ruhe kommen, können wir *nicht* $\vec{E} = 0$ folgern; in der Magnetostatik (und noch allgemeiner in der Elektrodynamik) verschwindet \vec{E} in Leitern i. A. nicht.

Wir betrachten einen Leiter mit einem nicht unbedingt gleichförmigen, aber statischen \vec{E} -Feld.



Das \vec{E} -Feld beschleunigt die Ladungsträger gemäß der Newton-Gleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = q\vec{E}. \quad (6.60)$$

In einem Normalleiter (im Gegensatz zu einem Supraleiter) wirkt aber zusätzlich auch eine Reibungskraft aufgrund der Streuung der Ladungsträger an Gitterdefekten und Gitterschwingungen (Phononen), also lautet die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = q\vec{E} - \alpha\dot{\vec{r}} \quad (6.61)$$

oder

$$m\dot{\vec{v}} = q\vec{E} - \alpha\vec{v} \quad (6.62)$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{v}} + \alpha\vec{v} = q\vec{E}. \quad (6.63)$$

Wir lösen diese mit dem Ansatz

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_\infty + \vec{\omega} e^{-\lambda t}. \quad (6.64)$$

Einsetzen ergibt

$$-\lambda m \vec{\omega} e^{-\lambda t} + \alpha \vec{v}_\infty + \alpha \vec{\omega} e^{-\lambda t} = q \vec{E} \quad (6.65)$$

$$\Rightarrow \vec{v}_\infty = \frac{q \vec{E}}{\alpha} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{\alpha}{m}. \quad (6.66)$$

Die allgemeine Lösung ist damit

$$\vec{v}(t) = \frac{q \vec{E}}{\alpha} + \vec{\omega} \exp\left(-\frac{\alpha t}{m}\right). \quad (6.67)$$

Im stationären Zustand für $t \rightarrow \infty$ ist die Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \vec{v}_\infty = \frac{q \vec{E}}{\alpha}. \quad (6.68)$$

Ist die *Konzentration* der Ladungsträger n und ihre Ladungsdichte daher $\rho = qn$, so ist die Stromdichte

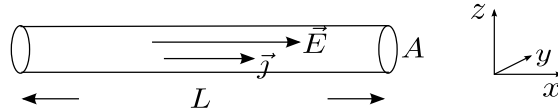
$$\vec{j} = \rho \vec{v} = \rho \frac{q \vec{E}}{\alpha} = \frac{q^2 n}{\alpha} \vec{E}. \quad (6.69)$$

Sie ist also *linear* im Feld \vec{E} . Die Proportionalitätskonstante ist die *Leitfähigkeit* σ , also

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (6.70)$$

Dies ist das *Ohmsche Gesetz* in mikroskopischer Form. Es gilt aber nur für kleine Felder. Es ist kein Naturgesetz von der Art des Gaußschen Gesetzes, sondern eine *Materialgleichung* genähert zur ersten Ordnung, wie die Beziehungen $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ und $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$.

Die makroskopische Form des Ohmschen Gesetzes erhalten wir, indem wir $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ über das Volumen \mathcal{V} eines Drahtes mit der Querschnittsfläche A und der Länge L integrieren. Wir nehmen hier an, dass \vec{j} , σ und \vec{E} homogen sind.



Es folgt

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV j_x = \iiint_{\mathcal{V}} dV \sigma E_x \quad (6.71)$$

$$\Rightarrow L \iint ds j_x = \sigma A \int dl E_x \quad (6.72)$$

$$\Rightarrow L \iint d\vec{s} \cdot \vec{j} = \sigma A \int d\vec{l} \cdot \vec{E} \quad (6.73)$$

$$\Rightarrow LI = \sigma AU \quad (6.74)$$

$$\Rightarrow I = \frac{\sigma A}{L} U =: GU \quad (6.75)$$

mit dem *Leitwert* G bzw.

$$U = \frac{L}{\sigma A} I = \frac{I}{G} =: RI \quad (6.76)$$

mit dem *Widerstand* R .

Kapitel 7

Elektrodynamik

Bisher hatten wir zeitunabhängige Felder beschrieben, die von stationären Ladungen und Strömen erzeugt werden. Die dazu nötigen mikroskopischen Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (7.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \quad (7.2)$$

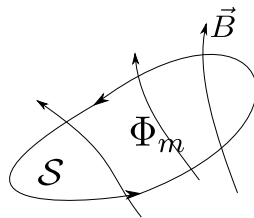
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (7.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad (7.4)$$

enthalten für gegebene ρ und \vec{j} keine Kopplung zwischen elektrischen und magnetischen Feldern. Eine Kopplung kommt höchstens dadurch zustande, dass die Stromdichte \vec{j} vom elektrischen Feld \vec{E} abhängt, z. B. über das Ohmsche Gesetz. Im Folgenden wollen wir *zeitabhängige* Phänomene behandeln. Experimente von Faraday und Nachfolgern zeigten, dass zeitlich veränderliche Magnetfelder elektrische Felder *induzieren*. Daher müssen in der Beschreibung zeitabhängiger Felder Gleichungen auftreten, die \vec{E} und \vec{B} koppeln.

7.1 Das Faradaysche Induktionsgesetz

Experimente von Michael Faraday zeigten, dass in einer Leiterschleife ∂S ein elektrischer Strom I erzeugt wird, wenn sich der magnetische Fluss Φ_m durch die Schleife zeitlich ändert.



Dies ist unabhängig davon, wie diese Änderung bewirkt wird, z. B. ob man einen Permanentmagneten relativ zur Schleife bewegt oder umgekehrt oder die Leiterschleife verformt oder den Strom in einer zweiten, benachbarten Schleife ändert. Dies zeigt, dass wirklich die Flussänderung die relevante Größe ist. Man sagt, der Strom I in der Leiterschleife wird *induziert*. Es muss eine Kraft existieren, die diesen Strom gegen den Widerstand der Schleife antreibt. Ist die Leiterschleife in Ruhe, kann dies keine magnetische Lorentz-Kraft $q \vec{v} \times \vec{B}$ sein, da diese die Ladungen nur senkrecht zur Geschwindigkeit und damit zum Strom ablenkt. Daher muss es sich um eine *elektrische* Kraft $q \vec{E}$ handeln. Der fundamentale Prozess ist also die Induktion eines elektrischen Feldes \vec{E} entlang der Schleife durch die Änderung des magnetischen Flusses.

Bewegt sich hingegen die Leiterschleife, so gibt dies den Ladungsträgern eine zusätzliche Geschwindigkeit. Wenn die Bewegung nicht genau parallel zur Schleife erfolgt, hat diese Geschwindigkeit eine Komponente senkrecht

zum Strom, die in einem Magnetfeld zu einer Komponenten der magnetischen Lorentz-Kraft *parallel* zum Strom führen kann. Im allgemeinen tragen elektrische und magnetische Kraft zum induzierten Strom bei.

Die quantitative Auswertung der Experimente ergibt, dass das \vec{E} -Feld proportional zur Rate ist, mit der sich der Fluss ändert. Genauer findet man, dass der induzierte Strom über das Ohmsche Gesetz proportional ist zu einer sogenannten *elektromotorischen Kraft* \mathcal{E} , die gleich ist zur Zeitableitung des magnetischen Flusses,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad \text{mit} \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (7.5)$$

Die elektromotorische Kraft ist aber schon einheitenmäßig keine Kraft, sondern eine Verallgemeinerung der Spannung auf den Fall nicht konservativer Felder.

Wir betrachten im Folgenden nur den Fall, dass sich die Leiterschleife nicht bewegt. Dann ist die den Strom antreibende Kraft rein elektrisch und die elektromotorische Kraft lässt sich als Linienintegral

$$\mathcal{E} = \oint_{\partial S} d\vec{l} \cdot \vec{E} \quad (7.6)$$

schreiben. Daraus folgt das *Faradaysche Induktionsgesetz*

$$\oint_{\partial S} d\vec{l} \cdot \vec{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S d\vec{s} \cdot \vec{B} = -\iint_S d\vec{s} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt}. \quad (7.7)$$

Oft nennt man auch Gl. (7.5) Faradaysches Gesetz und bezeichnet dann Gl. (7.7) als Faraday-Maxwell-Gesetz.

Wie üblich erwarten wir, dass das \vec{E} -Feld auch existiert, wenn wir es nicht messen. Damit gilt für *beliebige* berandete Flächen S :

$$\oint_{\partial S} d\vec{l} \cdot \vec{E} = -\iint_S d\vec{s} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt}. \quad (7.8)$$

Mit dem Stokesschen Satz folgt

$$\iint_S d\vec{s} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \iint_S d\vec{s} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right). \quad (7.9)$$

Da dies für beliebige Flächen gilt, folgt

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (7.10)$$

Das ist die differentielle Form des Faradayschen Induktionsgesetzes. Wir sehen, dass es elektrische und magnetische Felder miteinander koppelt. Daher sprechen wir von einem *elektromagnetischen* Feld mit Komponenten \vec{E} und \vec{B} . Das Faraday-Gesetz schafft also zum ersten Mal eine Vereinigung von Elektrizität und Magnetismus. Damit haben wir aber noch keine vollständige Beschreibung, wie der folgende Abschnitt zeigt.

7.2 Das Ampère-Maxwell-Gesetz

Wir fassen zunächst die bisher erhaltenen Gleichungen für das elektromagnetische Feld zusammen. In mikroskopischer Form lauten sie

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{Gauß für } \vec{E}), \quad (7.11)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad (\text{Faraday}), \quad (7.12)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Gauß für } \vec{B}), \quad (7.13)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (\text{Ampère}). \quad (7.14)$$

Haben wir damit eine korrekte Beschreibung der Dynamik des Feldes? Um dies zu prüfen, betrachten wir die Divergenz der Stromdichte:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} \stackrel{\text{Ampère}}{=} \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0. \quad (7.15)$$

Ladungserhaltung führt andererseits auf die Kontinuitätsgleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\dot{\rho}. \quad (7.16)$$

Es folgt $\dot{\rho} = 0$, also $\rho = \text{const}$; die obigen Gleichungen gelten also nur für zeitunabhängige Ladungsdichten. Für zeitabhängiges $\rho(\vec{r}, t)$ ergeben sie einen Widerspruch zur Kontinuitätsgleichung, d.h. sie verletzen die Ladungserhaltung.

