

# Partielle Differentialgleichungen

---

Carsten Timm

Sommersemester 2003

\*\*\* Version vom 4. Juli 2003 \*\*\*

Dieses Skript wurde für eine zweistündige Vorlesung über partielle Differentialgleichungen für Studierende der Physik im Hauptstudium erstellt. Die Vorlesung war von einstündigen Übungen begleitet. Die Übungsaufgaben sind, z.T. mit Lösungen, als App. B angefügt. In zwei Semesterwochenstunden kann es nur darum gehen, einen Überblick über wichtige Typen von Gleichungen zu geben und wichtige Lösungsmethoden einzuführen. Die Methoden werden i.A. an Hand von Beispielen erläutert. Es ist zu hoffen, dass diese Vorlesung den Studierenden ermöglicht, bei schwierigeren Problemen die Literatur schnell zu verstehen und anwendbar zu machen. Bei der Konzeption der Vorlesung wurde überwiegend das unten zitierte Buch *Partial Differential Equations* von Carrier und Pearson benutzt.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung und Definitionen</b>	<b>3</b>
1.1	Definition von partiellen Differentialgleichungen . . . . .	3
1.2	Klassifikation von partiellen Differentialgleichungen . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Die Diffusionsgleichung</b>	<b>6</b>
2.1	Separationsansatz . . . . .	8
2.2	Vollständige Funktionensysteme und Reihenentwicklung . . . . .	9
2.3	Maximumprinzip und Eindeutigkeit . . . . .	14
2.4	Laplace-Transformation . . . . .	15
2.5	Zusammenhang mit der Schrödinger-Gleichung . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Die Wellengleichung</b>	<b>23</b>
3.1	Separationsansatz . . . . .	25
3.2	Koordinatensysteme . . . . .	27
3.3	Integral-Transformationen . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Die Poisson-Gleichung und die Laplace-Gleichung</b>	<b>34</b>
4.1	Harmonische Funktionen . . . . .	35
4.2	Poisson-Integralformel . . . . .	36
4.3	Holomorphe Funktionen und konforme Abbildungen . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Klassifikation von linearen Gleichungen zweiter Ordnung</b>	<b>41</b>
5.1	Cauchy-Daten . . . . .	41
5.2	Charakteristiken und kanonische Formen . . . . .	43
<b>6</b>	<b>Gleichungen erster Ordnung</b>	<b>49</b>
6.1	Charakteristiken . . . . .	49
6.2	Allgemeine Gleichungen erster Ordnung . . . . .	53
6.3	Einhüllende und vollständiges Integral . . . . .	56
6.4	Eikonal-Gleichung . . . . .	58
6.5	Legendre-Transformationen . . . . .	60
6.6	Unstetigkeiten, schwache Lösungen . . . . .	62
<b>7</b>	<b>Störungstheorie</b>	<b>65</b>
7.1	Kleine Störungen der Gleichung . . . . .	65
7.2	Störung des Randes . . . . .	66
7.3	Singuläre Störungstheorie: Grenzschicht-Methode . . . . .	68
7.4	WKB-Näherung . . . . .	70

<b>8</b>	<b>Green-Funktionen</b>	<b>72</b>
8.1	Die Greenschen Sätze . . . . .	72
8.2	Green-Funktionen für die Poisson-Gleichung . . . . .	73
8.3	Wellengleichung . . . . .	75
8.4	Green-Funktionen für weitere Gleichungstypen . . . . .	76
<b>9</b>	<b>Variationsrechnung</b>	<b>79</b>
9.1	Euler-Gleichungen . . . . .	79
9.2	Variationsprinzip zu gegebener Differentialgleichung . . . . .	81
<b>10</b>	<b>Näherungsmethoden</b>	<b>84</b>
10.1	Rayleigh-Ritz'sches Variationsverfahren . . . . .	84
10.2	Galerkin-Methode . . . . .	85
10.3	Finite Elemente . . . . .	86
10.4	Differenzgleichungen . . . . .	88
10.5	Monte-Carlo-Verfahren . . . . .	92
<b>A</b>	<b>Literatur</b>	<b>94</b>
<b>B</b>	<b>Aufgaben</b>	<b>95</b>
B.1	Klassifikation von Partiellen Differentialgleichungen . . . . .	95
B.2	Wärmeleitungsgleichung mit Neumann-Randbedingungen . . . . .	95
B.3	Wärmeleitungsgleichung mit Relaxation . . . . .	96
B.4	Diffusions-Konvektions-Gleichung . . . . .	96
B.5	Wärmeleitungsgleichung und Separation in zwei Dimensionen . . . . .	97
B.6	Diffusionsgleichung und Separation in drei Dimensionen . . . . .	98
B.7	Laplace-Transformation 1 . . . . .	99
B.8	Laplace-Transformation 2 . . . . .	100
B.9	Wellengleichung in der Elektrodynamik . . . . .	100
B.10	Quadratische Membran . . . . .	101
B.11	Zusammenhang der Lösungen von Poisson- und Laplace-Gleichung . . . . .	101
B.12	Zusammenhang zwischen holomorphen und harmonischen Funktionen . . . . .	102
B.13	Charakteristiken in mehr als zwei Dimensionen . . . . .	103
B.14	Quasilineare Gleichung . . . . .	105
B.15	Störungstheorie . . . . .	106
B.16	Green-Funktion für die Poisson-Gleichung auf einem Quadrat . . . . .	108

# 1 Einführung und Definitionen

Warum interessieren wir uns für partielle Differentialgleichungen (PDG's)? Viele physikalische Gesetze lassen sich in Form von PDG's formulieren. **Beispiele:**

- Euler-Lagrange-Gleichungen und Hamiltonsche Gleichungen in der Kontinuumsmechanik,<sup>1</sup>
- die Maxwell-Gleichungen, Wellengleichung usw. in der Elektrodynamik,
- die Schrödinger-, Klein-Gordon- und Dirac-Gleichungen in der Quantenmechanik,
- die Boltzmann-Gleichung und viele andere in der Statistischen Physik und
- die Navier-Stokes-Gleichung usw. in der Hydrodynamik.

In der Geophysik und Astrophysik, aber auch in Ökologie, Sozial- und Wirtschaftswissenschaften lassen sich ebenfalls Gesetzmäßigkeiten zumindest näherungsweise durch PDG's beschreiben. Es ist daher wichtig, einen Überblick über typische Formen von PDG's und geeigneten Lösungsmethoden zu gewinnen. In dieser Vorlesung soll ein solcher Überblick gegeben werden. Das Gewicht liegt dabei auf in der Praxis anwendbaren Lösungsmethoden, nicht auf eher mathematisch interessanten Eigenschaften, wie Existenz- und Eindeutigkeitssätzen. Bei der Erstellung dieses Skripts wurde besonders das in der Literaturliste genannte Buch von Carrier und Pearson verwendet.

## 1.1 Definition von partiellen Differentialgleichungen

Was sind PDG's? Zunächst eine Erinnerung an partielle Ableitungen: Sei  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  eine (reell- oder komplexwertige) Funktion von  $x_1, \dots, x_n$ , dann ist die partielle Ableitung von  $u$  nach  $x_i$  an der Stelle  $(x_1, \dots, x_n)$  definiert als

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{u(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \epsilon, x_{i+1}, \dots, x_n) - u(x_1, \dots, x_n)}{\epsilon}, \quad (1.1)$$

sofern der Grenzwert existiert. In diesem Fall heißt die Funktion *differenzierbar* nach  $x_i$ . Ist die partielle Ableitung stetig, nennt man  $u$  *stetig differenzierbar* nach  $x_i$ . Oben haben wir genauer eine rechtsseitige Ableitung definiert; ist  $u$  stetig differenzierbar, ist dies aber unerheblich.

Praktisch bildet man partielle Ableitungen wie gewöhnliche Ableitungen, wobei man alle übrigen unabhängigen Variablen als Konstanten betrachtet. **Beispiel:**

$$u(x, y) = xy^2 + ay, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy + a. \quad (1.2)$$

Mehrfache Ableitungen wie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \text{etc.} \quad (1.3)$$

sind durch hintereinander ausführen der Ableitungen (von rechts nach links) definiert. Für stetig differenzierbare Funktionen kommt es nicht auf die Reihenfolge an. Wir nehmen in dieser Vorlesung immer an, dass die vorkommenden Funktionen hinreichend oft stetig differenzierbar sind, falls nichts anderes ausdrücklich gesagt wird.

Wir benutzen die folgende in der Theorie der PDG's gängige Kurzschreibweise:

$$u_x := \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xx} := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} := \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad (1.4)$$

und so weiter.

Eine *partielle Differentialgleichung* ist eine Gleichung, die eine Funktion  $u$  von mehreren Variablen  $x_1, \dots, x_n$  und partielle Ableitungen dieser Funktion nach mindestens *zwei* Variablen enthält.<sup>2</sup> In den meisten Fällen ergibt sich aus dem zugrunde liegenden physikalischen Problem noch der Definitionsbereich  $D$  von  $n$ -Tupeln  $(x_1, \dots, x_n)$ , auf dem die Gleichung gelten soll, und geeignete *Randbedingungen* für  $u$  auf dem Rand  $\partial D$  von  $D$  (und evtl. an Punkten im Inneren). Der Bereich  $D$  kann endlich oder unendlich sein. Wir kommen darauf zurück, was "geeignete" Randbedingungen sind.

<sup>1</sup>In der Mechanik von diskreten Teilchen sind diese Gleichungen *gewöhnliche* Differentialgleichungen mit der Zeit als einziger unabhängiger Variabler.

<sup>2</sup>Enthält die Gleichung nur partielle Ableitungen nach einer Variablen, so handelt es sich um eine gewöhnliche Differentialgleichung, in der die übrigen Variablen nur als Parameter auftreten.

**Beispiel** (Laplace-Gleichung):

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1.5}$$

für Funktionen  $u(x, y)$  im Bereich

$$0 < x < 1, \quad 0 < y < \infty \tag{1.6}$$

mit den Randbedingungen

$$u(0, y) = u(1, y) = 0, \quad u(x, 0) = \sin \pi x. \tag{1.7}$$

Eine *Lösung* einer gegebenen PDG ist eine hinreichend oft stetig differenzierbare Funktion  $u$ , die in jedem Punkt in  $D$  die PDG *und* die Randbedingungen erfüllt. In unserem Beispiel:

$$u = e^{-\pi y} \sin \pi x \tag{1.8}$$

ist eine Lösung, da

$$u_{xx} = -\pi^2 e^{-\pi y} \sin \pi x, \quad u_{yy} = \pi^2 e^{-\pi y} \sin \pi x, \quad u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1.9}$$

und auch die Randbedingungen erfüllt sind. Wir wissen aber noch nicht, ob das die einzige Lösung ist! Eventuell könnte es viele geben. Wir kommen auf die Frage der Eindeutigkeit zurück.

## 1.2 Klassifikation von partiellen Differentialgleichungen

Man klassifiziert PDG's nach einer Reihe von Kriterien:

1. *Anzahl der unabhängigen Variablen*
2. *Ordnung der PDG*: Die Ordnung einer PDG ist die Ordnung der höchsten auftretenden partiellen Ableitung. **Beispiele**:

$$\begin{aligned} u_x + uu_y &= \sin u && 1. \text{ Ordnung} \\ t u_t &= u_{xx} && 2. \text{ Ordnung} \\ u_{xxxx} + u_{xxyy} + u_{yyyy} &= x^2 y^2 && 4. \text{ Ordnung} \end{aligned} \tag{1.10}$$

Bemerkung: Das Auftreten weiterer, niedrigerer Ableitungen ist ohne Belang für die Klassifikation.

3. *Linearität*: Eine PDG heißt *linear*, wenn sie  $u$  und alle vorkommenden partiellen Ableitungen von  $u$  in linearer Ordnung enthält. Alle anderen PDG's heißen *nicht linear*. **Beispiele**:

$$\begin{aligned} u_x + uu_y &= \sin u && \text{nicht linear} \\ t u_t &= u_{xx} && \text{linear} \\ u_{xxxx} + u_{xxyy} + u_{yyyy} &= x^2 y^2 && \text{linear} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Bemerkung: Nicht verwechseln mit der Ordnung!

Wir werden es meistens mit linearen PDG's zu tun haben.

Die allgemeine Form einer linearen PDG zweiter Ordnung in zwei Variablen lautet offenbar:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G, \tag{1.12}$$

wobei  $A, B, C, D, E, F, G$  Funktionen von  $x$  und  $y$  *aber nicht* von  $u$  sind. Die Verallgemeinerung auf lineare Gleichungen mit mehr Variablen und anderer Ordnung ist trivial. Nun trifft man weitere Unterscheidungen für *lineare* PDG's:

4. *Homogenität*: Eine *lineare* PDG heißt *homogen*, wenn der von der gesuchten Funktion unabhängige Term ( $G$  im obigen Fall) identisch verschwindet. Andernfalls heißt sie *inhomogen*.
5. *Art der Koeffizienten*: Eine *lineare* PDG heißt PDG *mit konstanten Koeffizienten*, wenn alle Koeffizienten von  $u$  und ihren Ableitungen konstant sind (*sic!*).

Lineare, homogene PDG haben eine sehr wichtige Eigenschaft, die durch das *Superpositionsprinzip* ausgedrückt wird: Sind  $u$  und  $v$  zwei Lösungen einer linearen, homogenen PDG, so ist  $au + bv$  für beliebige konstante  $a$  und  $b$  ebenfalls eine Lösung – aber nicht unbedingt zu denselben Randbedingungen. Der Beweis ist elementar, z.B. für den Fall von Gl. (1.12): Aus

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = 0 \quad \text{und}, \tag{1.13}$$

$$Av_{xx} + Bv_{xy} + Cv_{yy} + Dv_x + Ev_y + Fv = 0 \tag{1.14}$$

folgt durch Multiplikation mit  $a$  bzw.  $b$  und Addition die Behauptung.

Schließlich existiert für lineare PDG *zweiter Ordnung* noch eine wichtige Unterscheidung. Wir führen sie zunächst für den Fall zweier Variabler ein, vgl. Gl. (1.12), und verallgemeinern sie später.

Wir definieren dazu die *Diskriminante* der Gleichung (1.12) als  $B^2 - 4AC$ . Dann unterscheidet man drei Fälle:

1. für  $B^2 - 4AC > 0$  heißt die PDG *hyperbolisch*,
2. für  $B^2 - 4AC = 0$  heißt die PDG *parabolisch*,
3. für  $B^2 - 4AC < 0$  heißt die PDG *elliptisch*.

Beachte, dass die Diskriminante i.A. von  $x$  und  $y$  abhängt, es sei denn die Koeffizienten sind konstant. Insbesondere kann der Charakter der Gleichung innerhalb des Definitionsbereichs wechseln. In praktisch vorkommenden PDG's tritt diese Situation aber kaum auf. **Beispiele:**

$$\begin{array}{lll} u_{xx} - u_{yy} + xu_x & = & y \quad \text{hyperbolisch} \\ u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} & = & au \quad \text{parabolisch} \\ y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy} & = & e^{-ct} \quad \text{elliptisch} \end{array} \quad (1.15)$$

## 2 Die Diffusionsgleichung

Zunächst betrachten wir die PDG

$$u_t = a^2 u_{xx}. \quad (2.1)$$

Dies ist eine PDG mit zwei unabhängigen Variablen  $x, t$ , wobei wir die zweite  $t$  nennen, weil wir sie als Zeit interpretieren können. Die Gleichung ist von zweiter Ordnung, linear mit konstanten Koeffizienten (wenn  $a$  nicht von  $x, t$  abhängt), homogen und parabolisch. Es handelt sich um die *Diffusionsgleichung* oder auch *Wärmeleitungsgleichung* in einer Raumdimension.

Zum anschaulichen Verständnis der Diffusionsgleichung siehe Abb. 1: Wegen

$$u_{xx} \cong \frac{u(x - \Delta x, t) + u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t)}{\Delta x^2} = \frac{2}{\Delta x^2} \left[ \frac{u(x - \Delta x, t) + u(x + \Delta x, t)}{2} - u(x, t) \right] \quad (2.2)$$

beschreibt  $u_{xx}$  die Abweichung der Funktion gegenüber benachbarten Punkten  $x \pm \Delta x$ . Ist  $u$  größer (kleiner) als dieser Mittelwert, so verringert (erhöht) sich  $u$  mit der Zeit. Die Geschwindigkeit dieser Änderung ist in der Diffusionsgleichung proportional zur Abweichung.

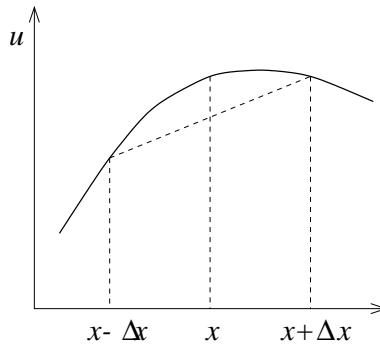


Abbildung 1: Bei der Diffusionsgleichung für  $u(x, t)$  ist die Geschwindigkeit  $u_t$  der Änderung von  $u$  proportional zur lokalen Abweichung von  $u$  gegenüber der Umgebung.

Wir wollen zunächst eine etwas allgemeinere Version der Diffusionsgleichung für einen physikalisch relevanten Fall herleiten. Wir betrachten einen dünnen Metalldraht der Länge  $L$ . Sei  $x$  die Koordinate entlang des Drahtes. Die Leitungselektronen in einem Metall bewegen sich gleichförmig bis sie an Gitterschwingungen oder Gitterfehlern gestreut werden. Die mittlere Zeit zwischen zwei Streuungen eines Elektrons heißt Streuzzeit  $\tau$ . Den mittleren Weg, den ein Elektron dabei zurück legt, nennt man mittlere freie Weglänge  $l$ . Betrachtet man Zeitskalen  $t \gg \tau$  und Längenskalen  $s \gg l$ , so kann man die Bewegung der Elektronen durch eine Diffusionsgleichung beschreiben.

Das sehen wir wie folgt: Wir denken uns den Draht eingeteilt in kurze Abschnitte der Länge  $\Delta x$ . Da  $\Delta x$  klein als angenommen wird, können wir die Gesamtladung  $Q$  in dem Abschnitt bei  $x$  schreiben als

$$Q(x, t) = \rho(x, t) A \Delta x, \quad (2.3)$$

wobei  $\rho$  die lokale Ladungsdichte und  $A$  die Querschnittsfläche ist. Die zeitliche Änderung der Ladung ist  $Q_t = \rho_t A \Delta x$ . Andererseits können unter Ausnutzung der *Ladungserhaltung* wir die Ladungsänderung durch den elektrischen Strom ausdrücken:  $Q_t$  ist gleich dem Strom, der (in positiver Richtung) durch den Querschnitt bei  $x$  fließt *minus* dem Strom, der (in positiver Richtung) durch den Querschnitt bei  $x + \Delta x$  fließt:

$$Q_t(x, t) = I(x, t) - I(x + \Delta x, t). \quad (2.4)$$

Wie bestimmen wir nun den Strom? Eine plausible Annahme ist, dass der Strom aus Bereichen hoher Ladungsdichte in Bereiche niedrigerer Dichte fließt. Das einfachste entsprechende Modell setzt den Strom proportional zur negativen Ableitung der Ladungsdichte:

$$I(x, t) = -k A \rho_x(x, t), \quad I(x + \Delta x, t) = -k A \rho_x(x + \Delta x, t) \quad (2.5)$$

mit  $k > 0$ . Dann ist

$$Q_t(x, t) = \rho_t(x, t) A \Delta x = k A [-\rho_x(x, t) + \rho_x(x + \Delta x, t)] = k A \rho_{xx}(x, t) \Delta x \quad (2.6)$$

und schließlich

$$\rho_t = k \rho_{xx}. \quad (2.7)$$

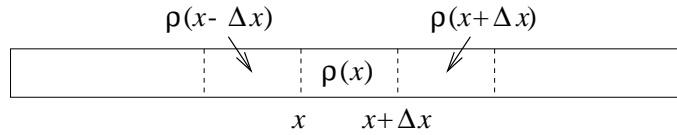


Abbildung 2: Zur Motivation der eindimensionalen Diffusionsgleichung.

Das ist von der Form von Gl. (2.1). Nehmen wir zusätzlich an, dass sich die Ladungsdichte auch durch (seitliche) Kontakte am Draht ändern kann, so ändert sich Gl. (2.6) in

$$Q_t(x, t) = kA\rho_{xx}(x, t)\Delta x + J(x, t), \quad (2.8)$$

wobei  $J$  der von außen einfließende Strom ist. Mit  $j := J/A\Delta x$  erhalten wir die *inhomogene Diffusionsgleichung*

$$\rho_t = k\rho_{xx} + j. \quad (2.9)$$

Die Diffusionsgleichung beschreibt unter analogen Bedingungen auch den Transport von anderen Teilchen, von Energie usw. Daher beschreibt sie auch

- Temperaturverteilung in Wärmeleitern,
- Konzentrationen von Stoffen in Fluiden usw.

Typische Randbedingungen lassen sich leichter für den Fall der Temperaturverteilung diskutieren. Wir betrachten also einen dünnen Stab der Länge  $L$ , der evtl. abgesehen von den Enden thermisch isoliert ist. Dann gehorchen die Temperatur und die innere Energiedichte der Diffusionsgleichung (Wärmeleitungsgleichung)

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (2.10)$$

(die Schreibweise  $a^2$  soll nur ausdrücken, dass dieser Faktor positiv ist). In einem typischen Experiment ist der Stab zu einem Anfangszeitpunkt, gewählt als  $t = 0$ , im thermischen Gleichgewicht mit einem Wärmebad der Temperatur  $T_0$ , die daher auch der Stab annimmt. Die entsprechende Randbedingung, oder besser *Anfangsbedingung* ist

$$u(x, 0) = T_0 \quad \text{für } 0 < x < L. \quad (2.11)$$

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  werden die Enden des Stabes plötzlich mit Heiz-/Kühlelementen in Kontakt gebracht, die die Enden auf Temperaturen  $T_1$  bzw.  $T_2$  halten. Dann

$$u(0, t) = T_1, \quad u(L, t) = T_2 \quad \text{für } t > 0. \quad (2.12)$$

Wie verhält sich nun die Temperatur im Inneren des Stabes als Funktion von  $x$  und  $t$ ?

Alternativ könnten wir das linke Ende auf der Temperatur  $T_1$  halten, das rechte aber thermisch isolieren. In diesem Fall kann durch das rechte Ende kein Wärmestrom fließen, also, nach obiger Herleitung,

$$u_x(L, t) = 0 \quad \text{für } t > 0. \quad (2.13)$$

Diese Randbedingung für den Rand  $x = L$ ,  $t > 0$  des Definitionsbereiches enthält die Ableitung der unbekannten Funktion senkrecht zum Rand. Diese nennt man auch *Normalenableitung*.

Schließlich können wir ein Ende oder beide Enden in Kontakt mit einem Wärmebad bringen, d.h. einem Körper beliebig großer Wärmekapazität, der sich anfangs bei einer bestimmten Temperatur im thermischen Gleichgewicht befindet. Diese Situation ist *nicht* identisch mit der Einstellung einer festen Temperatur. Typischerweise stellt sich auch innerhalb der Wärmebades ein Temperaturgradient ein.

Die entsprechende Randbedingung lautet, z.B. am linken Ende,

$$u(0, t) + au_x(0, t) = b. \quad (2.14)$$

Wir wollen dies hier nicht herleiten. Diese Randbedingung enthält eine Linearkombination der unbekannten Funktion  $u$  und ihrer Normalenableitung.

Allgemein unterscheidet man folgende Arten von Randbedingungen:

1. *Dirichlet-Randbedingungen*: die Funktion selbst ist vorgegeben,
2. *Neumann-Randbedingungen*: die Normalenableitung ist vorgegeben,

3. *gemischte lineare Randbedingungen* (auch Robin-Randbedingungen): eine Linearkombination der Funktion und ihrer Normalenableitung ist vorgegeben.

Alle drei bilden zusammen die *linearen* Randbedingungen. Sie lassen sich schreiben als

$$au + b \frac{\partial u}{\partial n} = c, \quad (2.15)$$

wobei  $\partial u / \partial n$  die Normalenableitung bezeichnet und  $a, b, c$  (hinreichend gutartige) Funktionen von  $x$  und  $t$  sind. Für  $c = 0$  spricht man von *linearen homogenen* Randbedingungen.

Ein gegebenes Problem kann auf unterschiedliche Typen von Randbedingungen an verschiedenen Rändern führen. Bei der Diffusionsgleichung ist es besonders naheliegend, dass die Typen von Randbedingungen verschieden sein können, da die beiden unabhängigen Variablen  $x$  und  $t$  unterschiedliche physikalische Bedeutungen haben.

## 2.1 Separationsansatz

Wir kommen nun endlich dazu, eine PDG explizit zu lösen und führen bei dieser Gelegenheit gleich eine wichtige Lösungsmethode ein, nämlich den Separationsansatz. Dieser läßt sich anwenden bei *linearen homogenen* Randbedingungen. Wir betrachten das **Beispiel**:

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (2.16)$$

für  $0 < x < 1$  und  $0 < t < \infty$  mit

$$u(x, 0) = \sin \pi x, \quad (2.17)$$

$$u(0, t) = 0, \quad (2.18)$$

$$u(1, t) = 0. \quad (2.19)$$

Der Separationsansatz lautet nun

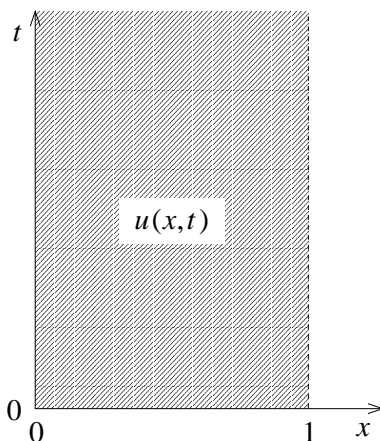


Abbildung 3: Definitionsbereich einer eindimensionalen Diffusionsgleichung.

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (2.20)$$

Einsetzen in die PDG ergibt

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t). \quad (2.21)$$

Die wesentliche Idee besteht nun darin, diese Gleichung durch  $u = XT$  (und aus praktischen Gründen auch durch  $a^2$ ) zu dividieren

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (2.22)$$

Nun hängt die linke Seite nur noch von  $t$  ab und die rechte nur noch von  $x$ . Wenn beide Seiten für alle  $x, t$  gleich sein sollen, müssen sie gleich einer Konstanten sein. Also muss es eine Konstante  $C$  geben, genannt *Separationskonstante*, so dass

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = C, \quad (2.23)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = C. \quad (2.24)$$



Diese beiden Gleichungen können wir schreiben als

$$T'(t) = a^2 CT(t), \quad (2.25)$$

$$X''(x) = CX(x). \quad (2.26)$$

Wir haben die PDG auf zwei *gewöhnliche* Differentialgleichungen zurückgeführt. Diese sind von einfachem Typ (linear, homogen, mit konstanten Koeffizienten) und wir können die allgemeinen Lösungen finden. Diese hängen vom Vorzeichen von  $C$  ab und wir machen eine Fallunterscheidung.