James Clerk Maxwell hat diesen Widerspruch durch eine Ergänzung des Ampèreschen Gesetzes behoben. Wie muss dieses Gesetz ergänzt werden, um mit der Kontinuitätsgleichung vereinbar zu sein? Wir fügen einen Zusatzterm ein:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \vec{j}_V \quad (7.17)$$

(wir können diesen Term natürlich bezeichnen, wie wir wollen; die Schreibweise $\mu_0 \vec{j}_V$ erweist sich gleich als günstig). Dann muss gelten

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_V = \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})}_0 - \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \dot{\rho}. \quad (7.18)$$

Mit dem Gaußschen Gesetz ergibt sich

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_V = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{E}}. \quad (7.19)$$

Die einfachste Möglichkeit, diese Gleichung zu erfüllen, ist der Ansatz

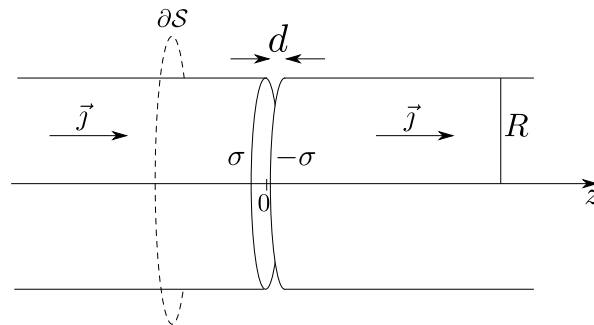
$$\vec{j}_V = \epsilon_0 \dot{\vec{E}}. \quad (7.20)$$

Im Prinzip könnte zu \vec{j}_V noch ein beliebiges Wirbelfeld addiert werden, aber Experimente zeigen, dass ein solcher Term nicht auftritt. Damit wird

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \dot{\vec{E}}. \quad (7.21)$$

Das ist das *Ampère-Maxwell-Gesetz*. Die Größe $\vec{j}_V = \epsilon_0 \dot{\vec{E}}$ nennt man den *Verschiebungsstrom*.

■ Beispiel: Gegeben sei ein dicker zylindrischer Leiter mit einer schmalen Lücke. Im Leiter fließe eine homogene Stromdichte \vec{j} :



Bestimme das \vec{B} -Feld außerhalb des Leiters.

Lösung: Der Strom lädt die Oberflächen beiderseits der Lücken auf (Kondensator!). Ladungserhaltung ergibt für die Gesamtladung

$$\dot{Q} = I \quad (7.22)$$

und

$$\dot{\sigma} = j_z. \quad (7.23)$$

Da die Lücke schmal ist, können wir Streufelder vernachlässigen. Daher ist das \vec{E} -Feld in der Lücke

$$\vec{E} = \hat{z} \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (7.24)$$

Die rechte Seite des Ampère-Maxwell-Gesetzes lautet $\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \dot{\vec{E}}$. Für Radien $\rho > R$ (in Zylinderkoordinaten) verschwindet sie. Für $\rho < R$ haben wir

$$\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \dot{\vec{E}} = \begin{cases} \mu_0 \vec{j} = \mu_0 j_z \hat{z} & \text{für } |z| > \frac{d}{2}, \\ \mu_0 \epsilon_0 \dot{\vec{E}} = \mu_0 \dot{\sigma} \hat{z} = \mu_0 j_z \hat{z} & \text{für } |z| < \frac{d}{2} \end{cases} \quad (7.25)$$

und damit für *alle* z

$$\dots = \mu_0 j_z \hat{z}. \quad (7.26)$$

Die Summe aus realem Strom und Verschiebungsstrom ist also translationsinvariant entlang z . Wir können daher das Ampère-Maxwell-Gesetz in Integralform in Analogie zum Ampèreschen Gesetz für einen dicken Draht leicht lösen: Für $\rho > R$ erhalten wir

$$\oint_{\partial S} d\vec{l} \cdot \vec{B} = \mu_0 \iint_S d\vec{s} \cdot j_z \hat{z} \Theta(R - \rho) \quad (7.27)$$

$$\Rightarrow 2\pi\rho B_\varphi = \mu_0 \pi R^2 j_z = \mu_0 I \quad (7.28)$$

$$\Rightarrow B_\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\rho} \quad (7.29)$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\rho} \hat{\varphi}. \quad (7.30)$$

7.3 Die Maxwell-Gleichungen

Mit den Überlegungen in Abschnitten 7.1 und 7.2 haben wir nun die vollständigen Bewegungsgleichungen für das elektromagnetische Feld gefunden. Diese nennt man zusammenfassend *Maxwell-Gleichungen*, obwohl sie in dieser Form nicht von Maxwell aufgeschrieben wurden; seine Veröffentlichung von 1864 enthält kompliziertere Gleichungen, die aber zur modernen Formulierung äquivalent sind. Zusammengefasst lauten die Gleichungen in mikroskopischer Form

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{Gauß für } \vec{E}), \quad (7.31)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad (\text{Faraday}), \quad (7.32)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Gauß für } \vec{B}), \quad (7.33)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \dot{\vec{E}} \quad (\text{Ampère-Maxwell}). \quad (7.34)$$

Es gibt keine allgemein übliche Reihenfolge der Gleichungen – Bezeichnungen wie „3. Maxwell-Gleichung“ sind daher nicht eindeutig und sollten vermieden werden. Die Maxwell-Gleichungen enthalten alles, was man über das klassische elektromagnetische Feld wissen kann. Sie definieren damit die klassische *Feldtheorie* des Elektromagnetismus. Beachte, dass die Gleichungen (7.31) und (7.34) inhomogen sind – die Inhomogenitäten sind ρ/ϵ_0 bzw. $\mu_0 \vec{j}$. Die anderen beiden sind homogen, wären aber auch inhomogen, wenn magnetische Monopole existieren würden.

Die inhomogenen Gleichungen implizieren – per Konstruktion – die Kontinuitätsgleichung:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{E}} = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \mu_0 \dot{\rho} \quad (7.35)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \dot{\rho} = 0, \quad (7.36)$$

diese muss also nicht als zusätzliche Gleichung gefordert werden.

In Materie erhalten wir analog die folgenden Gleichungen, die das Feld mit *freien* Ladungen und Strömen in Verbindung bringen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f, \quad (7.37)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}, \quad (7.38)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (7.39)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_f + \dot{\vec{D}}. \quad (7.40)$$

Man erkennt, dass die Faktoren in den Definitionen von \vec{D} und \vec{H} gerade so gewählt wurden, dass die Umrechnungsfaktoren ϵ_0 und μ_0 in den Maxwell-Gleichungen verschwinden. Die Gleichungen müssen ergänzt werden durch die Definitionen

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (7.41)$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}), \quad (7.42)$$

die ganz allgemein gelten. In *linearen* Medien gilt zusätzlich

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}, \quad (7.43)$$

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}, \quad (7.44)$$

und in linearen (ohmschen) Leitern gilt außerdem

$$\vec{j}_f = \sigma \vec{E}. \quad (7.45)$$

7.3.1 Potentiale

Wie in der Statik können wir die Felder durch Potentiale darstellen. Aus

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (7.46)$$

folgt die Existenz eines Vektorpotentials \vec{A} mit

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (7.47)$$

Nur ist jetzt \vec{B} und also auch \vec{A} zeitabhängig. Aus

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad (7.48)$$

folgt dann

$$0 = \vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = \vec{\nabla} \times (\vec{E} + \dot{\vec{A}}). \quad (7.49)$$

Also ist nun nicht mehr \vec{E} , sondern $\vec{E} + \dot{\vec{A}}$ wirbelfrei. Damit existiert ein skalares Potential ϕ mit

$$\vec{E} + \dot{\vec{A}} = -\vec{\nabla} \phi \quad (7.50)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \dot{\vec{A}}. \quad (7.51)$$

Das skalare Potential ist nun i. A. auch zeitabhängig. Die Vakuum-Maxwell-Gleichungen betreffen sechs Feldkomponenten $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$. Die Darstellung durch Potentiale zeigt aber, dass das elektromagnetische Feld gar nicht sechs unabhängige Komponenten hat. Die Zahl ist nun zunächst auf vier reduziert, da das Feld durch die vier Komponenten ϕ, A_x, A_y und A_z dargestellt werden kann.

7.3.2 Eichinvarianz

Wie schon mehrfach gesehen, ändert sich \vec{B} nicht, wenn wir zu \vec{A} einen Gradienten addieren:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla}\chi) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\chi}_0 = \vec{B}. \quad (7.52)$$

Nun fordern wir, dass sich auch \vec{E} nicht ändern soll. Für

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \quad (7.53)$$

ist dann aber

$$\vec{\nabla}\phi = -\vec{E} - \dot{\vec{A}} \rightarrow -\vec{E} - \dot{\vec{A}} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla}\chi = \vec{\nabla}\phi - \vec{\nabla}\dot{\chi}. \quad (7.54)$$

\vec{E} und \vec{B} ändern sich also nicht, wenn wir beide Potentiale gleichzeitig gemäß

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\chi, \quad (7.55)$$

$$\phi \rightarrow \phi - \dot{\chi} \quad (7.56)$$

transformieren. Dies ist eine allgemeine *Eichtransformation*. Da sie die beobachtbaren Felder \vec{E} und \vec{B} nicht ändert, ist das skalare „Umeichfeld“ $\chi(\vec{r}, t)$ aus Prinzip *unbeobachtbar*. Es beschreibt daher keine physikalischen Eigenschaften des Systems. Das elektromagnetische Feld hat daher nur *drei* Komponenten (drei *Freiheitsgrade* an jedem Ort \vec{r}), die vierte kann durch Wahl von $\chi(\vec{r}, t)$ beliebig und ohne Konsequenzen festgelegt werden.

Durch die Einführung der Potentiale sind die homogenen Maxwell-Gleichungen automatisch erfüllt. Wir drücken nun die inhomogenen Gleichungen (im Vakuum) durch die Potentiale aus. Das Gaußsche Gesetz lautet

$$-\nabla^2\phi - \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{A}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7.57)$$

und das Ampère-Maxwell-Gesetz

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \equiv \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j} - \mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla} \dot{\phi} - \mu_0 \epsilon_0 \ddot{\vec{A}}. \quad (7.58)$$

Es folgt

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (7.59)$$

$$\left(\nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \dot{\phi}) = -\mu_0 \vec{j}. \quad (7.60)$$

Das sieht ziemlich kompliziert aus.