(1) Für  $C = \lambda^2 > 0$  erhalten wir (wir wählen  $\lambda > 0$ )

$$T(t) = Ae^{a^2 \lambda^2 t}, \quad (2.27)$$

$$X(x) = B_+ e^{\lambda x} + B_- e^{-\lambda x}, \quad (2.28)$$

so dass

$$u(x, t) = B_+ e^{a^2 \lambda^2 t + \lambda x} + B_- e^{a^2 \lambda^2 t - \lambda x}. \quad (2.29)$$

Offensichtlich konnten wir den Parameter  $A$  ohne Verlust an Allgemeinheit fallen lassen. Dies sind exponentiell in der Zeit wachsende Lösungen.

Die Randbedingung  $u(0, t) = 0$  erfordert offenbar  $B_+ + B_- = 0$ . Aus  $u(1, t) = 0$  folgt dagegen  $B_+ e^{\lambda} + B_- e^{-\lambda} = 0 \Rightarrow B_+ + B_- e^{-2\lambda} = 0$ . Für  $\lambda > 0$  ergibt sich  $B_- = 0$  und ebenso  $B_+ = 0$ . Also erhalten wir hier keine (nicht triviale) Lösung des Problems.

(2) Für  $C = -\lambda^2 < 0$  (mit  $\lambda > 0$ ) erhalten wir entsprechend

$$u(x, t) = B_+ e^{-a^2 \lambda^2 t + i\lambda x} + B_- e^{-a^2 \lambda^2 t - i\lambda x}. \quad (2.30)$$

Es ist wichtig zu erkennen, dass die PDG linear und homogen ist – daher gilt das Superpositionsprinzip. Für den Fall (2) können wir die Lösungen zu

$$u(x, t) = A e^{-a^2 \lambda^2 t} \sin \lambda x + B e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda x \quad (2.31)$$

linear kombinieren. Gleichung (2.31) gibt exponentiell in der Zeit abfallende (beschränkte) Lösungen an.

Nun müssen wir noch die Anfangsbedingung  $u(x, 0) = \sin \pi x$  erfüllen. Wir sehen aus Gl. (2.31), dass dann

$$\lambda = \pi, \quad A = 1, \quad B = 0. \quad (2.32)$$

$u(0, t) = u(1, t) = 0$  ist ebenfalls erfüllt. Also ist die Lösung

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 a^2 t} \sin \pi x. \quad (2.33)$$

Bemerkung: Wir konnten dieses Problem nur deshalb relativ einfach lösen, weil die Anfangsbedingung bei  $t = 0$  eine sehr spezielle Form hatte. Im Allgemeinen können wir nicht erwarten, durch Wahl der Parameter direkt eine Lösung des Problems zu erhalten. Vielmehr versucht man, die Lösung als *Superposition* von Lösungen mit verschiedenen Parametern zu schreiben. Diesen Lösungsweg werden wir im nächsten Abschnitt besprechen.

## 2.2 Vollständige Funktionensysteme und Reihenentwicklung

Wir betrachten die Diffusionsgleichung mit allgemeiner Anfangsbedingung:

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (2.34)$$

für  $0 < x < 1$  und  $0 < t < \infty$  mit

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad (2.35)$$

$$u(0, t) = 0, \quad (2.36)$$

$$u(1, t) = 0. \quad (2.37)$$

Wenn  $\phi(x)$  keine reine Sinus-Funktion mit Nullstellen bei 0 und 1 ist, werden wir mit dem Separationsansatz keine Lösung finden, die die Anfangsbedingung erfüllt.

Im letzten Abschnitt waren wir durch die Separation der Variablen  $u(x, t) = X(x)T(t)$  auf die gewöhnliche Differentialgleichung  $X''(x) = CX(x)$  geführt worden. Dies ist ein Spezialfall einer Klasse von gewöhnlichen Differentialgleichungen, die als Sturm-Liouville-Probleme bekannt sind.

Ein *Sturm-Liouville-Problem* besteht aus einer gewöhnlichen Differentialgleichung der Form

$$(py')' + (q + \lambda r)y = 0 \quad \text{für } a < x < b \quad (2.38)$$

mit linearen homogenen Randbedingungen

$$c_1 y(a) + c_2 y'(a) = 0, \quad c_3 y(b) + c_4 y'(b) = 0. \quad (2.39)$$

Hier sind  $p, q, r$  Funktionen von  $x$ , und  $\lambda$  und  $c_1, \dots, c_4$  sind Konstanten. Man kann folgendes zeigen:

- Lösungen existieren nur für gewisse Werte von  $\lambda$ . Diese  $\lambda$  nennt man *Eigenwerte*, die dazugehörigen Lösungsfunktionen *Eigenfunktionen*.
- Die Eigenfunktionen  $y_i$  zu Eigenwerten  $\lambda_i$  erfüllen die *Orthogonalitätsbeziehung*

$$\int_a^b dx r(x) y_i(x) y_j(x) = 0 \quad \text{für } \lambda_i \neq \lambda_j. \quad (2.40)$$

- Die  $y_i$  bilden ein vollständiges Funktionensystem auf  $[a, b]$ , d.h. jede (hinreichend gutartige) Funktion  $h(x)$  auf  $[a, b]$  läßt sich als Linearkombination der  $y_i$  schreiben:

$$h(x) = \sum_i k_i y_i(x). \quad (2.41)$$

Unter Benutzung von Gl. (2.40) erhält man die Koeffizienten  $k_i$  durch Multiplikation mit  $r y_j$  und Integration:

$$\int_a^b dx r(x) y_j(x) h(x) = \sum_i k_i \int_a^b dx r(x) y_j(x) y_i(x) = k_j \int_a^b dx r(x) y_j^2(x), \quad (2.42)$$

also

$$k_i = \frac{\int_a^b dx r(x) y_i(x) h(x)}{\int_a^b dx r(x) y_i^2(x)}. \quad (2.43)$$

In unserem Fall hatten wir die mit den Randbedingungen verträglichen Lösungen

$$X_\lambda(x) = \sin \lambda x \quad (2.44)$$

gefunden. Die Randbedingung  $u(1, t) = 0$  erfordert darüberhinaus

$$\lambda = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \dots, \quad (2.45)$$

$\lambda = 0$  ergibt eine verschwindende Lösung, die nicht Teil eines orthogonalen Systems sein kann, negative  $\lambda/a$  ergeben dieselben Lösungen wie positive (bis auf einen irrelevanten Vorfaktor). Die Sätze über Sturm-Liouville-Probleme zeigen dann, dass die Funktionen

$$y_n(x) = \sin n\pi x \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.46)$$

ein vollständiges, orthogonales Funktionensystem bilden.

Für eine allgemeine Anfangsbedingung  $u(x, 0) = \phi(x)$  entwickeln wir nun  $\phi$  in diese Eigenfunktionen,

$$\phi(x) = \sum_n A_n \sin n\pi x. \quad (2.47)$$

Gl. (2.43) zeigt, wie wir die  $A_n$  berechnen, wir führen es aber noch einmal explizit durch: Multiplizieren der Gleichung mit  $\sin m\pi x$  und Integrieren ergibt

$$\int_0^1 dx \phi(x) \sin m\pi x = \sum_n A_n \int_0^1 dx \sin m\pi x \sin n\pi x = A_m \int_0^1 dx \sin^2 m\pi x = \frac{A_m}{2}, \quad (2.48)$$

also

$$A_n = 2 \int_0^1 dx \phi(x) \sin n\pi x. \quad (2.49)$$

Dies ist natürlich gerade eine Fourier-Sinus-Transformation. Wir kommen auf Integraltransformationen in allgemeinerem Zusammenhang zurück.

Aus dem Separationsansatz erhalten wir aber immer Produkte von orts- und zeitabhängigen Funktionen  $y_i(x) T_i(t)$ , die über den gemeinsamen Parameter  $\lambda_i$  verknüpft sind. Im vorliegenden Fall gehört

zu dem Eigenwert  $\lambda = n\pi a$  die Separationskonstante  $C = -\lambda^2 = -n^2\pi^2$  und die zeitabhängige Funktion  $T_n(t) := e^{-n^2\pi^2 a^2 t}$ . Wir schreiben nun die folgende Funktion hin:

$$u(x, t) = \sum_n A_n \frac{T_n(t)}{T_n(0)} y_n(x) = \sum_n A_n e^{-n^2\pi^2 a^2 t} \sin n\pi x. \quad (2.50)$$

Für  $t = 0$  wird dies

$$u(x, 0) = \sum_n A_n \sin n\pi x, \quad (2.51)$$

aber das ist gerade  $\phi(x)$ , also ist die Anfangsbedingung erfüllt. Die Randbedingungen bei  $x = 0$ ,  $x = 1$  sind ebenfalls erfüllt, da alle Summanden hier verschwinden. Schliesslich erfüllt  $u$  auch die PDG, da die PDG linear und homogen ist und alle Summanden in  $u$  sie erfüllen. Damit haben wir gezeigt, dass  $u(x, t)$  in Gl. (2.50) die PDG mit Randbedingungen löst.

Wichtig: Für größere  $n$  wird der exponentielle Abfall in der Zeit immer *schneller*. Wir folgern, dass räumlich stark oszillierende Anteil (großes  $n$ ) schneller weggedämpft werden, als schwach oszillierende. Nach einer Zeit der Größenordnung  $(\pi^2 a^2)^{-1}$  dominiert die  $n = 1$  Lösung, sofern nicht  $A_1 = 0$ . Diese Lösung wollen wir *Fundamentalmode* nennen. (Im Zusammenhang mit der Wellengleichung wird sie die Bedeutung der Fundamentalschwingung des Systems annehmen.)

**Beispiel:** Wir wollen sehen, wie sich das beschriebene Verfahren in einem ungünstigen Fall verhält und fordern die Anfangsbedingung  $u(x, 0) = 1$ . Beachte, dass die Randbedingungen nun an den Punkten  $x = 0, t = 0$  und  $x = 1, t = 0$  unstetig sind. Wir bestimmen die Koeffizienten

$$A_n = 2 \int_0^1 dx \sin n\pi x = 2 \left[ \frac{-\cos n\pi x}{n\pi} \right]_0^1 = -2 \frac{(-1)^n - 1}{n\pi}. \quad (2.52)$$

Dies ist

$$A_n = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{für } n \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{für } n \text{ gerade.} \end{cases} \quad (2.53)$$

Demnach ist die Lösung

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ ungerade}} e^{-n^2\pi^2 a^2 t} \frac{\sin n\pi x}{n}. \quad (2.54)$$

Diese Reihe konvergiert für  $t = 0$  nur langsam, da sehr viele Terme nötig sind, um eine kastenförmige Funktion durch Sinus-Schwingungen anzunähern. Für größere  $t$  konvergiert die Reihe daher (für hinreichend große  $n$ ) exponentiell.

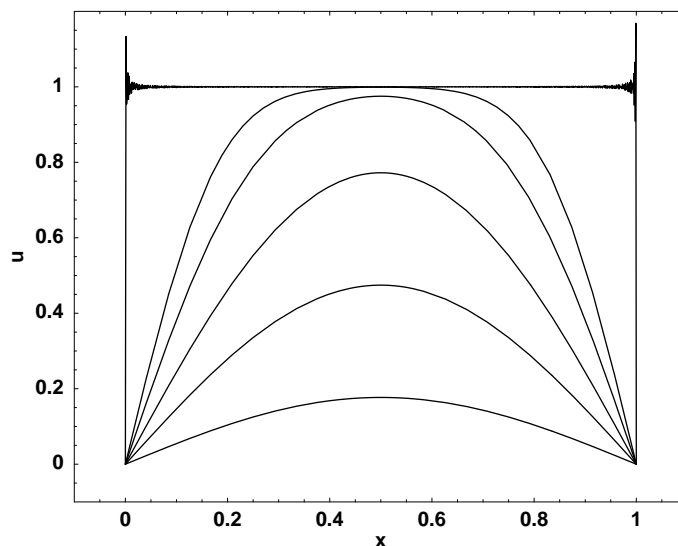


Abbildung 4: Lösung aus Gl. (2.54), genähert durch die Terme  $n = 1, 3, \dots, 999$ , für die Zeiten  $a^2 t = 0, 0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 0.2$ . Man erkennt, dass sich die Kurvenform immer mehr der Fundamentalmode annähert. Beachte auch die Fehler aufgrund des Abbruchs der Reihe.

Bemerkung: Für Neumann-Randbedingungen

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0 \quad (2.55)$$

wählen wir die Cosinus-Lösungen. Für gemischte linear Randbedingungen müssen wir zwei Arten von Lösungen mitnehmen.

Bemerkung: Separation in mehreren Raumdimensionen werden wir im Zusammenhang mit der Wellengleichung betrachten.

### Verallgemeinerung: Inhomogene Gleichung

Wie können wir Gleichungen vom Typ

$$u_t = a^2 u_{xx} + w(x, t) \quad (2.56)$$

lösen? ( $w$  beschreibt z.B. Wärmequellen.) Wir suchen Lösungen für  $0 < x < 1$ ,  $0 < t < \infty$ , nehmen die Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad (2.57)$$

und homogene lineare Randbedingungen für  $x = 0$  und  $x = 1$  an.

Die Lösungsmethode ist eine Verallgemeinerung der Variation der Konstanten für gewöhnliche Differentialgleichungen. Wie dort betrachten wir zunächst die *homogene* Gleichung  $u_t = a^2 u_{xx}$  mit denselben Randbedingungen. Durch Separation erhalten wir ein Sturm-Liouville-Problem für  $X(x)$  mit den Eigenfunktionen  $y_i(x)$  zu den Eigenwerten  $\lambda_i$ . Für allgemeine homogene lineare Randbedingungen verallgemeinert man die obigen Ergebnisse leicht und erhält die Lösung

$$u_{\text{hom}}(x, t) = \sum_i A_i e^{-\lambda_i^2 a^2 t} y_i(x) \quad (2.58)$$

für die homogene Gleichung.