Eine zusätzliche Bedingung, die ϕ und \vec{A} festlegt, nennt man *Eichbedingung*, die dadurch erfolgende Festlegung *Eichung*. Durch geeignete Eichungen können wir die Gleichungen vereinfachen:

1. *Coulomb-Eichung*: Wir fordern

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \quad (7.61)$$

Dann lautet die erste Gleichung

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (7.62)$$

Das ist identisch zur Poisson-Gleichung der Elektrostatik. Unter den üblichen (freien) Randbedingungen ist die Lösung bekannt:

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (7.63)$$

ϕ ist also das *instantan* von der Ladungsdichte ρ erzeugte Potential. Das widerspricht nicht der Erkenntnis, dass sich Wirkungen höchstens mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten können. Man kann zeigen, dass der

Beitrag von \vec{A} die unphysikalischen überlichtschnellen Wirkungen in beobachtbaren Größen weghebt. Für \vec{A} erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} \left(\nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} &= -\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla} \dot{\phi} \\ &= -\mu_0 \vec{j} + \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \iiint dV' \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= -\mu_0 \vec{j} - \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \iiint dV' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned} \quad (7.64)$$

mit einer nicht sehr einfachen Inhomogenität.

2. *Lorenz-Eichung*: Diese ist benannt nach Ludvig Lorenz (ohne „t“). Wir fordern

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \dot{\phi} = 0. \quad (7.65)$$

Dann lauten die inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$\left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (7.66)$$

$$\left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{A} = \mu_0 \vec{j}. \quad (7.67)$$

Die Gleichungen für ϕ , A_x , A_y , A_z sehen jetzt symmetrisch aus. Sie sind aber nicht entkoppelt, da die Eichbedingung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \dot{\phi} = 0$ sie verknüpft. Im Fall ohne Ladungen und Ströme erhalten wir

$$\left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi = 0, \quad (7.68)$$

$$\left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{A} = 0. \quad (7.69)$$

Das sind *Wellengleichungen* für ϕ , A_x , A_y , A_z . Sie beschreiben elektromagnetische Wellen, die sich mit einer noch unbekanntem Geschwindigkeit c ausbreiten. Der Ansatz

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi_0 \sin[k(x - ct)] \quad (7.70)$$

in einer Dimension ergibt

$$-\mu_0 \epsilon_0 k^2 c^2 \phi_0 \sin[k(x - ct)] + k^2 \phi_0 \sin[k(x - ct)] = 0 \quad (7.71)$$

$$\Rightarrow \mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1 \quad (7.72)$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \quad (7.73)$$

Die Geschwindigkeit der Wellen (die *Lichtgeschwindigkeit*) ist also $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$. Wir schreiben daher für die allgemeinen inhomogenen Gleichungen

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (7.74)$$

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{A} = \mu_0 \vec{j}. \quad (7.75)$$

Den Operator auf der linken Seite nennt man auch *d'Alembert-Operator*

$$\square := \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2, \quad (7.76)$$

jedoch bezeichnet \square manchmal auch das negative hiervon. Die Lorenz-Eichung ist einerseits günstig, weil sie auf symmetrische Gleichungen für ϕ und \vec{A} führt, und andererseits, weil sie mit der speziellen Relativitätstheorie kompatibel ist, wie wir noch sehen werden.

7.4 Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes

Wir wollen die Energie des Feldes im Rahmen der vollen Elektrodynamik betrachten. Das Feld übt auf eine Punktladung q die Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (7.77)$$

aus. Bei einer Verschiebung der Ladung um $d\vec{r}$ leistet das Feld die Arbeit

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = q\vec{E} \cdot d\vec{r}; \quad (7.78)$$

die magnetische Kraft leistet keine Arbeit, siehe Gl. (5.5): $q(d\vec{r}/dt \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = 0$. Die *Leistung* des Feldes an der Ladung ist also

$$\dot{W} \equiv \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v}. \quad (7.79)$$

Eine kontinuierliche Ladungsdichte $\rho(\vec{r}, t)$ zerlegen wir in infinitesimale Elemente ρdV . Dann ist die Kraftdichte

$$\vec{f} = \rho (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (7.80)$$

und die entsprechende Leistungsdichte

$$\dot{w} = \vec{f} \cdot \vec{v} = \rho\vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (7.81)$$

Die gesamte Leistung im Volumen \mathcal{V} ist

$$\dot{W} = \iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (7.82)$$

Dies ist die Energie pro Zeit, die das Feld an die Ladungen abgibt (wenn $\dot{W} > 0$). Sie wird also in *mechanische* Energie der Ladungen umgewandelt. Ohne weitere Kräfte ist dies *kinetische* Energie.

Wir schreiben die Leistungsdichte noch um: Im Vakuum ist nach dem Ampère-Maxwell-Gesetz

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \dot{\vec{E}} \quad (7.83)$$

und damit

$$\begin{aligned} \dot{w} = \vec{E} \cdot \vec{j} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \dot{\vec{E}} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \dot{\vec{E}} \quad \left| \text{Faraday} \right. \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \dot{\vec{B}} - \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \dot{\vec{E}} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right), \end{aligned} \quad (7.84)$$

also

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (7.85)$$

Diese Beziehung erinnert an die Kontinuitätsgleichung für die Ladung,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0, \quad (7.86)$$

nur steht jetzt rechts ein „Quellterm“. Tatsächlich können wir die neue Gleichung als Kontinuitätsgleichung für die Energie auffassen. Wir führen die *Energiedichte des elektromagnetischen Feldes* ein,

$$w_{\text{em}} := \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right), \quad (7.87)$$

wobei wir den ersten Term schon kannten, sowie die *Energiestromdichte* des Feldes, den sogenannten *Poynting-Vektor*

$$\vec{S} := \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}. \quad (7.88)$$

Dann erhalten wir

$$\frac{\partial w_{\text{em}}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (7.89)$$

Diese Gleichung nennt man auch *Poyntingsches Theorem*. Sie besagt, dass die Feldenergie nur bis auf den Term $-\vec{j} \cdot \vec{E}$ erhalten ist, der die Umwandlung in mechanische Energie und letztlich in „Joulesche Wärme“ beschreibt. In Integralform lautet das Poyntingsche Theorem

$$\dot{W}_{\text{em}} + \oint_{\partial V} d\vec{s} \cdot \vec{S} = - \iiint_V dV \vec{j} \cdot \vec{E}, \quad (7.90)$$

der zweite Term beschreibt offensichtlich den Energiefluss durch die Oberfläche des Volumens.

Wir können auch den *Impuls* des Feldes bestimmen. Dies ist etwas schwieriger, weil die Impulsdichte $\vec{\pi}$ selbst schon ein Vektorfeld ist und die Impulsstromdichte („Maxwellscher Spannungstensor“) daher ein Tensorfeld. Wir besprechen die Herleitung hier nicht. Jedoch können wir die Form der Impulsdichte mit einfachen Überlegungen ermitteln:

- Die Impulsdichte $\vec{\pi}$ ist ein Vektorfeld.
- Wir suchen die Impulsdichte des Feldes, nicht die der Ladungen, also können nur \vec{E} und \vec{B} explizit vorkommen, nicht ρ und \vec{j} .
- Die Impulsdichte hat die Dimension

$$\begin{aligned} \left[\frac{\text{Impuls}}{\text{Volumen}} \right] &= \left[\frac{ML}{TL^3} \right] = \left[\frac{M}{TL^2} \right] = \left[\frac{\frac{M}{T^3}}{\left(\frac{L}{T}\right)^2} \right] = \left[\frac{\frac{ML^2}{T^2} \frac{1}{T}}{L^2 \left(\frac{L}{T}\right)^2} \right] = \left[\frac{\frac{ML^2}{T^2} \frac{L}{T}}{L^3 \left(\frac{L}{T}\right)^2} \right] \\ &= \left[\frac{\text{Energie} \cdot \text{Geschwindigkeit}}{\text{Volumen} \cdot \text{Geschwindigkeit}^2} \right] = \left[\frac{\text{Energiestromdichte}}{\text{Geschwindigkeit}^2} \right]. \end{aligned} \quad (7.91)$$

Die einzige Form, die alle diese Bedingungen erfüllt, ist, bis auf einen so nicht bestimmbar Zahlenfaktor,

$$\vec{\pi} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} \equiv \mu_0 \epsilon_0 \vec{S} = \frac{\vec{S}}{c^2}. \quad (7.92)$$

Eine sorgfältige Herleitung zeigt, dass kein zusätzlicher Zahlenfaktor auftritt. Die Impulsdichte des Feldes ist also bis auf einen Faktor $1/c^2$ gleich dem Poynting-Vektor. Es ist plausibel, dass die Energiestromdichte in dieselbe Richtung zeigt wie die Impulsdichte. Der *lineare* Zusammenhang ergibt sich daraus, dass das elektromagnetische Feld masselos ist. Aus der Impulsdichte können wir sofort die *Drehimpulsdichte* des Feldes bestimmen, sie lautet

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{\pi}. \quad (7.93)$$

Der Drehimpuls und auch die Drehimpulsdichte hängen bekanntlich von der Wahl eines Bezugspunktes ab. Hier ist dies der Koordinatenursprung.

Ein wichtiger Aspekt der Ergebnisse ist, dass das elektromagnetische Feld überhaupt Energie, Impuls und Drehimpuls besitzt. Dies bestätigt die Vermutung, dass das Feld eine eigenständige physikalische Realität besitzt und nicht nur eine Hilfsgröße ist.

7.5 Elektromagnetische Wellen

Im Vakuum und ohne Ladungen und Ströme lauten die Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (7.94)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}, \quad (7.95)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (7.96)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \dot{\vec{E}} = \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}}. \quad (7.97)$$

Durch nochmalige Bildung der Rotation der zweiten und vierten Gleichung erhalten wir

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_0 - \nabla^2 \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \dot{\vec{B}} = -\frac{1}{c^2} \ddot{\vec{E}}, \quad (7.98)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}_0 - \nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \times \dot{\vec{E}} = -\frac{1}{c^2} \ddot{\vec{B}}. \quad (7.99)$$

Es folgt

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{E} = 0, \quad (7.100)$$

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{B} = 0, \quad (7.101)$$

dies sind *Wellengleichungen* für alle sechs Komponenten von \vec{E} und \vec{B} . Die Lösungen sind aber weiterhin verknüpft durch die Faraday- und Ampère-Maxwell-Gleichungen.

In einer Dimension hat die Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f(x, t) = 0 \quad (7.102)$$

eine sehr einfache *allgemeine* Lösung: Sind $f_-, f_+ : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ zwei zweimal stetig differenzierbare Funktionen, so ist

$$f(x, t) = f_-(x - ct) + f_+(x + ct) \quad (7.103)$$

eine Lösung der Wellengleichung. f_- beschreibt den nach rechts laufenden Anteil, f_+ den nach links laufenden Anteil.

In drei Dimensionen ist die Lösung nicht so einfach. Eine nützliche Lösungsmethode ist die Fourier-Transformation. Aus

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) f(\vec{r}, t) = 0, \quad (7.104)$$

worin f für eine der Komponenten von \vec{E} oder \vec{B} steht, ergibt sich durch räumliche Fourier-Transformation

$$\begin{aligned} 0 &= \iiint dV e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) f(\vec{r}, t) \\ &\stackrel{\text{partiell}}{=} \iiint dV \left[e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\vec{\nabla} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}) \cdot \vec{\nabla} \right] f(\vec{r}, t) \\ &\stackrel{\text{partiell}}{=} \iiint dV \left[e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\nabla^2 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}) \right] f(\vec{r}, t) \\ &= \iiint dV \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + k^2 \right) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} f(\vec{r}, t) = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + k^2 \right) f(\vec{k}, t). \end{aligned} \quad (7.105)$$

Oberflächenterme im Unendlichen wurden wie üblich weggelassen. Die räumliche Fourier-Transformierte $f(\vec{k}, t)$ erfüllt also die *gewöhnliche* Differentialgleichung

$$\ddot{f} = -k^2 c^2 f. \quad (7.106)$$

Diese hat die allgemeine Lösung

$$f = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (7.107)$$

mit

$$\omega := kc. \quad (7.108)$$

Es ist üblich und vereinfacht die Rechnungen, *komplexe* Lösungen der Wellengleichung zu betrachten. Die physikalischen Lösungen sind aber reell – sie ergeben sich als Realteil der komplexen Lösungen. In diesem Sinne lautet die allgemeine Lösung, für festes \vec{k} ,

$$f(\vec{k}, t) = f_-(\vec{k}) e^{-i\omega t} + f_+(\vec{k}) e^{i\omega t} \quad (7.109)$$

mit beliebigen \vec{k} -abhängigen Koeffizienten $f_{\pm}(\vec{k})$ und $\omega = kc$. Rücktransformation in den Ortsraum ergibt die allgemeine Lösung

$$f(\vec{r}, t) = \iiint \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} f(\vec{k}, t) = \iiint \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(f_-(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t} + f_+(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} + i\omega t} \right) \quad (7.110)$$

mit $\omega = kc$. Die allgemeine Lösung ist also die Superposition der *ebenen Wellen* proportional zu

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} \mp i\omega t}. \quad (7.111)$$

Sie haben alle die Phasengeschwindigkeit c . Es ist daher hinreichend, *eine* ebene Welle zu untersuchen; die allgemeine Lösung ergibt sich dann einfach als Superposition.

Wir machen den Ansatz

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}, \quad (7.112)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}. \quad (7.113)$$

Aus $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ folgt

$$i\vec{k} \times \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} = i\omega \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \quad (7.114)$$

$$\Rightarrow \vec{B}_0 = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_0 \stackrel{\omega = kc}{=} \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E}_0. \quad (7.115)$$

Aus $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}}$ folgt analog

$$i\vec{k} \times \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} = -\frac{i\omega}{c^2} \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \quad (7.116)$$

$$\Rightarrow \vec{E}_0 = -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \times \vec{B}_0 = -c \hat{k} \times \vec{B}_0. \quad (7.117)$$

Damit stehen \vec{k} (bzw. \hat{k}), \vec{E}_0 und \vec{B}_0 alle senkrecht aufeinander und bilden ein Rechtssystem. Wir haben damit gefunden, dass das \vec{E} -Feld und das \vec{B} -Feld im ladungsfreien Fall immer senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung stehen. Elektromagnetische Wellen sind somit *transversal*. Sind \hat{e}_1, \hat{e}_2 zwei Einheitsvektoren senkrecht zueinander und zu \hat{k} , so dass $\hat{k}, \hat{e}_1, \hat{e}_2$ ein Rechtssystem bilden, so erhalten wir als allgemeine elektromagnetische ebene Welle

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = (E_1 \hat{e}_1 + E_2 \hat{e}_2) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}, \quad (7.118)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{E_1 \hat{e}_2 - E_2 \hat{e}_1}{c} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}. \quad (7.119)$$

Sie enthält *zwei* unabhängige Amplituden E_1, E_2 , die den beiden möglichen Richtungen \hat{e}_1, \hat{e}_2 *linearer Polarisation* entsprechen. E_1 und E_2 sind i. A. komplex. Wir können schreiben

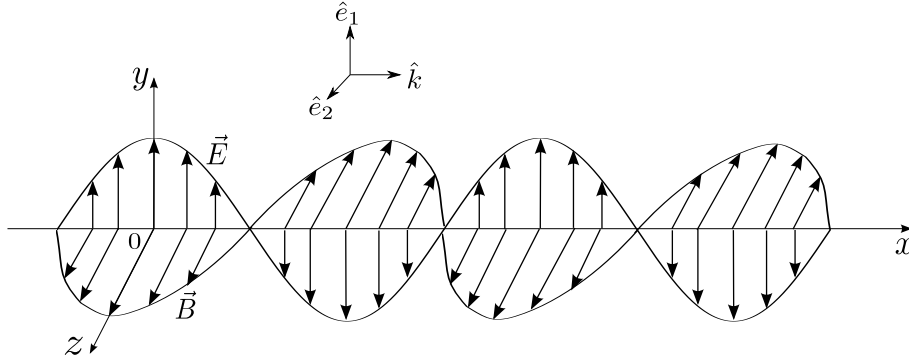
$$E_n = E_n^0 e^{i\varphi_n}, \quad n = 1, 2, \quad (7.120)$$

mit $E_n^0 \geq 0$. Dann lauten die Felder

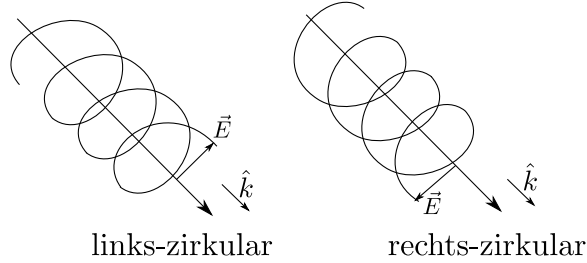
$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_1^0 \hat{e}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1)} + E_2^0 \hat{e}_2 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_2)}, \quad (7.121)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{E_1^0}{c} \hat{e}_2 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1)} - \frac{E_2^0}{c} \hat{e}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_2)}. \quad (7.122)$$

Beachte, dass nur die Realteile physikalisch sind. Für $\varphi_1 = \varphi_2$ ist die Welle *linear* polarisiert. Die Polarisations-ebene wird durch E_1^0 und E_2^0 festgelegt. Für den Fall $\hat{k} = \hat{x}$, $\hat{e}_1 = \hat{y}$, $\hat{e}_2 = \hat{z}$ und $E_2^0 = 0$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ist die Welle zum Zeitpunkt $t = 0$ hier skizziert:



Für $\varphi_2 = \varphi_1 \pm \pi/2$ und $E_1^0 = E_2^0$ ist die Welle *zirkular* polarisiert.



7.5.1 Energie und Impuls elektromagnetischer Wellen

Wir können nun leicht die Energie- und Impulsdichte der ebenen Wellen bestimmen. Diese Größen oszillieren mit der Kreisfrequenz $\omega = kc$. Im Allgemeinen interessiert man sich aber nur für zeitlich gemittelte Größen, die wir mit einem Überstrich bezeichnen. Bei der Rechnung ist wichtig, nur die reellen, physikalischen Felder zu berücksichtigen.

Der Einfachheit halber betrachten wir eine linear polarisierte Welle

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_1^0 \hat{e}_1 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1), \quad (7.123)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{E_1^0}{c} \hat{e}_2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1). \quad (7.124)$$

Die zeitlich gemittelte Energiedichte ist

$$\begin{aligned} \bar{w}_{\text{em}} &= \frac{1}{2} \overline{\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 (E_1^0)^2 \underbrace{\overline{\cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1)}}_{1/2} + \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{E_1^0}{c} \right)^2 \underbrace{\overline{\cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1)}}_{1/2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\epsilon_0 + \frac{\mu_0 \epsilon_0}{\mu_0} \right) (E_1^0)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 (E_1^0)^2, \end{aligned} \quad (7.125)$$

also quadratisch in der Feldamplitude. Die zeitlich gemittelte Energiestromdichte (Poynting-Vektor) ist

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \overline{\vec{E} \times \vec{B}} = \frac{1}{\mu_0} \frac{(E_1^0)^2}{c} \underbrace{\hat{e}_1 \times \hat{e}_2}_{\hat{k}} \underbrace{\overline{\cos^2(\hat{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)}}_{1/2} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{1}{c} (E_1^0)^2 \hat{k} = \frac{1}{2} c \epsilon_0 (E_1^0)^2 \hat{k} = \bar{w}_{\text{em}} \hat{k}. \quad (7.126)$$

Das ist sinnvoll, da \hat{k} die vektorielle Geschwindigkeit der Welle ist. Weiter ist die gemittelte Impulsdichte

$$\vec{\pi} = \frac{\vec{S}}{c^2} = \bar{w}_{\text{em}} \frac{\hat{k}}{c}. \quad (7.127)$$

7.5.2 Elektromagnetische Wellen in linearen Medien

Die Herleitung für lineare, isotrope Medien startet von den Maxwell-Gleichungen (ohne freie Ladungen und Ströme) in Materie und ist sonst weitgehend analog. Die Gleichungen lauten unter Verwendung von $\vec{B} = \mu \vec{H}$ und $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (7.128)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}, \quad (7.129)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (7.130)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \epsilon \dot{\vec{E}}. \quad (7.131)$$

Nur das Ampère-Maxwell-Gesetz ist unterschiedlich; $\mu_0 \epsilon_0$ ist durch $\mu \epsilon$ ersetzt. Wir schreiben

$$\mu \epsilon = \mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0 = \frac{\mu_r \epsilon_r}{c^2}. \quad (7.132)$$