Wir setzen nun die Lösung der *inhomogenen* Gleichung an als

$$u(x, t) = \sum_i T_i(t) y_i(x). \quad (2.59)$$

Zur Bestimmung der  $T_i(t)$  entwickeln wir zunächst die Inhomogenität  $w$  nach dem orthogonalen Funktionensystem  $y_i(x)$ ,

$$w(x, t) = \sum_i w_i(t) y_i(x). \quad (2.60)$$

Dazu beachten wir, dass

$$\int_a^b dx w(x, t) y_j(x) = \sum_i \int_a^b dx w_i(t) y_i(x) y_j(x) = w_j(t) \int_a^b dx y_j^2(x) \quad (2.61)$$

wegen der Orthogonalität der  $y_i$ . Also

$$w_i(t) = \frac{\int_a^b dx w(x, t) y_i(x)}{\int_a^b dx y_i^2(x)}. \quad (2.62)$$

Die PDG läßt sich nun schreiben als

$$u_t = a^2 u_{xx} + \sum_i w_i(t) y_i(x) \quad (2.63)$$

und die Anfangsbedingung wie oben als

$$u(x, 0) = \phi(x) = \sum_i A_i y_i(x). \quad (2.64)$$

Mit dem Ansatz (2.59) ergibt dies

$$\sum_i T_i'(t) y_i(x) = a^2 \sum_i T_i(t) y_i''(x) + \sum_i w_i(t) y_i(x) = -a^2 \sum_i \lambda_i^2 T_i(t) y_i(x) + \sum_i w_i(t) y_i(x) \quad (2.65)$$

$$\sum_i T_i(0) y_i(x) = \sum_i A_i y_i(x). \quad (2.66)$$

In der ersten Gleichung haben wir noch ausgenutzt, dass  $y_i$  die durch die Separation gewonnene Gleichung  $y_i'' + \lambda_i^2 y_i = 0$  erfüllt. In der üblichen Weise multiplizieren wir beide Gleichungen mit  $y_j(x)$  und integrieren über  $x$ , um die einzelnen Komponenten zu isolieren und erhalten

$$T_i'(t) = -a^2 \lambda_i^2 T_i(t) + w_i(t), \quad (2.67)$$

$$T_i(0) = A_i. \quad (2.68)$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung läßt sich aber formal lösen, die Lösung lautet

$$T_i(t) = e^{-\lambda_i^2 a^2 t} \left( A_i + \int_0^t d\tau e^{\lambda_i^2 a^2 \tau} w_i(\tau) \right) \quad (2.69)$$

(Beweis durch Einsetzen). Damit ist die Lösung schließlich

$$u(x, t) = \sum_i A_i e^{-\lambda_i^2 a^2 t} y_i(x) + \sum_i \int_0^t d\tau e^{\lambda_i^2 a^2 (\tau-t)} w_i(\tau) y_i(x). \quad (2.70)$$

Diese besteht aus zwei Teilen: Der erste hängt nur von den Anfangsbedingungen ( $A_i$ ) ab, der zweite nur von der Inhomogenität ( $w_i$ ).

**Beispiel:** Dirichlet-Randbedingungen  $u(0, t) = u(1, t) = 0$ , Anfangsbedingung  $u(x, 0) = 0$  und Inhomogenität

$$w(x, t) = \sin \omega t \sin \pi x. \quad (2.71)$$

Für diese Randbedingungen haben wir oben die Eigenfunktionen  $y_n(x) = \sin n\pi x$  zu den Eigenwerten  $\lambda_n = n\pi$  gefunden. Die Entwicklungskoeffizienten sind  $A_n = 0$  und

$$w_n(t) = 2 \int_0^1 dx w(x, t) \sin n\pi x = 2 \sin \omega t \int_0^1 dx \sin \pi x \sin n\pi x = \delta_{n1} \sin \omega t. \quad (2.72)$$

Daher<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t d\tau e^{\pi^2 a^2 (\tau-t)} \sin \omega \tau \sin \pi x \\ &= \frac{\omega e^{-\pi^2 a^2 t} - \omega \cos \omega t + \pi^2 a^2 \sin \omega t}{\omega^2 + \pi^4 a^4} \\ &= \frac{\omega}{\omega^2 + \pi^4 a^4} e^{-\pi^2 a^2 t} + \frac{\sin(\omega t - \phi)}{\sqrt{\omega^2 + \pi^4 a^4}}, \end{aligned} \quad (2.73)$$

wobei die Phase  $\phi$  durch

$$\sin \phi = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \pi^4 a^4}} \quad (2.74)$$

definiert wurde.  $u(x, t)$  besteht also aus einem schnell abfallenden Term und einem mit der Frequenz  $\omega$  der *Anregung*  $w$  oszillierenden Term. Diese typische Situation ist schon von der gewöhnlichen Schwingungsgleichung bekannt. Der oszillierende Term zeigt eine frequenzabhängige Phasenverschiebung  $\phi$ . Beachte auch, dass die Diffusionsgleichung keine Resonanz liefert; die Amplitude  $1/\sqrt{\omega^2 + \pi^4 a^4}$  ist immer endlich.

Zusammenfassung der Methode: Wir entwickeln die Anfangsbedingung und die Inhomogenität nach den räumlichen Eigenfunktionen und lösen dann gewöhnliche Differentialgleichungen für deren Koeffizienten als Funktionen von  $t$  einzeln.

### Verallgemeinerung: Inhomogene Randbedingungen

Für nicht homogene Randbedingungen versagt das beschriebene Verfahren, da die Randbedingungen für  $t > 0$  praktisch gar nicht eingehen – wir haben ja das Sturm-Liouville-Problem nur bei  $t = 0$  gelöst. Es gibt aber eine einfache Transformation auf eine neue unbekannte Funktion, die die Randbedingungen in jedem Fall homogen macht.

Gegeben sei die inhomogene Diffusionsgleichung

$$u_t = a^2 u_{xx} + w(x, t) \quad (2.75)$$

---

<sup>1</sup>mit Mathematica integriert

für  $0 < x < L$ ,  $0 < t < \infty$  mit den Randbedingungen

$$u(x, 0) = f(x), \quad (2.76)$$

$$u(0, t) = g(t), \quad (2.77)$$

$$u(L, t) = h(t). \quad (2.78)$$

Wir führen nun eine neue Funktion  $\psi(x, t)$  ein:

$$\psi(x, t) := u(x, t) - g(t) - \frac{x}{L} [h(t) - g(t)]. \quad (2.79)$$

Es folgt

$$u(x, t) = \psi(x, t) + g(t) + \frac{x}{L} [h(t) - g(t)]. \quad (2.80)$$

Einsetzen in die Diffusionsgleichung ergibt eine PDG für  $\psi$ ,

$$\psi_t + g_t + \frac{x}{L} [h_t - g_t] = a^2 \psi_{xx} + w, \quad (2.81)$$

also

$$\psi_t = a^2 \psi_{xx} + w_1 \quad (2.82)$$

mit

$$w_1(x, t) := w(x, t) - g'(t) - \frac{x}{L} [h'(t) - g'(t)]. \quad (2.83)$$

Die Randbedingungen für  $\psi$  lauten

$$\psi(x, 0) = f_1(x) := f(x) - g(0) - \frac{x}{L} [h(0) - g(0)], \quad (2.84)$$

$$\psi(0, t) = g(t) - g(t) = 0, \quad (2.85)$$

$$\psi(L, t) = h(t) - h(t) = 0. \quad (2.86)$$

Also haben wir das Problem auf den oben behandelte Fall zurückgeführt.

## 2.3 Maximumprinzip und Eindeutigkeit

Wir beweisen nun einige wichtige Sätze über Lösungen der Diffusionsgleichung:

**Satz:** Die reelle Funktion  $u(x, t)$  sei eine Lösung der Diffusionsgleichung ( $a^2 > 0$ )

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad \text{für } 0 < x < L, 0 < t < \infty \quad (2.87)$$

die an allen Rändern Dirichlet-Randbedingungen erfüllt (d.h.  $u$  ist auf den Rändern vorgegeben). Sei  $T > 0$ . Dann nimmt die Funktion  $u$  ihr Maximum im Gebiet  $G = \{(x, t) | 0 \leq x \leq L \text{ und } 0 \leq t \leq T\}$  auf dem Rand bei  $t = 0$  oder  $x = 0$  oder  $x = L$  an. Dieser Teil des Randes werde mit  $\Gamma$  bezeichnet.

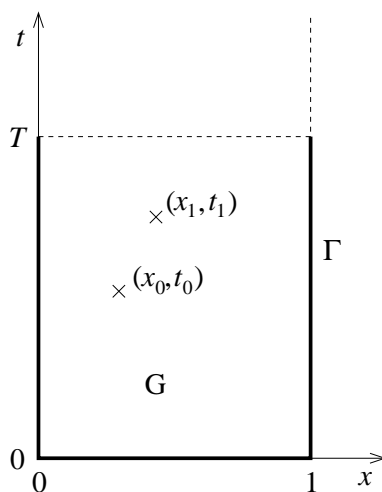


Abbildung 5: Das Maximumprinzip sagt aus, dass das Maximum der Funktion  $u$  auf dem dunkel markierten Teil  $\Gamma$  des Randes des Gebietes  $G$  angenommen wird.

**Beweis** (*reductio ad absurdum*): Angenommen, es gibt einen Punkt  $(x_0, t_0)$  im Inneren von  $G$  oder auf dem Rand bei  $t = T$ , so dass  $u(x_0, t_0)$  größer ist als die kleinste obere Schranke von  $u$  auf  $\Gamma$ . Sei die Hilfsfunktion

$$\psi(x, t) := u(x, t) - \epsilon(t - t_0) \quad (2.88)$$

mit einer Konstanten  $\epsilon > 0$ . Es gilt  $\psi(x_0, t_0) = u(x_0, t_0)$ . Da  $u(x_0, t_0)$  um eine endliche Differenz größer ist als die kleinste obere Schranke von  $u$  auf  $\Gamma$ , können wir  $\epsilon$  so klein wählen, dass  $\psi(x_0, t_0)$  größer ist als die kleinste obere Schranke von  $\psi$  auf  $\Gamma$ . Also nimmt die Funktion  $\psi$  ihr Maximum ebenfalls im Inneren von  $G$  oder am Rand  $t = T$  an, sagen wir am Punkt  $(x_1, t_1)$ . An diesem Punkt gilt:

$$\psi_x = 0, \quad (2.89)$$

$$\psi_{xx} \leq 0, \quad (2.90)$$

$$\psi_t = 0 \quad \text{für } t_1 < T, \quad (2.91)$$

$$\psi_t \geq 0 \quad \text{für } t_1 = T, \quad (2.92)$$

also  $\psi_t \geq 0$  in jedem Fall. Daraus folgt aber

$$u_{xx} = \psi_{xx} \leq 0, \quad (2.93)$$

$$u_t = \psi_t + \epsilon > 0 \quad (2.94)$$

bei  $(x_1, t_1)$ . Andererseits soll  $u$  aber  $u_t = a^2 u_{xx}$  erfüllen. Widerspruch!<sup>2</sup>

**Korollar:**  $u(x, t)$  nimmt auch das *Minimum* auf  $\Gamma$  an. Beweis: Mit  $u$  erfüllt auch  $-u$  eine Diffusionsgleichung mit Dirichlet-Randbedingungen...

**Korollar:** Wenn  $u = 0$  auf  $\Gamma$ , so folgt  $u = 0$  im gesamten Gebiet. Beweis:  $u$  kann nirgends größer (kleiner) sein als ihr Maximum (Minimum) auf  $\Gamma$ .

**Korollar:** Die Lösung der Diffusionsgleichung mit gegebenen Dirichlet-Randbedingungen ist *eindeutig*. Beweis: Seien  $u$  und  $v$  zwei Lösungen der Gleichung, die identische Randbedingungen erfüllen. Dann verschwindet  $u - v$  auf  $\Gamma$  und daher auch im Inneren.

Bemerkung: Wir haben nie benutzt, dass die Funktion  $u$  von *zwei* Variablen abhängt. Daher können wir dieselben Aussagen für die mehrdimensionale Diffusionsgleichung

$$u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \dots) \quad (2.95)$$

auf einem beliebigen räumlichen Gebiet (mit hinreichend gutartigen Rändern) und für  $0 < t < \infty$  beweisen.

## 2.4 Laplace-Transformation

Wir besprechen nun die Methode der Laplace-Transformation, die besonders für die Diffusionsgleichung geeignet ist. Diese Methode erlaubt, die Anzahl der Variablen zu reduzieren. Geht man von zwei Variablen  $x, t$  aus, erhält man also eine *gewöhnliche* Differentialgleichung.

Zunächst definieren wir die *Laplace-Transformation*: Sei  $f(t)$  eine Funktion von  $t$  für  $t \geq 0$ . Dann heißt

$$\mathcal{L}[f] \equiv F, \quad (2.96)$$

$$F(s) := \int_0^\infty dt e^{-st} f(t) \quad (2.97)$$

(für  $s \geq 0$ ) die *Laplace-Transformierte* von  $f$ , sofern das Integral existiert. Die Umkehrabbildung (inverse Laplace-Transformation) lautet

$$\mathcal{L}^{-1}[F] \equiv f, \quad (2.98)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds e^{st} F(s) \quad (2.99)$$

mit einer reellen Konstanten  $c > 0$ .

<sup>2</sup>Wir benötigen die komplizierte Argumentation mit  $\psi$  um in Gl. (2.94) ein „>“ zu erhalten.

Beweis: Wir setzen Gl. (2.97) in (2.99) ein:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds e^{st} F(s) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds e^{st} \int_0^\infty dt' e^{-st'} f(t') \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty d\sigma i e^{c\sigma} e^{i\sigma t} \int_0^\infty dt' e^{-ct'} e^{-i\sigma t'} f(t') \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty dt' 2\pi i \delta(t-t') e^{ct} e^{-ct'} f(t') = f(t).
\end{aligned} \tag{2.100}$$

Hier wurde zunächst  $s = c + i\sigma$  substituiert und dann die Darstellung

$$\int_{-\infty}^\infty dx e^{ikx} = 2\pi \delta(k) \tag{2.101}$$

der Dirac- $\delta$ -Distribution ausgenutzt.<sup>3</sup>

Beachte, dass in  $\mathcal{L}[f]$ , im Gegensatz zur Fourier-Transformation, ein exponentiell abfallender und kein oszillierender Integralkern auftritt. Um die Umkehrabbildung in der Praxis auszuführen, benötigt man Methoden aus der Funktionentheorie.

**Beispiele:**

$f(t)$	$F(s)$	
1	$\int_0^\infty dt e^{-st} = \frac{1}{s},$	(2.104)
$e^{at}$	$\int_0^\infty dt e^{(a-s)t} = \frac{1}{s-a}$ für $s > a,$	
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$	

Im Zusammenhang mit PDG's oft auftretende Transformations-Paare sind

$f(t)$	$F(s)$	
$\frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-\lambda^2/4t)$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}} e^{-\lambda\sqrt{s}},$	(2.105)
$\frac{\lambda}{2t^{3/2}} \exp(-\lambda^2/4t)$	$\sqrt{\pi} e^{-\lambda\sqrt{s}},$	
$\operatorname{erfc}(\lambda/2\sqrt{t})$	$\frac{1}{s} e^{-\lambda\sqrt{s}},$	

wobei die *Fehlerfunktion* und die *komplementäre Fehlerfunktion* definiert sind durch

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dy e^{-y^2}, \tag{2.106}$$

$$\operatorname{erfc}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty dy e^{-y^2}. \tag{2.107}$$

Es gilt  $\operatorname{erf}(x) + \operatorname{erfc}(x) = 1$ .

Wichtig sind die Laplace-Transformierten der partiellen Ableitungen. Sei  $U(x, s)$  die Laplace-Transformierte von  $u(x, t)$ ,  $U = \mathcal{L}[u]$ . Dann findet man folgende Transformierte durch partielle Integration:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[u_t] &: \int_0^\infty dt e^{-st} u_t(x, t) = [e^{-st} u(x, t)]_0^\infty - \int_0^\infty dt (-s) e^{-st} u(x, t) = -u(x, 0) + sU(x, s), \\
\mathcal{L}[u_{tt}] &: -su(x, 0) - u_t(x, 0) + s^2 U(x, s), \\
\mathcal{L}[u_x] &: U_x(x, s), \\
\mathcal{L}[u_{xx}] &: U_{xx}(x, s).
\end{aligned} \tag{2.108}$$

---

<sup>3</sup>In der Physik behandeln wir  $\delta(x)$  üblicherweise wie eine echte Funktion. Es ist aber wichtig, sich zu erinnern, dass sie formal nur unter einem Integral definiert ist. Sie ist bestimmt durch die Eigenschaften

$$\delta(x) = 0 \quad \text{für } x \neq 0 \tag{2.102}$$

und

$$\int_{-\epsilon}^\epsilon dx \delta(x) f(x) = f(0) \tag{2.103}$$

für  $\epsilon > 0$  und eine beliebige bei  $x = 0$  stetige Funktion  $f(x)$ .



Da die Transformation nur die Variable  $t$  betrifft, ändert sich an Ableitungen nach  $x$  praktisch nichts. Ableitungen nach  $t$  selbst werden jedoch – ähnlich wie bei der Fourier-Transformation – durch Multiplikation mit der neuen Variablen  $s$  ersetzt. Dies ist die wesentliche Eigenschaft, die erlaubt, die Anzahl der Variablen einer PDG zu reduzieren. So wird aus der Diffusionsgleichung  $u_t = a^2 u_{xx}$  unter Laplace-Transformation:

$$-u(x, 0) + sU(x, s) = a^2 U_{xx}(x, s). \quad (2.109)$$

Dies ist eine *gewöhnliche* Differentialgleichung für  $U$  als Funktion von  $x$ , da  $s$  nur noch als Parameter auftritt. Das schwierigere Problem bei dieser Methode ist oft die Rücktransformation der Lösung der erhaltenen einfacheren Gleichung auf  $u(x, t)$ .

Ebenfalls nützlich ist der *Faltungssatz* für Laplace-Transformierte. Wir definieren die *endliche Faltung* zweier Funktionen  $f(\tau)$  und  $g(\tau)$  als

$$(f * g)(t) := \int_0^t d\tau f(\tau) g(t - \tau) \equiv \int_0^t d\tau f(t - \tau) g(\tau). \quad (2.110)$$

Man kann nun zeigen, dass die Laplace-Transformierte einer solchen Faltung ein einfaches Produkt der Transformierten der Funktionen ist:

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \mathcal{L}[g] \quad (2.111)$$

oder auch  $\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f] \mathcal{L}[g]] = f * g$ . Dies erlaubt, die inverse Laplace-Transformierte von komplizierteren Funktionen zu bestimmen, z.B.

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} \frac{1}{s^2 + 1} \right] = (1) * (\sin t) = \int_0^t d\tau \sin \tau = 1 - \cos t \quad (2.112)$$

in einer etwas unsaubereren Notation.

Wir betrachten zur Erläuterung die Diffusionsgleichung auf einem unendlichen Bereich,

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad \text{für } -\infty < x < \infty, 0 < t < \infty, \quad (2.113)$$

$$u(x, 0) = \delta(x) \quad (2.114)$$

und  $u(x, t)$  sei beschränkt für  $x \rightarrow \pm\infty$ . Wir untersuchen also, wie sich eine strikt lokalen Störung zur Zeit  $t = 0$  mit der Zeit unter der Diffusionsgleichung entwickelt. Z.B. könnte bei  $t = 0$  eine endliche Energie an einem Punkt (oder in einem vernachlässigbar kleinen Bereich) eines langen Stabes deponiert werden und wir betrachten die zeitliche Entwicklung der Temperaturverteilung. Oder in ein dünnes Rohr gefüllt mit einem Lösungsmittel wird bei  $t = 0$  an einer Stelle eine gewisse Menge eines Stoffes gegeben und wir untersuchen die Konzentrationsverteilung für  $t > 0$ .

Wir multiplizieren die PDG mit  $e^{-st}$  und integrieren über  $t$ , d.h. wir führen die Laplace-Transformation aus. Das Ergebnis ist

$$-u(x, 0) + sU(x, s) = a^2 U_{xx}(x, s), \quad (2.115)$$

also hier

$$-\delta(x) + sU = a^2 U_{xx} \quad (2.116)$$

oder auch

$$a^2 U_{xx} - sU = -\delta(x). \quad (2.117)$$

Dies ist eine inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung. Gleichungen dieser Art, bei denen die Inhomogenität eine Delta-Funktion ist, werden wir in Abschnitt 8 über Green-Funktionen noch häufiger begegnen.

Offenbar ist die Gleichung *fast überall* homogen: Für  $x \neq 0$  ist die Gleichung  $a^2 U_{xx} = sU$  und die allgemeine Lösung daher

$$U = A_+ e^{\sqrt{s}x/a} + A_- e^{-\sqrt{s}x/a}. \quad (2.118)$$

Soll  $U$  für  $x \rightarrow \pm\infty$  beschränkt bleiben, so bleibt nur ( $a > 0$ )

$$U = \begin{cases} A_+ e^{\sqrt{s}x/a} & \text{für } x < 0, \\ A_- e^{-\sqrt{s}x/a} & \text{für } x > 0. \end{cases} \quad (2.119)$$

Die einzige Schwierigkeit tritt bei  $x = 0$  auf. Wir machen den Ansatz, dass  $U$  bei  $x = 0$  stetig sein soll:

$$U = A \exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{a} |x|\right). \quad (2.120)$$

Dann folgt

$$U_x = -A \frac{\sqrt{s}}{a} \operatorname{sgn} x \exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{a} |x|\right), \quad (2.121)$$

$$U_{xx} = -2A \frac{\sqrt{s}}{a} \delta(x) \underbrace{\exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{a} |x|\right)}_1 + A \frac{s}{a^2} \exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{a} |x|\right), \quad (2.122)$$

$$a^2 U_{xx} - sU = -2Aa \sqrt{s} \delta(x) + As \exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{a} |x|\right) - As \exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{a} |x|\right) = -2Aa \sqrt{s} \delta(x) \quad (2.123)$$

Der letzte Ausdruck soll aber gleich  $-\delta(x)$  sein, also muss

$$2Aa \sqrt{s} = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2a\sqrt{s}} \quad (2.124)$$

sein. Wir sehen, dass der Koeffizient zwar bezüglich der unabhängigen Variablen  $x$  eine Konstante ist, aber sehr wohl vom Parameter  $s$  abhängt. Das ist die typische Situation.

Damit ist die Lösung für  $U$ :

$$U(x, s) = \frac{1}{2a\sqrt{s}} \exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{a} |x|\right). \quad (2.125)$$

Nun müssen wir noch die inverse Laplace-Transformation ausführen:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds e^{st} \frac{1}{2a\sqrt{s}} \exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{a} |x|\right). \quad (2.126)$$

Das Ergebnis können wir einer Tafel oder der Tabelle (2.105) entnehmen. Wir führen die Rechnung aber noch explizit aus.

Wir wählen die Konstante  $c = 0^+$ , d.h. beliebig klein und positiv. Der Integrationsweg ist in Abb. 6(a) gezeigt. Der Integrand hat einen *Pol* bei  $s = 0$ , den der Integrationsweg auf der rechten Seite umgeht. Dieses Integral ist schwierig, weil es neben dem Pol bei  $s = 0$  noch einen Schnitt enthält, der  $s = 0$  mit dem Unendlichen verbindet, und der auf der Mehrdeutigkeit der komplexen Quadratwurzel beruht.

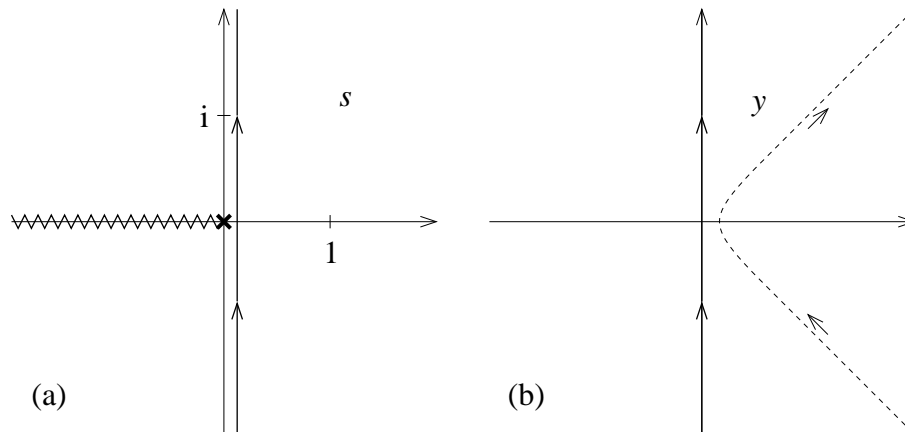


Abbildung 6: (a) Integrationsweg in der komplexen  $s$ -Ebene bei der inversen Laplace-Transformation. Das Kreuz bezeichnet den Pol im Integranden und die Zickzack-Linie einen möglichen Verlauf des Schnittes aufgrund der mehrdeutigen komplexen Quadratwurzel. (b) Integrationswege in der komplexen  $y = \sqrt{s}$  Ebene in Gl. (2.141). Der ursprüngliche, gestrichelte Weg kann in den durchgezogenen deformiert werden.

Um das Integral zu vereinfachen substituieren wir  $s = y^2$ ,  $ds = 2y dy$ ,

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int dy 2y e^{y^2 t} \frac{1}{2ay} \exp\left(-\frac{y}{a} |x|\right) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{a} \int dy e^{y^2 t} \exp\left(-\frac{y}{a} |x|\right). \quad (2.127)$$

Der Integrationsweg in der komplexen  $y$ -Ebene ist in Abb. 6(b) gestrichelt eingezeichnet. Er ergibt sich einfach aus  $y = \sqrt{s}$ . Wir können jedoch den Integrationsweg in den durchgezogenen gezeichneten deformieren, da der Integrand für  $|y| \rightarrow \infty$  in den zwischen den Wegen liegenden Sektoren schnell genug verschwindet.

Mit quadratischer Ergänzung im Exponenten ergibt sich

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{a} \int dy \exp \left[ \left( y - \frac{|x|}{2at} \right)^2 t \right] \exp \left( -\frac{x^2}{4a^2 t} \right). \quad (2.128)$$

Im Integral können wir aber  $y - |x|/2at$  durch  $y$  ersetzen; dies entspricht einer Parallelverschiebung des Integrationsweges in Abb. 6(b). Die dabei eigentlich zu berücksichtigenden Abschnitte des Weges im Unendlichen tragen aber nichts bei, weil der Integrand schnell abfällt. Also

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{a} \exp \left( -\frac{x^2}{4a^2 t} \right) \int dy e^{y^2 t} \quad (2.129)$$

und nach Substitution von  $y = iz/\sqrt{t}$ :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi a \sqrt{t}} \exp \left( -\frac{x^2}{4a^2 t} \right) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2}}_{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp \left( -\frac{x^2}{4a^2 t} \right). \quad (2.130)$$

Also zerfließt die Delta-Funktion für  $t > 0$  in Form einer *Gauß-Kurve*, deren Breite proportional zu  $\sqrt{t}$  anwächst. Das Verhalten ist in Abb. 7 gezeigt. Man überzeugt sich leicht, dass das Integral  $\int dx u(x, t)$  über die gesamte  $x$ -Achse konstant bleibt (die Dichte  $u$  korrespondiert zu einer *erhaltenen* extensiven Größe).