In den Wellengleichungen für \vec{E} und \vec{B} ist einfach überall c durch

$$c_m := \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \quad (7.133)$$

ersetzt. Die *Lichtgeschwindigkeit im Medium* ist also c_m . In der Optik definiert man den *Brechungsindex* n durch

$$c_m =: \frac{c}{n}, \quad (7.134)$$

also finden wir

$$n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}. \quad (7.135)$$

In linearen, isotropen Medien verhalten sich elektromagnetische Wellen also ganz wie im Vakuum, nur propagieren sie mit der reduzierten Geschwindigkeit $c/\sqrt{\mu_r \epsilon_r}$. Unter Verwendung der Anschlussbedingungen für die Felder $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$ könnten wir jetzt herleiten, wie sich elektromagnetische Wellen an Grenzflächen zwischen linearen Medien verhalten. Daraus folgt das Snelliussche Brechungsgesetz. Überhaupt haben wir jetzt alle Voraussetzungen zusammen, um die gesamte *geometrische Optik* aus der Elektrodynamik herzuleiten. Durch Lösung der Maxwell-Gleichungen mit Randbedingungen, die undurchsichtige Körper (etwa aus leitenden Materialien) beschreiben, können wir im Prinzip auch alle Beugungsphänomene und damit die klassische Wellenoptik erhalten. Damit wird das Ziel erreicht, die historisch getrennten Gebiete Elektrizität, Magnetismus und Optik im Rahmen einer vereinigten Theorie zu beschreiben. Aus Zeitgründen können wir dies hier nicht weiter verfolgen, es sei stattdessen auf die anfangs genannten Lehrbücher verwiesen.

Kapitel 8

Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

In diesem letzten Kapitel wollen wir die relativistische Formulierung der Elektrodynamik besprechen. Wir werden sehen, dass dies ein kleinerer Schritt ist als in der Mechanik. Die Maxwellsche Elektrodynamik ist nämlich schon mit der Speziellen Relativitätstheorie vereinbar, d. h. sie ist *Lorentz-invariant*, wenn wir die Felder \vec{E} , \vec{B} und die Quellterme ρ , \vec{j} korrekt transformieren. Es geht also hauptsächlich darum, dies zu zeigen und die Elektrodynamik „kovariant“, also unter Verwendung von Lorentz-Skalaren, Vierervektoren usw., zu formulieren.

Historisch war die Maxwellsche Elektrodynamik die erste Lorentz-invariante (relativistische) Theorie. Die Erkenntnis dieser Invarianz war eine wesentliche Motivation für die Einsteinschen Postulate und die Entwicklung der relativistischen Mechanik, die zusammen mit der Elektrodynamik die spezielle Relativitätstheorie ausmachen. Das Ziel, nicht nur das elektromagnetische, sondern auch das Gravitationsfeld relativistisch zu beschreiben, führte schließlich auf die Allgemeine Relativitätstheorie. Wir werden zunächst wesentliche Konzepte und Schreibweisen der Speziellen Relativitätstheorie wiederholen, die schon in der Theoretischen Mechanik eingeführt wurden.

8.1 Spezielle Relativitätstheorie

Ein zentraler Begriff ist der des *Inertialsystems*. Ein Inertialsystem ist ein Bezugssystem, d. h. ein Koordinatensystem in der vierdimensionalen Raumzeit (dem *Minkowski-Raum*), in dem sich kräftefreie Körper geradlinig und gleichförmig bewegen. Die Existenz von Inertialsystemen wird von Newtons 1. Axiom postuliert. Einstein formulierte nun sinngemäß folgende Postulate:

1. *Äquivalenzpostulat*: Die physikalischen Gesetze sind in allen Inertialsystemen identisch. (Dieses Postulat ist noch nicht auf die relativistische Physik beschränkt.)
2. *Konstanz der Lichtgeschwindigkeit*: Die Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum ist zu allen Zeiten, an allen Orten und in jeder Raumrichtung gleich groß und insbesondere unabhängig von der Bewegung der Quelle. Damit ist $c = \text{const}$ ein physikalisches Gesetz im Sinne des Äquivalenzpostulats. Das 2. Postulat geht sogar darüber hinaus, da es $c = \text{const}$ auch für beschleunigte Bezugssysteme fordert. Es ist klar, dass die Elektrodynamik notwendig ist, um die Konsequenzen der Einsteinschen Postulate zu verstehen, da sie sich explizit auf elektromagnetische Wellen (Licht) beziehen.

In der Vorlesung Theoretische Mechanik wurde gezeigt, dass aus diesen Postulaten schon die Spezielle Relativitätstheorie konstruiert werden kann.

Die Transformation zwischen verschiedenen Inertialsystemen wird durch *allgemeine Lorentz-Transformationen* vermittelt. Diese bilden die *Lorentz-Gruppe* mit 6 Generatoren:

- Lorentz-Boosts für die Relativgeschwindigkeit \vec{v} in 3 unabhängigen Richtungen (bilden die *speziellen Lorentz-Transformationen*),

- räumliche Drehungen in 3 unabhängigen Ebenen.

Für Koordinaten \vec{r}, t im Inertialsystem \mathcal{S} und $\underline{\vec{r}}, \underline{t}$ im Inertialsystem $\underline{\mathcal{S}}$ lautet die spezielle Lorentz-Transformation (d. h. der Boost) für Relativgeschwindigkeit $\vec{v} = v \hat{x}$ (o. B. d. A.)

$$\underline{x} = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (8.1)$$

$$\underline{t} = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (8.2)$$

$$\underline{y} = y, \quad \underline{z} = z \quad (8.3)$$

und die Rücktransformation

$$x = \frac{\underline{x} + v\underline{t}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (8.4)$$

$$t = \frac{\underline{t} + \frac{v}{c^2}\underline{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (8.5)$$

Die Lorentz-Transformationen lassen sich als verallgemeinerte Rotationen von Vierervektoren auffassen. Den Viererortsvektor schreiben wir als

$$(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r}). \quad (8.6)$$

Wir verwenden hier die Schreibweise (x^μ) , wenn wir den *Vektor* meinen, und x^μ für die μ -te *Komponente*. Damit ist die obige spezielle Lorentz-Transformation

$$\underline{x}^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (8.7)$$

wobei wir die Einsteinsche Summenkonvention verwendet haben: Über identische obere und untere Indizes in Produkten wird summiert, hier über $\nu = 0, 1, 2, 3$. Konkret ist

$$(L^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.8)$$

(die Reihenfolge der oberen und unteren Indizes ist wichtig, wie wir sehen werden; „ $L^\mu{}_\nu$ “ wäre uneindeutig und ist daher nicht wohlgeformt) mit

$$\beta := \frac{v}{c}, \quad (8.9)$$

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (8.10)$$

Definitionen:

- *Kontravarianter Vektor* $(a^\mu) = (a^0, a^1, a^2, a^3)$: Transformiert sich wie der Ortsvektor (x^μ) ,

$$\underline{a}^\mu = \frac{\partial \underline{x}^\mu}{\partial x^\nu} a^\nu \equiv L^\mu{}_\nu a^\nu. \quad (8.11)$$

- *Kovarianter Vektor* $(a_\mu) = (a_0, a_1, a_2, a_3)$: Transformiert sich gemäß

$$\underline{a}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \underline{x}^\mu} a_\nu =: L_\mu{}^\nu a_\nu. \quad (8.12)$$

Es folgt mit Hilfe der Kettenregel

$$L^\mu{}_\nu L^\nu{}_\lambda = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\lambda} = \delta^\mu_\lambda, \quad (8.13)$$

wobei δ^μ_λ bis auf die Stellung der Indizes das gewöhnliche Kronecker-Symbol ist. In diesem Sinne sind die Matrizen $(L^\mu{}_\nu)$ und $(L_\mu{}^\nu)$ Inverse voneinander.

- Allgemeiner definiert man Tensoren 2., 3., usw. Stufe, wobei jeder Index kontra- oder kovariant sein kann. Z. B. transformiert sich $(A^{\mu\nu})$ gemäß

$$\underline{A}^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\sigma} A^{\rho\sigma} \equiv L^\mu{}_\rho L^\nu{}_\sigma A^{\rho\sigma} \quad (8.14)$$

und analog

$$\underline{A}_{\mu\nu} = L_\mu{}^\rho L_\nu{}^\sigma A_{\rho\sigma}, \quad (8.15)$$

$$\underline{A}^\mu{}_\nu = L^\mu{}_\rho L_\nu{}^\sigma A^\rho{}_\sigma, \quad (8.16)$$

$$\underline{A}_\mu{}^\nu = L_\mu{}^\rho L^\nu{}_\sigma A_\rho{}^\sigma. \quad (8.17)$$

Die Reihenfolge der Indizes ist wesentlich. Tensoren höherer Stufe benötigen wir hier nicht; die Transformation sind aber analog, z. B. $\underline{B}^{\lambda\mu\nu} = L^\lambda{}_\rho L^\mu{}_\sigma L^\nu{}_\tau B^{\rho\sigma\tau}$. Zu jedem kontravarianten Vektor existiert ein kovarianter Vektor und umgekehrt. Allgemeiner kann man alle Indizes von Tensoren zwischen kontravariant und kovariant umwandeln („heben“ oder „senken“). Dies erfolgt mit Hilfe des *metrischen Tensors* $(g_{\mu\nu})$:

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu, \quad (8.18)$$

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu, \quad (8.19)$$

$$A_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} A^\rho{}_\nu = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} A^{\rho\sigma} = g_{\nu\sigma} A_\mu{}^\sigma \quad (8.20)$$

usw. In der Speziellen Relativitätstheorie ist

$$(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8.21)$$

konstant in Raum und Zeit. Aus $(x^\mu) = (ct, \vec{r})$ folgt also

$$(x_\mu) = (ct, -\vec{r}). \quad (8.22)$$

In der Allgemeinen Relativitätstheorie ist $(g^{\mu\nu}(x^\lambda))$ hingegen ein dynamisches Feld.

- Das (verallgemeinerte) *Skalarprodukt* ist definiert durch

$$a^\mu b_\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = g_{\nu\mu} a^\mu b^\nu = a_\nu b^\nu. \quad (8.23)$$

Man findet

$$\underline{a}^\mu \underline{b}_\mu = L^\mu{}_\nu L_\mu{}^\lambda a^\nu b_\lambda \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\mu} a^\nu b_\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\nu} a^\nu b_\lambda = a^\nu b_\nu. \quad (8.24)$$

Das Skalarprodukt ist also invariant unter Lorentz-Transformationen (*Lorentz-invariant*).