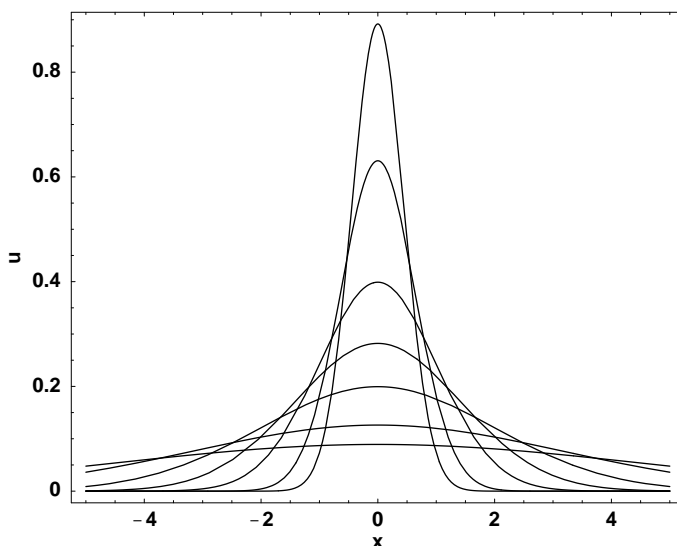


Abbildung 7: Lösung  $u(x, t)$  der Diffusionsgleichung auf  $-\infty < x < \infty$  mit  $u(x, 0) = \delta(x)$  für  $a^2 t = 0.1$  (schmalste Kurve), 0.2, 0.5, 1, 2, 5, 10.

Beachte, dass die Lösung  $u(x, t)$  für alle  $t > 0$  und alle  $x > 0$  verschieden von Null ist, obwohl die Anfangsbedingung  $u(x, 0) = 0$  für  $x \neq 0$  war. Insbesondere ist  $u(x, t) > 0$  (wenn auch sehr klein) für beliebig kleine  $t$  und zugleich beliebig große  $x$ . Das von der Störung bei  $t = 0$ ,  $x = 0$  ausgehende Signal breitet sich offenbar mit *unendlicher* Geschwindigkeit aus. Dies zeigt, dass die Diffusionsgleichung für sehr große  $x/t$  sicherlich keine physikalisch sinnvollen Ergebnisse liefert.

### Ergänzendes Beispiel

Wir betrachten noch die Gleichung

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad \text{für } 0 < x < \infty, 0 < t < \infty, \quad (2.131)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad (2.132)$$

$$u(0, t) = 1. \quad (2.133)$$

Weiter soll  $u$  für  $x \rightarrow \infty$  beschränkt bleiben. Beachte die Unstetigkeit der Randbedingungen bei  $x = 0$ ,  $t = 0$ !

Wir führen die Laplace-Transformation aus:

$$-u(x, 0) + sU(x, s) = a^2 U_{xx}(x, s). \quad (2.134)$$

Wegen  $u(x, 0) = 0$  ist das aber

$$sU = a^2 U_{xx}. \quad (2.135)$$

Ihre allgemeine Lösung lautet

$$U(x, s) = A(s) \exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{a} x\right) + B(s) \exp\left(\frac{\sqrt{s}}{a} x\right). \quad (2.136)$$

Wegen der Beschränktheit muss  $B(s) = 0$  gelten. Aus  $u(0, t) = 1$  folgt andererseits

$$U(0, s) = A(s) = \frac{1}{s} \quad (2.137)$$

und daher

$$U(x, s) = \frac{1}{s} \exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{a} x\right). \quad (2.138)$$

Aus der oben angegebenen Tabelle oder einem geeigneten Tafelwerk erhalten wir die Lösung

$$u(x, t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right). \quad (2.139)$$

Diese ist wieder für beliebig große  $x > 0$  und alle  $t > 0$  von Null verschieden.

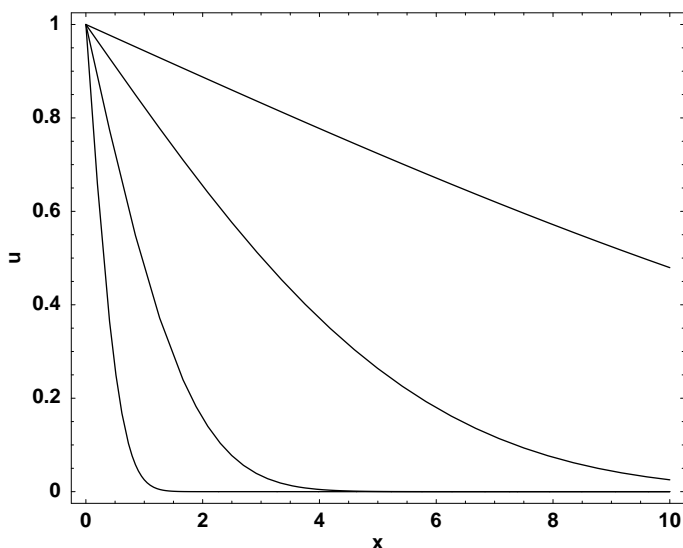


Abbildung 8: Lösung  $u(x, t)$  der Diffusionsgleichung mit  $u(x, 0) = 0$  und  $u(0, t) = 1$  für  $a = 1$  und  $t = 0.1$  (steilste Kurve), 1, 10, 100.

Wir wollen die inverse Laplace-Transformation von  $U(x, s)$  noch explizit ausführen:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds e^{st} \frac{1}{s} \exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{a} x\right). \quad (2.140)$$

Wir wählen  $c = 0^+$ . Der Integrationsweg ist in Abb. 6(a) eingezeichnet. Der Integrand hat einen *Pol* bei  $s = 0$ , den der Integrationsweg auf der rechten Seite umgeht.

Wir substituieren  $s = y^2$ ,  $ds = 2y dy$ ,

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\sqrt{0^+-i\infty}}^{\sqrt{0^++i\infty}} dy \frac{e^{y^2 t}}{y} \exp\left(-\frac{y}{a} x\right) \quad (2.141)$$

Der Integrationsweg in der komplexen  $y$ -Ebene ist wieder der in Abb. 6(b) gestrichelt eingezeichnete; wir können ihn wieder in den durchgezogen gezeichneten deformieren, da der Integrand für  $|y| \rightarrow \infty$  in den zwischen den Wegen liegenden Sektoren schnell genug verschwindet. Der Faktor  $1/y$  kann durch Einführung eines weiteren Integrals formal beseitigt werden:

$$\dots = \frac{1}{\pi i} \int_{x/a}^{\infty} d\xi \int_{-i\infty}^{i\infty} dy e^{y^2 t} e^{-y\xi}. \quad (2.142)$$

Mit quadratischer Ergänzung im Exponenten ergibt sich

$$\dots = \frac{1}{\pi i} \int_{x/a}^{\infty} d\xi \int_{-i\infty}^{i\infty} dy e^{(y-\xi/2t)^2 t} e^{-\xi^2/4t}. \quad (2.143)$$

Das Integral über  $y$  können wir mittels der Substitution  $y - \xi/2t = iz$  auf eine Standardform bringen:

$$\dots = \frac{1}{\pi i} \int_{x/a}^{\infty} d\xi e^{-\xi^2/4t} \int_{-\infty}^{\infty} dz i e^{-z^2 t} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{x/a}^{\infty} d\xi e^{-\xi^2/4t}. \quad (2.144)$$

Mit der Substitution  $\zeta = \xi/2\sqrt{t}$  erhalten wir schließlich

$$\dots = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2a\sqrt{t}}^{\infty} d\zeta e^{-\zeta^2} \equiv \operatorname{erfc}(x/2a\sqrt{t}) \quad (2.145)$$

nach obiger Definition der komplementären Fehlerfunktion.

## 2.5 Zusammenhang mit der Schrödinger-Gleichung

Wir erinnern uns an die *Schrödinger-Gleichung* der Quantenmechanik. Für ein Teilchen der Masse  $m$ , das sich in einer Dimension in einem Potential  $V(x)$  bewegt, lautet die Gleichung für die Wellenfunktion  $\psi(x, t)$

$$\frac{p^2}{2m} \psi + V(x) \psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi \quad (2.146)$$

wobei

$$p = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.147)$$

der Impulsoperator ist. Also ist

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi_{xx} + V(x) \psi = i\hbar \psi_t. \quad (2.148)$$

Diese Gleichung ist parabolisch und hat *fast* dieselbe Struktur wie die Diffusionsgleichung. Die wesentliche Änderung ist der imaginäre Koeffizient von  $\psi_t$ . Wir wollen zeigen, wie genau die Lösungen der Schrödinger-Gleichung mit denen einer Diffusionsgleichung zusammen hängen.

Zunächst teilen wir Gl. (2.148) durch  $i\hbar$ ,

$$\psi_t = ia^2 \psi_{xx} - ib(x) \psi, \quad (2.149)$$

wobei  $a^2 := \hbar/2m > 0$  und  $b(x) := V(x)/\hbar$ . Sei  $u(x, \tau)$  die Lösung der verallgemeinerten Diffusionsgleichung

$$u_\tau = a^2 u_{xx} - b(x) u \quad (2.150)$$

mit *denselben* Randbedingungen. Wir definieren eine neue Funktion

$$\phi(x, t) := u(x, it). \quad (2.151)$$

Dann ist

$$\phi_t(x, t) = i \left. \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=it} = i [a^2 u_{xx}(x, it) - b(x) u(x, it)] = ia^2 \phi_{xx}(x, t) - ib(x) \phi(x, t). \quad (2.152)$$

Wir sehen, dass  $\phi(x, t)$  die ursprüngliche Schrödinger-Gleichung erfüllt! Die Randbedingungen werden ebenfalls erfüllt (falls sie keine Zeitableitungen enthalten). Wir können Lösungen der Schrödinger-Gleichung und der entsprechenden Diffusionsgleichung also einfach ineinander umrechnen, indem wir  $t$  durch  $it$  ersetzen.

In typischen Lösungen der Diffusionsgleichung hatten wir einen exponentiellen Abfall mit der Zeit gefunden. Nach der obigen Regel erhalten wir im Schrödinger-Fall oszillierende Exponentialfaktoren  $e^{-i\omega_n t}$ . Das ist die aus der Quantenmechanik bekannte Zeitabhängigkeit, wie wir nun zeigen.

In quantenmechanischen Problemen werden wir natürlich die Schrödinger-Gleichung direkt, ohne Umweg über die Diffusionsgleichung, zu lösen versuchen. Die Standard-Methode ist wieder die Separation: Im Fall von Gl. (2.148) setzen wir  $\psi(x, t) = X(x)T(t)$  an. Dies ergibt

$$-\frac{\hbar^2}{2m} X''T + VXT = i\hbar XT', \quad (2.153)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{X''}{X} + V = i\hbar \frac{T'}{T} = E, \quad (2.154)$$

wobei wir die Separationskonstante natürlich  $E$  genannt haben, weil sie sich als die Energie der durch die Wellenfunktion  $\psi$  beschriebenen Zustände herausstellt. Die Lösung der zeitlichen Gleichung ist einfach

$$T(t) = e^{-iEt/\hbar}. \quad (2.155)$$

Für den räumlichen Anteil erhalten wir das Sturm-Liouville-Problem

$$-\frac{\hbar^2}{2m} X'' + V(x) X = EX \quad (2.156)$$

mit vorgegebenen Randbedingungen und das ist gerade die *zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung*. Gemäß der Sturm-Liouville-Theorie erwarten wir nur Lösungen, d.h. *Eigenfunktionen*  $X_n(x)$ , für gewisse *Eigenwerte* oder hier *Eigenenergien*  $E_n$ . Die zu  $E_n$  gehörende Zeitentwicklung wird dann durch den Faktor  $e^{-iE_n t/\hbar}$  beschrieben.

### 3 Die Wellengleichung

In einer Raumdimension lautet die *Wellengleichung*

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}. \quad (3.1)$$

$c > 0$  kann im allgemeinen Fall von  $x$  und  $t$  abhängen, aber wir werden hauptsächlich den Fall mit konstantem  $c$  behandeln. Diese PDG ist von zweiter Ordnung, linear, homogen und *hyperbolisch*.

Zum anschaulichen Verständnis siehe wieder Abb. 1: Die zweite räumliche Ableitung  $u_{xx}$  beschreibt die Abweichung der Funktion gegenüber benachbarten Punkten  $x \pm \Delta x$ . Wie in der Diffusionsgleichung gilt: Ist  $u$  größer (kleiner) als dieser Mittelwert, so verringert (erhöht) sich  $u$  mit der Zeit. In der Wellengleichung ist jetzt aber die *Beschleunigung* oder rücktreibende Kraft dieser Änderung proportional zur Abweichung.