- *Lorentz-Skalare* sind Größen, die sich unter Lorentz-Transformationen nicht ändern, z. B. Skalarprodukte.
- *Betragsquadrat*:

$$a^\mu a_\mu = g_{\mu\nu} a^\mu a^\nu = (a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2, \quad (8.25)$$

z. B. $x^\mu x_\mu = c^2 t^2 - \vec{r} \cdot \vec{r}$. Beachte, dass dieses (verallgemeinerte) Betragsquadrat negativ werden kann. Wir nennen einen Vierervektor (a^μ)

- *zeitartig*, wenn $a^\mu a_\mu > 0$,
- *lichtartig*, wenn $a^\mu a_\mu = 0$,
- *raumartig*, wenn $a^\mu a_\mu < 0$.

- *Vierergradient*:

$$\left(\frac{\partial}{\partial a^\mu} \right), \quad (8.26)$$

dieser Vektoroperator transformiert sich gemäß der Kettenregel wie

$$\frac{\partial}{\partial a^\mu} = \frac{\partial a^\nu}{\partial a^\mu} \frac{\partial}{\partial a^\nu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial a^\nu} = L_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial a^\nu}. \quad (8.27)$$

Vergleich mit Gl. (8.12) zeigt, dass sich die Ableitung nach einem *kontravarianten* Vektor wie ein *kovarianter* Vektor transformiert. Umgekehrt ist $\left(\frac{\partial}{\partial a_\mu} \right)$ ein *kontravarianter* Vektor. Speziell für raumzeitliche Gradienten schreiben wir

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (\text{kovariant}), \quad (8.28)$$

$$\partial^\mu := \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad (\text{kontravariant}). \quad (8.29)$$

Es ist

$$(\partial_\mu) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right), \quad (8.30)$$

$$(\partial^\mu) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right). \quad (8.31)$$

Beachte die umgekehrten Vorzeichen im Vergleich zu $(x_\mu) = (ct, -\vec{r})$, $(x^\mu) = (ct, \vec{r})$.

- *D'Alembert-Operator*:

$$\square := \partial_\mu \partial^\mu = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (8.32)$$

- Die *Eigenzeit* τ ist die von einer Uhr angezeigte Zeit, die von einem Massenpunkt mitgeführt wird. Diese Uhr befindet sich daher i. A. nicht in einem Inertialsystem. Für das Differential $d\tau$ der Eigenzeit gilt

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} \quad (8.33)$$

mit $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, wobei $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ hier die *momentane* Geschwindigkeit des Massenpunktes in einem gegebenen Inertialsystem (z. B. dem Laborsystem) mit den Koordinaten ct, \vec{r} ist. Die Beziehung beschreibt die *Zeitdilatation*: Es ist $\gamma > 1$ für $\vec{v} \neq 0$, daher läuft die mitgeführte Uhr (Eigenzeit) langsamer als die Laboruhr.

- Die *Vierergeschwindigkeit* ist

$$(u^\mu) := \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \left(\gamma \frac{dct}{dt}, \gamma \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = (\gamma c, \gamma \vec{v}). \quad (8.34)$$

- Der *Viererimpuls* ist

$$(p^\mu) := (m u^\mu). \quad (8.35)$$

Mit m bezeichnen wir immer die Ruhemasse, wir verwenden kein Konzept einer „geschwindigkeitsabhängigen Masse“. Man findet leicht

$$p^\mu p_\mu = m^2 u^\mu u_\mu = \gamma^2 m^2 (c^2 - \vec{v}^2) = \gamma^2 m^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = m^2 c^2. \quad (8.36)$$

Wir schreiben

$$(p^\mu) = (p^0, \vec{p}), \quad (8.37)$$

dann ist

$$p^\mu p_\mu = (p^0)^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2 \quad (8.38)$$

$$\Rightarrow (p^0)^2 = m^2 c^2 + \vec{p}^2 \quad (8.39)$$

$$\Rightarrow p^0 c = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}. \quad (8.40)$$

Der Limes für $v \ll c$ ergibt

$$p^0 c = mc^2 \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2}} \cong mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m}, \quad (8.41)$$

also die Ruheenergie mc^2 plus die nichtrelativistische kinetische Energie. Es liegt daher nahe, $p^0 c$ als relativistische Verallgemeinerung der Gesamtenergie des freien Teilchens zu betrachten:

$$E := \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2} \Rightarrow E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2. \quad (8.42)$$

Beachte, dass E die 0-Komponente eines Vierervektors ist und kein Lorentz-Skalar. E hängt also vom Inertialsystem ab, wie man auch erwartet.

Allgemein sollten physikalische Gesetze *kovariant formuliert* werden, d. h., sie sollten nur Lorentz-Skalare, Vierervektoren und entsprechende höhere Tensoren enthalten. Dann erfüllen sie automatisch die Einsteinschen Postulate. Es ist eine Schwäche der relativistischen Newton-Mechanik, dass sie mit nicht kovarianten Größen, wie der Energie E , operiert. Die Formulierung der Elektrodynamik, die wir nun besprechen werden, leidet nicht unter diesem Problem.

8.2 Viererdarstellung der Elektrodynamik

Die Maxwell-Gleichungen allein gestatten noch keine Entscheidung, ob die Maxwellsche Elektrodynamik Lorentz-invariant ist. Zusätzlich müssen wir ermitteln, wie sich die darin vorkommenden Felder \vec{E} , \vec{B} , ρ und \vec{j} Lorentz-transformieren. Mit anderen Worten, wir müssen diese Größen als Lorentz-Skalare, Vierervektoren und evtl. höhere Tensoren identifizieren. Wir verwenden weiterhin SI-Einheiten. Manche Autoren, wie J. D. Jackson, bevorzugen Gaußsche Einheiten für die relativistische Formulierung, da dann weniger Faktoren $1/c$ auftreten.

8.2.1 Die Kontinuitätsgleichung

Wir starten mit der für die Elektrodynamik grundlegenden Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0; \quad (8.43)$$

Ladungserhaltung sollte ja sicherlich in jedem Inertialsystem gleichermaßen gelten (1. Postulat). Die linke Seite hat die Form einer *Viererdivergenz*, wir können nämlich schreiben

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (8.44)$$

mit der *Viererstromdichte*

$$(j^\mu) := (\rho c, \vec{j}). \quad (8.45)$$

Die Kontinuitätsgleichung ist demnach Lorentz-invariant, wenn sich ρ und \vec{j} tatsächlich wie die zeitlichen bzw. räumlichen Komponenten eines Vierervektors transformieren, d. h. wenn

$$\underline{j}^\mu = L^\mu{}_\nu j^\nu \quad (8.46)$$

gilt. Dass das so ist, können wir uns wie folgt plausibel machen: Wir betrachten eine sich mit der lokalen Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r}, t)$ gegenüber dem Laborsystem \mathcal{S} bewegende Ladungsdichte

$$\rho = \frac{dQ}{dV}. \quad (8.47)$$

Die Stromdichte ist, unter der Annahme *einer* Teilchensorte (das Argument lässt sich verallgemeinern),

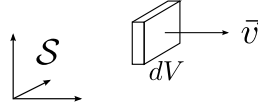
$$\vec{j} = \rho \vec{v}. \quad (8.48)$$

Wir wollen nun ρ und \vec{j} durch die *mitbewegte* Ladungsdichte ρ_0 ausdrücken, d. h. durch die Ladungsdichte in dem Bezugssystem, in dem dQ ruht. Es sei

$$\rho_0 = \frac{dQ}{dV_0}. \quad (8.49)$$

Aus Sicht des Laborsystems ist das Volumenelement in Bewegungsrichtung längenkontrahiert. Daher ist

$$dV = \frac{dV_0}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dV_0. \quad (8.50)$$



Damit ist die Dichte im Laborsystem erhöht:

$$\rho = \frac{dQ}{dV} = \gamma \frac{dQ}{dV_0} = \gamma \rho_0. \quad (8.51)$$

Es folgt auch

$$\vec{j} = \gamma \rho_0 \vec{v}. \quad (8.52)$$

Also ist

$$(j^\mu) = (\rho c, \vec{j}) = \rho_0 (\gamma c, \gamma \vec{v}) = \rho_0 (u^\mu) \quad (8.53)$$

mit der Vierergeschwindigkeit (u^μ). Da ρ_0 vorgegeben ist, transformiert sich (j^μ) wie (u^μ), also als Vierervektor.

8.2.2 Potentiale

Das Transformationsverhalten der sechs Feldkomponenten \vec{E} , \vec{B} ist nicht offensichtlich – wie sollen wir *sechs* Größen in Skalaren (eine Komponente), Vektoren (vier Komponenten) und Tensoren (16 Komponenten) unterbringen? Es ist günstig, zunächst die Potentiale ϕ , \vec{A} zu betrachten. Da dies vier Größen sind, von denen drei einen räumlichen Vektor bilden, liegt es nahe zu vermuten, dass sich ϕ und \vec{A} als Vierervektor schreiben lassen.

Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen lauten, ausgedrückt durch Potentiale, siehe Abschnitt 7.3.2,

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (8.54)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \dot{\phi} \right) = -\mu_0 \vec{j}. \quad (8.55)$$

Etwas umgeschrieben erhalten wir

$$-\frac{1}{\mu_0 c} \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \phi + \dot{\vec{A}} \right) = \rho c, \quad (8.56)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \partial_\mu \partial^\mu \vec{A} + \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c^2} \dot{\phi} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = \vec{j}. \quad (8.57)$$

Da die rechten Seiten einen Vierervektor $(\rho c, \vec{j})$ bilden, müssen dies auch die linken Seiten tun. Der Term $\dot{\phi}/c^2 + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ legt nahe, ein *Viererpotential*

$$(A^\mu) := \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right) \quad (8.58)$$

einzuführen, denn dann ist

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\phi}{c} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{c^2} \dot{\phi} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}. \quad (8.59)$$

Wir wollen die obigen Gleichungen mit (∂^μ) und (A^μ) ausdrücken. Wir betrachten dazu die spezielle zweite Ableitung $\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu$. Die zeitliche Komponente ($\nu = 0$) lautet

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu \frac{\phi}{c} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \dot{\phi} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) &= \cancel{\frac{1}{c^3} \dot{\phi}} - \frac{1}{c} \nabla^2 \phi - \cancel{\frac{1}{c^3} \dot{\phi}} - \frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{A}} \\ &= -\frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi + \dot{\vec{A}}) \stackrel{(8.56)}{=} \mu_0 \rho c \end{aligned} \quad (8.60)$$

und die räumlichen Komponenten ($\nu = 1, 2, 3$)

$$\partial_\mu \partial^\mu \vec{A} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c^2} \dot{\phi} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) \stackrel{(8.57)}{=} \mu_0 \vec{j}. \quad (8.61)$$

Damit haben wir gefunden

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \mu_0 j^\nu. \quad (8.62)$$

Wie schon gesagt, steht auf der rechten Seite ein Vierervektor und daher ist auch die linke Seite ein Vierervektor. Außerdem sind die Gradienten Vierervektoren. Daraus folgt, dass sich $(A^\mu) = (\phi/c, \vec{A})$ ebenfalls als Vierervektor transformieren muss, evtl. bis auf einen Term, der unter den Ableitungen wegfällt. Aber auf jeden Fall können wir die Lösung für (A^μ) als Vierervektor *wählen*.

Wir können auch leicht die allgemeine Eichtransformation kovariant aufschreiben:

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \chi, \quad (8.63)$$

$$\phi \rightarrow \phi - \dot{\chi} \quad (8.64)$$

ist einfach

$$A^\mu \rightarrow A^\mu - \partial^\mu \chi. \quad (8.65)$$

Allgemeine Eichtransformationen sind also mit der Lorentz-Invarianz verträglich, solange sich χ als Lorentz-Skalar transformiert, d. h. unter Lorentz-Transformation invariant bleibt.

Die speziellen Eichungen, die wir im letzten Kapitel besprochen hatten, sehen in Viererschreibweise wie folgt aus:

1. Coulomb-Eichung: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ bedeutet

$$\partial_1 A^1 + \partial_2 A^2 + \partial_3 A^3 = 0. \quad (8.66)$$

Das ist nicht Lorentz-invariant, da die 0-Komponente fehlt. Die Coulomb-Eichung in einem Inertialsystem ist also i. A. keine Coulomb-Eichung in einem anderen Inertialsystem.

2. Lorentz-Eichung: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \dot{\phi}/c^2 = 0$ lässt sich schreiben als

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (8.67)$$

Das ist offensichtlich Lorentz-invariant. Die Lorentz-Eichung bleibt also unter Lorentz-Transformation erhalten.

8.2.3 Der Feldstärketensor

Der in der (nun einzigen) inhomogenen Maxwell-Gleichung

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \mu_0 j^\nu \quad (8.68)$$

auftretende Tensor

$$F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (8.69)$$

wird *Feldstärketensor* genannt. Damit lautet die Gleichung

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu. \quad (8.70)$$

Dies impliziert wieder die Kontinuitätsgleichung und damit Ladungserhaltung: Aus der inhomogenen Gleichung folgt

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 \partial_\nu j^\nu. \quad (8.71)$$

Auf der linken Seite ist $(\partial_\mu \partial_\nu)$ symmetrisch und $(F^{\mu\nu})$ nach der Definition (8.69) antisymmetrisch. Daher gilt $\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = -\partial_\nu \partial_\mu F^{\nu\mu} = -\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu}$ (Umbenennung der Summationsindizes!) und die linke Seite muss verschwinden. Es folgt die Kontinuitätsgleichung $0 = \partial_\nu j^\nu$.

Wir bestimmen die Komponenten von $(F^{\mu\nu})$ explizit:

- Es ist offensichtlich

$$F^{00} = F^{11} = F^{22} = F^{33} = 0. \quad (8.72)$$

- Für die gemischt zeitlich-räumlichen Komponenten erhalten wir

$$\begin{aligned} F^{0i} &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A^i + \nabla_i \frac{\phi}{c} \quad \Big| \quad i = 1, 2, 3 \\ &= \frac{1}{c} (\nabla_i \phi + \dot{A}^i) = -\frac{1}{c} E_i \end{aligned} \quad (8.73)$$

und analog

$$\begin{aligned} F^{0i} &= -\nabla_i \frac{\phi}{c} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A^i \quad \Big| \quad i = 1, 2, 3 \\ &= -\frac{1}{c} (\nabla_i \phi + \dot{A}^i) = \frac{1}{c} E_i. \end{aligned} \quad (8.74)$$

- Für die rein räumlichen, nicht diagonalen Komponenten finden wir

$$\begin{aligned} F^{ij} &= -\nabla_i A^j + \nabla_j A^i \quad \Big| \quad i = 1, 2, 3, i \neq j \\ &= -\sum_k \epsilon_{ijk} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = -\sum_k \epsilon_{ijk} B_k. \end{aligned} \quad (8.75)$$

Das ist leichter an einem Beispiel zu verstehen:

$$F^{12} = -\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} = -B_z. \quad (8.76)$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.77)$$

Die zusammen mit \vec{E} auftretenden Faktoren $1/c$ sind dem (SI-) Einheitensystem geschuldet. In Gaußschen Einheiten treten sie nicht auf. Jedenfalls wäre es falsch, zu folgern, dass die \vec{E} enthaltenden Terme wegen dieser Faktoren „klein“ seien. Der Feldstärketensor ist per Definition antisymmetrisch, wie wir jetzt auch explizit sehen. Eine antisymmetrische 4×4 -Matrix hat sechs unabhängige Komponenten, was erklärt, warum \vec{E} und \vec{B} zusammen in drei Raumdimensionen sechs Komponenten haben. Allgemein in d Raumdimensionen wären es nicht $2d$ Komponenten, sondern $d(d+1)/2$ mit d im elektrischen Feld und $d(d-1)/2$ im magnetischen Feld. $d = 3$ Dimensionen sind also dadurch ausgezeichnet, dass \vec{E} - und \vec{B} -Feld gleich viele Komponenten haben. (Dies erinnert an die nicht relativistische klassische Mechanik, in der der Impuls d Komponenten hat, der Drehimpuls aber $d(d-1)/2$. Dies liegt daran, dass Translationen in d Raumrichtungen existieren, aber Rotationen in $d(d-1)/2$ Ebenen.)

Damit wissen wir jetzt, wie sich \vec{E} und \vec{B} Lorentz-transformieren, nämlich als Komponenten des Tensors 2. Stufe ($F^{\mu\nu}$):

$$\underline{F}^{\mu\nu} = L^\mu{}_\rho L^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}. \quad (8.78)$$

Mit etwas Rechnung findet man für einen Boost in x -Richtung

$$\underline{E}_x = E_x, \quad (8.79)$$

$$\underline{E}_y = \gamma(E_y - \beta c B_z), \quad (8.80)$$

$$\underline{E}_z = \gamma(E_z - \beta c B_y), \quad (8.81)$$

$$\underline{B}_x = B_x, \quad (8.82)$$

$$\underline{B}_y = \gamma\left(B_y + \frac{\beta}{c} E_z\right), \quad (8.83)$$

$$\underline{B}_z = \gamma\left(B_z - \frac{\beta}{c} E_y\right) \quad (8.84)$$

mit $\beta = v/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, wie üblich.

Wir betrachten nun das Feld einer sich gleichförmig bewegenden Punktladung. Im Laborsystem $\underline{\mathcal{S}}$ bewege sich eine Punktladung q mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v} = v \hat{x}$. \mathcal{S} sei das mitbewegte System. In diesem soll die Ladung im Ursprung ruhen. Für $t = \underline{t} = 0$ sollen die Koordinatenursprünge zusammenfallen. Es ist also, in \mathcal{S} ,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (8.85)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = 0. \quad (8.86)$$

Das Laborsystem $\underline{\mathcal{S}}$ bewegt sich gegenüber \mathcal{S} mit der Geschwindigkeit $-v \hat{x}$. Es folgt

$$\underline{E}_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{r^3}, \quad (8.87)$$

$$\underline{E}_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma \frac{y}{r^3}, \quad (8.88)$$

$$\underline{E}_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma \frac{z}{r^3}, \quad (8.89)$$

$$\underline{B}_x = 0, \quad (8.90)$$

$$\underline{B}_y = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma\beta}{c} \frac{z}{r^3}, \quad (8.91)$$

$$\underline{B}_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma\beta}{c} \frac{y}{r^3}. \quad (8.92)$$

Also gilt

$$\vec{B} = \beta \hat{x} \times \frac{\vec{E}}{c} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}. \quad (8.93)$$

Die Gleichungen (8.79)–(8.84) zeigen, dass dies im Fall $\vec{B} = 0$ ganz allgemein gilt. Ausgedrückt durch Koordinaten

im Laborsystem erhalten wir

$$\underline{E}_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma \frac{x - vt}{[\gamma^2(x - vt)^2 + \underline{y}^2 + \underline{z}^2]^{3/2}}, \quad (8.94)$$

$$\underline{E}_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma \frac{y}{[\gamma^2(x - vt)^2 + \underline{y}^2 + \underline{z}^2]^{3/2}}, \quad (8.95)$$

$$\underline{E}_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma \frac{z}{[\gamma^2(x - vt)^2 + \underline{y}^2 + \underline{z}^2]^{3/2}}. \quad (8.96)$$

Zum Zeitpunkt $\underline{t} = 0$ (o. B. d. A.) ist

$$\underline{E}_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma \frac{x}{[\gamma^2 x^2 + \underline{y}^2 + \underline{z}^2]^{3/2}}, \quad (8.97)$$

$$\underline{E}_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma \frac{y}{[\gamma^2 x^2 + \underline{y}^2 + \underline{z}^2]^{3/2}}, \quad (8.98)$$

$$\underline{E}_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma \frac{z}{[\gamma^2 x^2 + \underline{y}^2 + \underline{z}^2]^{3/2}}, \quad (8.99)$$

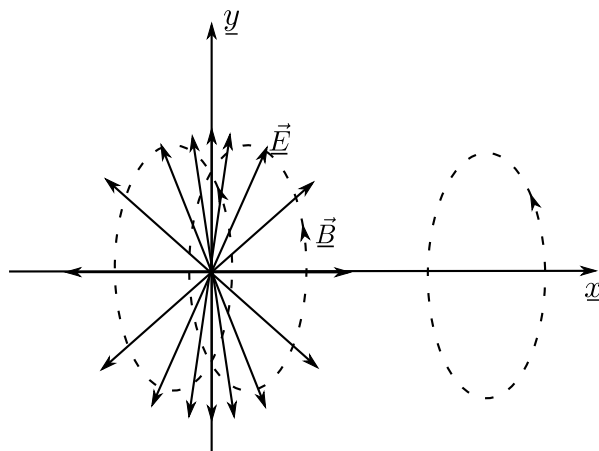
also

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma \frac{\vec{r}}{[\gamma^2 x^2 + \underline{y}^2 + \underline{z}^2]^{3/2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{[\gamma^{4/3} x^2 + \gamma^{-2/3} \underline{y}^2 + \gamma^{-2/3} \underline{z}^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (8.100)$$

Das \vec{E} -Feld ist also *radial*, da parallel zu \vec{r} gerichtet. Es ist aber in Bewegungsrichtung gestaucht (wegen $\gamma^{4/3} > 1$) und in y - und z -Richtung gestreckt (wegen $\gamma^{-2/3} < 1$). Das \vec{B} -Feld ergibt sich am einfachsten aus

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} \quad \left| \quad \frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0 \right. \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{[\gamma^{4/3} x^2 + \gamma^{-2/3} \underline{y}^2 + \gamma^{-2/3} \underline{z}^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (8.101)$$

\vec{B} ist also *tangential* an Kreisen senkrecht zur Teilchenbahn (d. h. zu \vec{v}) und mit Mittelpunkten auf der Bahn.