Zur Motivation leiten wir die Wellengleichung für ein einfaches physikalisches System her: Gegeben sei eine Kette von Massen  $\Delta m$  verbunden durch Federn. Im Gleichgewicht mögen sich die Massen an den Orten  $x = n\Delta x$  befinden. Die Federkonstanten seien  $K/\Delta x$  (kürzere Federn sind härter). Wir betrachten Auslenkungen der Massen *parallel* zur Kette, d.h. *longitudinale* Auslenkungen, um  $u(x)$ . Die Kraft auf die Masse  $n$  bei  $n\Delta x$  ist

$$\Delta F_n = -\frac{K}{\Delta x} [u(x) - u(x - \Delta x)] + \frac{K}{\Delta x} [u(x + \Delta x) - u(x)] = \frac{K}{\Delta x} [u(x + \Delta x) + u(x - \Delta x) - 2u(x)]. \quad (3.2)$$

Mit der Newtonschen Bewegungsgleichung folgt also

$$\Delta m u_{tt}(x) = \frac{K}{\Delta x} [u(x + \Delta x) + u(x - \Delta x) - 2u(x)] \quad (3.3)$$

oder

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} u_{tt}(x) = K \frac{u(x + \Delta x) + u(x - \Delta x) - 2u(x)}{\Delta x^2}. \quad (3.4)$$

Nach Übergang zum Kontinuum,  $\Delta m \rightarrow 0$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta m/\Delta x = \text{const} =: \mu$ , beschreibt die Gleichung eine elastische Saite. Die Gleichung wird

$$\mu u_{tt} = K u_{xx} \quad \Rightarrow \quad u_{tt} = \frac{K}{\mu} u_{xx}. \quad (3.5)$$

Das ist die Wellengleichung mit  $c^2 = K/\mu$ . Für *transversale* Auslenkungen erhält man eine analoge Gleichung (mit einer anderen Konstanten  $c^2$ ).

Typische Randbedingungen an den Enden der Saite sind:

1. *fester* Rand, ein Ende wird festgehalten:  $u = 0$ ; allgemeiner kann die Auslenkung des Randes auch eine vorgegebene Funktion der Zeit sein (Dirichlet-Randbedingung)
2. *offener* (freier) Rand, auf ein Ende wirkt keine zusätzliche Kraft:  $u_x = 0$  (Neumann-Randbedingung)
3. *elastische Befestigung*, in diesem Fall ergibt die Elastizitätstheorie einen linearen Zusammenhang zwischen  $u$  und  $u_x$  und es gilt an dem Ende  $au + bu_x = 0$  (gemischte Randbedingungen)

Neben Randbedingungen an den räumlichen Rändern des Definitionsgebietes müssen wir noch Anfangsbedingungen zu einem bestimmten Zeitpunkt ( $t = 0$ ) festlegen. Betrachten wir folgendes Problem: Eine Saite der Länge 1 ist fest eingespannt, d.h.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad (3.6)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0. \quad (3.7)$$

Weiter sei die Auslenkung am Anfang vorgegeben:

$$u(x, 0) = \phi(x). \quad (3.8)$$

Ist die Lösung dadurch im Wesentlichen eindeutig bestimmt?

Antwort: Nein! Denn sei

$$w(x, t) = \sin(\pi ct) \sin \pi x, \quad (3.9)$$

dann ist

$$w_{tt} = -\pi^2 c^2 \sin(\pi ct) \sin \pi x, \quad (3.10)$$

$$w_{xx} = -\pi^2 \sin(\pi ct) \sin \pi x, \quad (3.11)$$

$$w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0 \quad (3.12)$$

und außerdem  $w(0, t) = w(1, t) = w(x, 0) = 0$ . Daher erfüllt  $u + bw$  ( $b = \text{const}$ ) ebenfalls die PDG mit den gegebenen Randbedingungen.

Es ist leicht zu verstehen, wieso die Vorgabe von  $u(x, 0)$  nicht ausreicht: Mit den gegebenen Informationen können wir für  $t = 0$  folgende Funktionen berechnen:

- $u_x, u_{xx}, \dots$  durch Differentiation von  $\phi(x)$ ,
- $u_{tt}$  durch anschließende Anwendung der PDG.

Wir haben aber keine Möglichkeit, die Steigung  $u_t$  bei  $t = 0$  zu bestimmen! Also sollte diese ebenfalls vorgegeben werden. Dies ist analog zum Fall gewöhnlicher Differentialgleichungen. Diese Art von Argumenten wird in der Theorie der Charakteristiken ausgenutzt.

Wir betrachten zunächst den instruktiven Fall eines unendlichen räumlichen Intervalls. Sei also

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{für } -\infty < x < \infty, \quad (3.13)$$

$$u(x, 0) = h(x), \quad (3.14)$$

$$u_t(x, 0) = p(x). \quad (3.15)$$

Dieses Problem läßt sich leicht explizit lösen. Die Lösung geht zurück auf D'Alembert. Wir führen neue Variablen ein:

$$\xi = x + ct, \quad (3.16)$$

$$\eta = x - ct. \quad (3.17)$$

Dann ist

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} = c \frac{\partial}{\partial \xi} - c \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (3.19)$$

und daher

$$0 = u_{tt} - c^2 u_{xx} = c^2 (u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) - c^2 (u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) = -4c^2 u_{\xi\eta}. \quad (3.20)$$

Die PDG lautet also in den neuen Variablen einfach

$$u_{\xi\eta} = 0. \quad (3.21)$$

Die *allgemeine* Lösung dieser PDG ist

$$u = \alpha(\xi) + \beta(\eta) \quad (3.22)$$

mit beliebigen hinreichend oft stetig differenzierbaren Funktionen  $\alpha, \beta$ . Mit den Definitionen von  $\xi$  und  $\eta$  lautet die allgemeine Lösung also:

$$u(x, t) = \alpha(x + ct) + \beta(x - ct). \quad (3.23)$$

Wir müssen aber noch die Anfangsbedingungen berücksichtigen:

$$u(x, 0) = \alpha(x) + \beta(x) = h(x), \quad (3.24)$$

$$u_t(x, 0) = c\alpha'(x) - c\beta'(x) = p(x). \quad (3.25)$$

Sei  $P(x) = \int dx p(x)$  die Stammfunktion von  $p(x)$ . Dann lautet die Lösung für  $\alpha, \beta$ :

$$\alpha(x) = \frac{h(x)}{2} + \frac{P(x)}{2c} + K, \quad (3.26)$$

$$\beta(x) = \frac{h(x)}{2} - \frac{P(x)}{2c} - K \quad (3.27)$$

mit einer Integrationskonstanten  $K$ , wie man leicht durch Einsetzen sieht.

Für  $u(x, t)$  ergibt dies schließlich

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{h(x + ct) + h(x - ct)}{2} + \frac{P(x + ct) - P(x - ct)}{2c} \\ &= \frac{h(x + ct) + h(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} ds p(s) \\ &= \frac{u(x + ct, 0) + u(x - ct, 0)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} ds u_t(s, 0) \end{aligned} \quad (3.28)$$



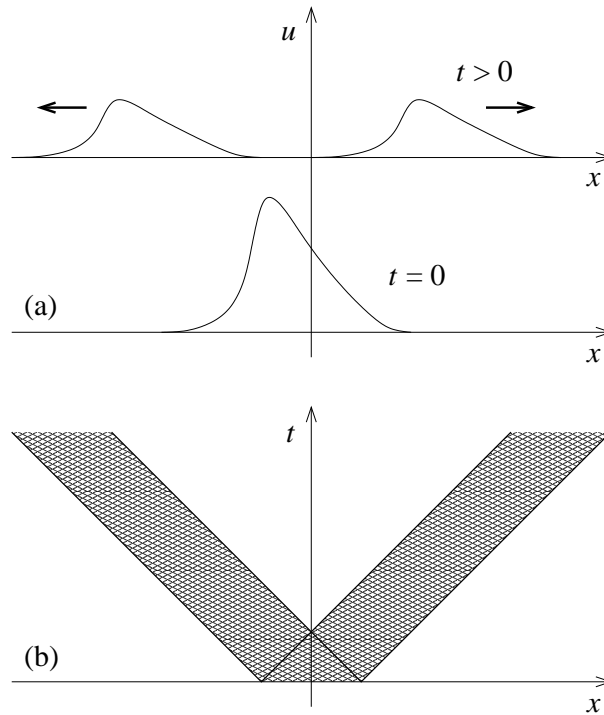


Abbildung 9: (a) D'Alembert-Lösung der eindimensionalen Wellengleichung für  $-\infty < x < \infty$  mit  $u(x, 0)$  vorgegeben und  $u_t(x, 0) = 0$ . Die Lösung ist für  $t = 0$  und für eine Zeit  $t > 0$  gezeigt. (b) Bereich von  $x$ -Werten, für die  $u(x, t)$  in demselben Problem von Null verschieden ist.

( $K$  hebt sich heraus).

Was bedeutet diese Lösung? Wir betrachten zuerst einen Spezialfall: Wird die Saite ausgelenkt auf  $u(x, 0) = h(x)$  und losgelassen, so ist  $u_t(x, 0) = 0$  und

$$u(x, t) = \frac{h(x + ct) + h(x - ct)}{2}. \quad (3.29)$$

Also verschiebt sich die Hälfte der Anfangsauslenkung ohne Verformung nach links und die Hälfte nach rechts, siehe Abb. 9. Die Geschwindigkeit der Verschiebung ist  $\pm c$ . Für allgemeine Anfangsbedingungen beweisen wir jetzt folgenden Satz:

**Satz:** Sei  $u(x, t)$  eine Lösung der Wellengleichung  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$  auf  $-\infty < x < \infty$  mit den Anfangsbedingungen  $u(x, 0) = h(x)$  und  $u_t(x, 0) = p(x)$ . Seien  $h(x) = 0$  und  $p(x) = 0$  für  $x \notin [a, b]$ . Dann ist  $u(x, t) = 0$  für alle  $x > b + ct$  und für alle  $x < a - ct$ .

**Beweis:** Wir zeigen die Aussage  $u(x, t) = 0$  für  $x > b + ct$ , die zweite folgt analog. Sei  $x = b + ct + \Delta x$  mit  $\Delta x > 0$ . Dann ist nach Gl. (3.28)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{h(x + ct) + h(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} ds p(s) \\ &= \frac{h(b + 2ct + \Delta x) + h(b + \Delta x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{b+\Delta x}^{b+2ct+\Delta x} ds p(s) = 0, \end{aligned} \quad (3.30)$$

wegen  $h(x) = p(x) = 0$  für  $x > b$ .

Also breitet sich ein Signal höchstens mit der Geschwindigkeit  $c$  aus; im Beispiel oben haben wir gesehen, dass diese Schranke für die Geschwindigkeit tatsächlich angenommen wird. Beachte den Unterschied zur Diffusionsgleichung, bei der die Ausbreitungsgeschwindigkeit unendlich ist.

### 3.1 Separationsansatz

Die Methode der Separation und anschließender Entwicklung in Eigenfunktionen des sich ergebenden Sturm-Liouville-Problems läßt sich analog zur Diffusionsgleichung anwenden. Wir betrachten nur ein einfaches **Beispiel:** Eine Klarinette besteht im Wesentlichen aus einem zylindrischen, dünnen Rohr, das am Mundstück näherungsweise geschlossen und am Schalltrichter offen ist. Dies führt auf die PDG

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{für } 0 < x < L, \quad (3.31)$$

$$u(0, t) = 0, \quad (3.32)$$

$$u_x(L, t) = 0, \quad (3.33)$$

$$u(x, 0) = h(x), \quad (3.34)$$

$$u_t(x, 0) = p(x). \quad (3.35)$$

Hier ist  $c$  offenbar die Schallgeschwindigkeit in Luft.

Wir machen den Separationsansatz

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (3.36)$$

$$XT'' = c^2 X''T, \quad (3.37)$$

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} = -K. \quad (3.38)$$

Die zeitliche Gleichung ist nun von *zweiter* Ordnung. Für  $K > 0$  hat sie die allgemeine Lösung

$$T(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t = A \sin(\omega t + \phi) \quad (3.39)$$

mit  $\omega = c\sqrt{K}$  und einer noch unbestimmten Phase  $\phi$ . (Für  $K < 0$  können wir zeigen, dass keine Lösung für die gegebenen Randbedingungen existiert.)

Die räumliche Gleichung hat die allgemeine Lösung

$$X(x) = B_1 \sin(\sqrt{K}x) + B_2 \cos(\sqrt{K}x). \quad (3.40)$$

Die Randbedingungen erfordern

$$X(0) = B_2 = 0, \quad (3.41)$$

$$X'(L) = B_1 \sqrt{K} \cos(\sqrt{K}L) - B_2 \sqrt{K} \sin(\sqrt{K}L) = 0. \quad (3.42)$$

Also

$$\cos(\sqrt{K}L) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{K}L = (2n+1)\pi. \quad (3.43)$$

Die Lösungen für  $X(x)$  lauten demnach

$$X_n(x) = \sin \left[ (2n+1)\pi \frac{x}{L} \right]. \quad (3.44)$$

Nach der Sturm-Liouville-Theorie bilden diese Funktionen ein vollständiges, orthogonales System auf  $[0, L]$ . Außerdem finden wir die *Eigenfrequenzen*

$$\omega = (2n+1)\pi \frac{c}{L}. \quad (3.45)$$

Nur die ungeradzahigen Frequenzen treten auf; dies ist für den charakteristischen Klang einer Klarinette von entscheidender Bedeutung.

Die mit den Randbedingungen verträgliche Lösung läßt sich als Reihe in den Eigenfunktionen schreiben:

$$u(x, t) = \sum_n C_n \sin \left[ (2n+1)\pi \frac{c}{L} t + \phi \right] \sin \left[ (2n+1)\pi \frac{x}{L} \right], \quad (3.46)$$

$$u_t(x, t) = \sum_n (2n+1)\pi \frac{c}{L} C_n \cos \left[ (2n+1)\pi \frac{c}{L} t + \phi \right] \sin \left[ (2n+1)\pi \frac{x}{L} \right]. \quad (3.47)$$

Einsetzen von  $t = 0$  in der Lösung ergibt

$$u(x, 0) = h(x) = \sum_n C_n \sin \phi X_n(x), \quad (3.48)$$

$$u_t(x, 0) = p(x) = \sum_n (2n+1)\pi \frac{c}{L} C_n \cos \phi X_n(x). \quad (3.49)$$

Die Anfangsbedingungen können wir erfüllen, indem wir sie nach diesen Eigenfunktionen entwickeln:

$$h(x) = \sum_n H_n X_n(x), \quad (3.50)$$

$$p(x) = \sum_n P_n X_n(x). \quad (3.51)$$

Vergleich ergibt

$$H_n = C_n \sin \phi, \quad (3.52)$$

$$P_n = (2n + 1)\pi \frac{c}{L} C_n \cos \phi. \quad (3.53)$$

Wir erhalten die Koeffizienten wie üblich:

$$\begin{aligned} \int_0^L dx X_m(x) h(x) &= \sum_n H_n \int_0^L dx X_m(x) X_n(x) \\ &= H_m \int_0^L dx X_m^2(x), \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \int_0^L dx X_m(x) p(x) &= \sum_n P_n \int_0^L dx X_m(x) X_n(x) \\ &= P_m \int_0^L dx X_m^2(x). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Danach können wir Gleichungen (3.52) und (3.53) nach  $C_n$  und  $\phi$  auflösen. Damit ist die Lösung für gegebene  $h(x)$ ,  $p(x)$  bestimmt.