Beachte, dass \vec{B} im Vergleich zu \vec{E} den einheitenlosen Faktor $\beta = v/c$ enthält. Daher ist es sinnvoll, für $v \ll c$ zu sagen, dass das magnetische Feld klein im Vergleich zum elektrischen sei. Im stark relativistischen Limes $v \approx c$ sind \vec{B} und \vec{E} in der Ebene konzentriert, die die Ladung enthält und senkrecht auf \vec{v} steht. Ein relativistisches

Teilchen trägt gewissermaßen eine harte Wand mit sich. Dies ist analog zur Schockwelle eines sich fast mit der Schallgeschwindigkeit bewegenden Flugzeugs.

Wir können natürlich auch den *kovarianten* Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}F^{\rho\sigma} \quad (8.102)$$

konstruieren. In ihm sind die Vorzeichen der \vec{E} -Komponenten umgekehrt. Aus $F^{\mu\nu}$ und $F_{\mu\nu}$ können wir einen Lorentz-Skalar bilden, also eine unter Lorentz-Transformation invariante Größe:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma} = 2 \left(B^2 - \frac{E^2}{c^2} \right). \quad (8.103)$$

Diese *Invariante des elektromagnetischen Feldes* bedeutet u. a., dass man nie ein reines elektrisches Feld ($F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} < 0$) in ein reines magnetisches Feld ($F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} > 0$) Lorentz-transformieren kann.

Zum Schluss wollen wir noch die *homogenen* Maxwell-Gleichungen kovariant ausdrücken. Wir haben einerseits

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (8.104)$$

$$\Rightarrow \partial_1 F^{32} + \partial_2 F^{13} + \partial_3 F^{21} = 0 \quad (8.105)$$

$$\Rightarrow \partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} = 0. \quad (8.106)$$

Andererseits ist

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0. \quad (8.107)$$

Wir betrachten die x -Komponente:

$$\frac{\partial}{\partial y} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y + \frac{\partial}{\partial t} B_x = 0 \quad (8.108)$$

$$\Rightarrow \partial_2 F^{30} + \partial_3 F^{02} + \partial_0 F^{32} = 0 \quad (8.109)$$

$$\Rightarrow -\partial^2 F^{30} - \partial^3 F^{02} - \partial^0 F^{23} = 0 \quad (8.110)$$

$$\Rightarrow \partial^2 F^{30} + \partial^3 F^{02} + \partial^0 F^{23} = 0. \quad (8.111)$$

Die übrigen beiden Komponenten ergeben sich analog. Zusammengefasst erhalten wir

$$\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{für } \alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1, 2, 3\} \text{ verschieden.} \quad (8.112)$$

Sind zwei der Indizes α, β, γ gleich, so erhalten wir eine Tautologie:

$$\partial^\alpha F^{\alpha\gamma} + \partial^\alpha F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma \underbrace{F^{\alpha\alpha}}_0 = \partial^\alpha \underbrace{(F^{\alpha\gamma} + F^{\gamma\alpha})}_0 = 0. \quad (8.113)$$

Wir müssen also den Fall mit gleichen Indizes nicht weiter beachten. Da sich die Gleichung (8.112) unter zyklischer Vertauschung nicht ändert, gibt es nur *vier* wesentlich verschiedene Wahlmöglichkeiten. Diese ergeben genau die vier Komponenten von $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ und $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$.

8.2.4 Der duale Feldstärketensor

Man kann die homogenen Maxwell-Gleichungen noch kompakter formulieren: Wir definieren den *dualen Feldstärketensor*

$$\tilde{F}^{\mu\nu} := \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (8.114)$$

mit dem antisymmetrischen Einheitstensor (Levi-Civita-Symbol) vierter Stufe

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{für } (\mu\nu\rho\sigma) \text{ gerade Permutationen von } (0123), \\ -1 & \text{für } (\mu\nu\rho\sigma) \text{ ungerade Permutationen von } (0123), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (8.115)$$

Man findet leicht

$$(\tilde{F}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & \frac{E_z}{c} & -\frac{E_y}{c} \\ B_y & -\frac{E_z}{c} & 0 & \frac{E_x}{c} \\ B_z & \frac{E_y}{c} & -\frac{E_x}{c} & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.116)$$

Im Vergleich zu $(F^{\mu\nu})$ sind also $\vec{E} \rightarrow c\vec{B}$ und $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}/c$ ersetzt worden. Die homogenen Maxwell-Gleichungen lauten jetzt

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (8.117)$$

Dies sehen wir wie folgt: Die Gleichung ist äquivalent zu

$$0 = \partial^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = \partial^\mu \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} = -\frac{1}{2} \epsilon_{\nu\mu\rho\sigma} \partial^\mu F^{\rho\sigma} \quad (8.118)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \epsilon_{\nu\mu\rho\sigma} \partial^\mu F^{\rho\sigma}. \quad (8.119)$$

Dies ist äquivalent zu Gl. (8.112). Die homogene Maxwell-Gleichung (8.117) ist nun von derselben Form wie die inhomogene Gleichung $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$. Die (verschwindenden) Quellen des dualen Feldes $\tilde{F}^{\mu\nu}$ wären die Komponenten der *magnetischen* (Monopol-) Viererstromdichte.

Mit dem dualen Feld können wir eine weitere Invariante konstruieren:

$$F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = -\frac{4}{c} \vec{E} \cdot \vec{B}. \quad (8.120)$$

Das gewöhnliche Skalarprodukt $\vec{E} \cdot \vec{B}$ ist also Lorentz-invariant. Das bedeutet z. B., dass, wenn in einem Inertialsystem das Feld rein magnetisch oder rein elektrisch ist, in jedem Inertialsystem \vec{E} und \vec{B} orthogonal sind. Außerdem folgt, dass für elektromagnetische Wellen im Vakuum \vec{E} und \vec{B} in jedem Inertialsystem orthogonal sind.

8.2.5 Elektromagnetische Wellen

Zum Schluss formulieren wir noch die Wellengleichung kovariant. In Abwesenheit von Ladungen und Strömen gilt

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad \wedge \quad \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} + \partial^\rho F^{\mu\nu} = 0. \quad (8.121)$$

Wir wollen $\partial_\mu \partial^\mu F^{\rho\sigma}$ mit Hilfe dieser Maxwell-Gleichungen berechnen. Beispielhaft betrachten wir die Komponente F^{01} :

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu F^{01} &= \partial_0 \partial^0 F^{01} + \partial_1 \partial^1 F^{01} + \partial_2 \partial^2 F^{01} + \partial_3 \partial^3 F^{01} \\ &= \partial^0 \left(-\partial_1 \underbrace{F^{11}}_{=0} - \partial_2 F^{21} - \partial_3 F^{31} \right) + \partial^1 \left(-\partial_0 \underbrace{F^{00}}_{=0} - \partial_2 F^{02} - \partial_3 F^{03} \right) \\ &\quad + \partial_2 \left(-\partial^0 F^{12} - \partial^1 F^{20} \right) + \partial_3 \left(-\partial^0 F^{13} - \partial^1 F^{30} \right) \\ &= -\left[\partial^0 \partial_2 (F^{21} + F^{12}) + \partial^0 \partial_3 (F^{31} + F^{13}) + \partial^1 \partial_2 (F^{02} + F^{20}) + \partial^1 \partial_3 (F^{03} + F^{30}) \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (8.122)$$

Analog finden wir für alle Außerdiagonalkomponenten $F^{\rho\sigma}$, dass $\partial_\mu \partial^\mu F^{\rho\sigma} = 0$. Die Diagonalkomponenten verschwinden ohnehin. Damit folgt

$$\partial_\mu \partial^\mu F^{\rho\sigma} \equiv \square F^{\rho\sigma} = 0. \quad (8.123)$$

Da die Komponenten $F^{\rho\sigma}$ i. W. die Komponenten von \vec{E} und \vec{B} sind, erhalten wir wieder Wellengleichungen für alle diese Komponenten.

In Abschnitt 7.5 hatten wir gefunden, dass für ebene Wellen gilt

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E}. \quad (8.124)$$

Daraus können wir sofort die beiden Invarianten des Feldes für den Fall einer ebenen Welle ablesen:

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2 \left(B^2 - \frac{E^2}{c^2} \right) = \frac{2}{c^2} (B^2 - E^2) = 0, \quad (8.125)$$

$$F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = -\frac{4}{c} \vec{E} \cdot \vec{B} = -\frac{4}{c^2} \vec{E} \cdot (\hat{k} \times \vec{E}) = 0. \quad (8.126)$$

Die erste Gleichung bedeutet, dass das elektrische und das Induktionsfeld einer elektromagnetischen Welle in jedem Inertialsystem in natürlichen Einheiten gleich groß sind. Das widerspricht der manchmal zu hörenden Behauptung, dass nur das elektrische Feld fundamental sei und das magnetische davon als relativistische Korrektur abgeleitet. Die zweite Gleichung wiederholt die Erkenntnis, dass \vec{E} und \vec{B} für eine Welle in jedem Inertialsystem senkrecht aufeinander stehen.