### 3.2 Koordinatensysteme

Wir wollen anhand der Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy} + \dots) \equiv c^2 \nabla^2 u \quad (3.56)$$

die Separation in mehreren Raumdimensionen erläutern. Die Rechnung für die Diffusionsgleichung und die Schrödinger-Gleichung verläuft analog. In Fällen mit rechteckigen Rändern

$$\begin{aligned} x_0 &< x < x_1, \\ y_0 &< y < y_1, \dots \end{aligned} \quad (3.57)$$

ist offensichtlich, dass wir den folgenden Separationsansatz versuchen würden:

$$u(x, y, \dots, t) = X(x) Y(y) \dots T(t). \quad (3.58)$$

Bei anderen Geometrien müssen wir zunächst geeignetere Koordinaten einführen. Dafür betrachten wir die zwei wichtigsten Beispiele:

#### Ebene Polarkoordinaten

Ein typisches Beispiel sind die Schwingungen eines Trommelfells des Radius  $r_0$ . Hier ist  $u(x, y, t)$  die transversale Auslenkung. In kartesischen Koordinaten,

$$u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy}), \quad (3.59)$$

ist die Formulierung der Randbedingungen ziemlich kompliziert:

$$u(x, y, t) = 0 \quad \text{für } x^2 + y^2 = r_0^2. \quad (3.60)$$

Die natürlichen Koordinaten sind hier ebene Polarkoordinaten  $r$ ,  $\phi$  mit

$$x = r \cos \phi, \quad (3.61)$$

$$y = r \sin \phi, \quad (3.62)$$

in denen sich die Randbedingung vereinfacht zu

$$u(r = r_0, \phi, t) = 0. \quad (3.63)$$

Jedoch erhalten wir eine zwei Randbedingung für die  $\phi$ -Abhängigkeit einfach aus der Bedingung, dass  $u$  stetig sein soll. Dies erfordert, wenn wir  $\phi$  auf  $[0, 2\pi]$  einschränken,

$$u(r, \phi = 2\pi, t) = u(r, \phi = 0, t), \quad (3.64)$$

d.h. *periodische* Randbedingungen. Für die partiellen Ableitungen gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} = \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi} = \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (3.66)$$

und daher

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (3.67)$$

Die PDG lautet also

$$u_{tt} = \frac{c^2}{r} (ru_r)_r + \frac{c^2}{r^2} u_{\phi\phi} \quad (3.68)$$

oder

$$r^2 u_{tt} = c^2 r (ru_r)_r + c^2 u_{\phi\phi} \quad (3.69)$$

mit der Randbedingung

$$u(r = r_0, \phi, t) = 0 \quad (3.70)$$

und allgemeinen Anfangsbedingungen

$$u(r, \phi, 0) = h(r, \phi), \quad (3.71)$$

$$u_t(r, \phi, 0) = p(r, \phi). \quad (3.72)$$

Wir lösen diese PDG mit dem Separationsansatz:

$$u(r, \phi, t) = R(r) \Phi(\phi) T(t), \quad (3.73)$$

$$r^2 R \Phi T'' = c^2 r (rR')' \Phi T + c^2 R \Phi'' T, \quad (3.74)$$

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{(rR')'}{rR} + \frac{\Phi''}{r^2 \Phi} = -K. \quad (3.75)$$

Die linke Seite hängt nur von  $t$  ab, die rechte nur von  $r$  und  $\phi$ , so dass beide gleich einer Konstanten sein müssen. Daher ist für  $K > 0$

$$T(t) = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (3.76)$$

mit einer noch freien Phase  $\alpha$  und  $\omega = c\sqrt{K}$ . Wieder existieren keine Lösungen für  $K < 0$ .

Die räumliche Gleichung schreiben wir etwas anders,

$$\frac{r(rR')'}{R} + Kr^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi}. \quad (3.77)$$

Jetzt hängt die linke Seite nur von  $r$  und die rechte nur von  $\phi$  ab. Beide müssen also wieder gleich einer Separationskonstanten sein, die wir  $L$  nennen. Die Winkelabhängigkeit ist einfach:  $\Phi'' = -L\Phi$ . Wegen der Stetigkeit von  $u$  muss außerdem gelten  $\Phi(2\pi) = \Phi(0)$ . Die Lösungen für  $L > 0$  sind

$$\Phi(\phi) = B e^{im\phi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.78)$$

und  $L = m^2$ . Für  $L < 0$  erhält man keine in  $\phi$  periodischen Lösungen. Man kann die komplexen Lösungen zu  $\pm m$  zu reellen linear kombinieren,

$$\Phi(\phi) = B_1 \cos m\phi + B_2 \sin m\phi, \quad (3.79)$$

wobei hier  $\sin$  und  $\cos$  auftreten, da wir *periodische* Randbedingungen erhalten:

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi). \quad (3.80)$$

Wir können auch schreiben

$$\Phi(\phi) = B \sin(m\phi + \beta) \quad (3.81)$$

mit einem Winkel  $\beta$ , der die Drehung der Funktion um den Ursprung beschreibt.

Schließlich lautet die Gleichung für die radiale Funktion:

$$r(rR')' + Kr^2 R = m^2 R \quad (3.82)$$

mit  $R(r_0) = 0$ . Wir substituieren  $r = \rho/\sqrt{K}$  und erhalten

$$\rho[\rho R'(\rho)]' + (\rho^2 - m^2) R(\rho) = 0 \quad (3.83)$$

$$\Rightarrow \rho^2 R'' + \rho R' + (\rho^2 - m^2) R = 0. \quad (3.84)$$

Die ist die *Besselsche Differentialgleichung* mit der allgemeinen Lösung

$$R(\rho) = aJ_m(\rho) + bY_m(\rho). \quad (3.85)$$

Die *Bessel-Funktionen* erster Art,  $J_m(\rho)$ , und zweiter Art,  $Y_m(\rho)$ , oszillieren mit für  $x \rightarrow \infty$  verschwindender Amplitude. Für  $x \rightarrow 0$  geht  $J_0$  gegen eins, alle anderen  $J_m$  verschwinden und alle  $Y_m$  divergieren. Im Fall eines Trommelfells sind sicherlich nur endliche Auslenkungen sinnvoll, d.h.  $b = 0$ .

Die Randbedingung  $R(r_0) = 0$  erfordert, dass  $\sqrt{K}r_0$  eine Nullstelle von  $J_m$  ist. Sei  $\zeta_i^{(m)}$  die  $i$ -te Nullstelle von  $J_m(x)$  für  $x > 0$ . Dann gilt

$$\sqrt{K} = \frac{\zeta_i^{(m)}}{r_0}, \quad \omega = \frac{\zeta_i^{(m)} c}{r_0}. \quad (3.86)$$

Es existiert kein geschlossener Ausdruck für die  $\zeta_i^{(m)}$ .

Die allgemeine Lösung ist schließlich

$$u(r, \phi, t) = \sum_m \sum_i A_{mi} \sin(\omega_{mi} t + \alpha_{mi}) \sin(m\phi + \beta_{mi}) J_m\left(\zeta_i^{(m)} \frac{r}{r_0}\right) \quad (3.87)$$

mit

$$\omega_{mi} = \frac{\zeta_i^{(m)} c}{r_0}. \quad (3.88)$$

Für  $t = 0$  bilden die Summandenfunktionen ein vollständiges Orthogonalsystem, weil die  $\Phi(\phi)$  offensichtlich eines bilden (Fourier-Reihe auf  $[0, 2\pi]$ ) und weil die  $R(r)$  die Lösungen eines Sturm-Liouville-Problems sind. Daher können wir die Anfangsbedingungen wieder in diese Funktionen entwickeln, wobei die Integrale nun natürlich über  $r, \phi$  zu führen sind.

Die Ergebnisse für die *Eigenmoden* sind jedoch auch für sich genommen interessant. Wir sind jetzt in der Lage, das gesamte Frequenzspektrum  $\omega_{mi}$  eines idealen Trommelfells auszurechnen. Dabei beobachten wir, dass die Frequenzen *nicht* alle Vielfache einer Grundfrequenz sind, im Gegensatz zu einer schwingenden Saite oder Luftsäule. Aus diesem Grund gibt eine Trommel keinen „sauberen Ton“ von sich, sondern eher ein „Geräusch“.

Zur Darstellung der Schwingungsmoden im Raum  $(r, \phi)$  bietet es sich an, die *Knotenlinien* zu zeichnen, d.h. die Linien mit  $u(x, \phi, t) = 0$ , an denen das Trommelfell in Ruhe bleibt. Abbildung 10 zeigt qualitativ die einfachsten Eigenmoden. Alle nicht rotations-symmetrischen Moden (d.h. mit  $m > 0$ ) repräsentieren jeweils eine ganze Klasse von entarteten Moden derselben Frequenz aber unterschiedlicher Phase  $\beta_{mi}$ .

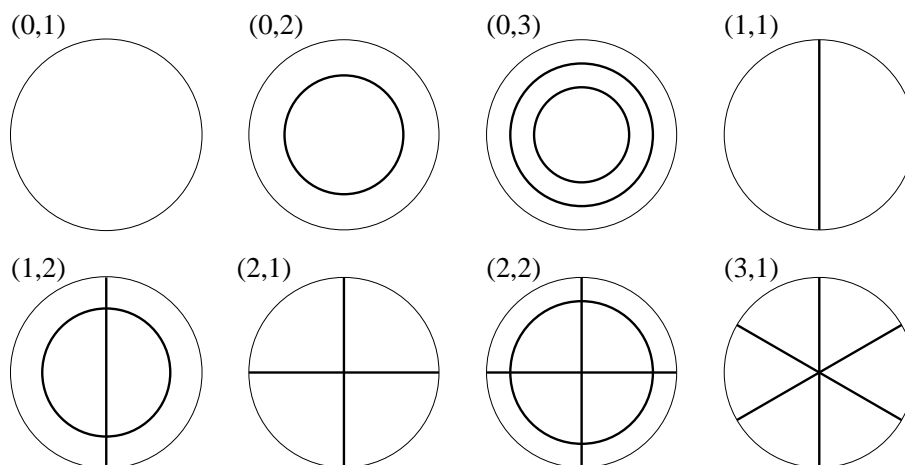


Abbildung 10: *Knotenlinien der einfachsten Eigenmoden eines runden Trommelfells jeweils mit den charakteristischen Zahlen  $(m, i)$ . Beachte, dass  $m$  die Anzahl der radialen Knotenlinien und  $i - 1$  die der kreisförmigen angibt.*

### Sphärische Polarkoordinaten

Bei dreidimensionalen Problemen mit radialer Symmetrie transformiert man sinnvollerweise auf sphärische Polarkoordinaten oder Kugelkoordinaten  $r, \theta, \phi$  mit

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad (3.89)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi, \quad (3.90)$$

$$z = r \cos \theta. \quad (3.91)$$

Das typische Beispiel ist die quantenmechanische Lösung der Schrödinger-Gleichung für das Wasserstoffatom. Diese Lösung wiederholen wir hier nicht. Wir geben nur an, dass in Kugelkoordinaten gilt

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (3.92)$$

Der Separationsansatz lautet

$$u(r, \theta, \phi, t) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi) T(t). \quad (3.93)$$

Bei radialer Symmetrie der Gleichung (nicht unbedingt der Anfangsbedingungen!) sind die Eigenfunktionen der Winkel die bekannten *Kugelflächenfunktionen*

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (3.94)$$

mit den *Zugeordneten Legendre-Funktionen*

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^{l+m}}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (1-x^2)^l. \quad (3.95)$$

Die  $Y_{lm}$  erfüllen die Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{l'm'}(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (3.96)$$

Diese kann man wieder ausnutzen, um beliebige Anfangsbedingungen für  $u$  und  $u_t$  zu erfüllen.

### 3.3 Integral-Transformationen

Wir hatten in Abschnitt 2.4 bereits die Laplace-Transformation, hier für die Variable  $t$ , eingeführt. Jetzt wollen wir die für die Lösung von PDG's wichtigen Integral-Transformationen auflisten, wobei die Transformierte einer Funktion  $f$  jeweils mit  $F$  bezeichnet ist:

1. Fourier-Sinus-Transformation

$$F(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dt \sin \omega t f(t) \quad (3.97)$$

$$f(t) = \int_0^\infty d\omega \sin \omega t F(\omega) \quad (3.98)$$

2. Fourier-Cosinus-Transformation

$$F(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dt \cos \omega t f(t) \quad (3.99)$$

$$f(t) = \int_0^\infty d\omega \cos \omega t F(\omega) \quad (3.100)$$

3. Fourier-Transformation

$$F(k) = \int_{-\infty}^\infty dx e^{-ikx} f(x) \quad (3.101)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dk e^{ikx} F(k) \quad (3.102)$$

Die hier angegebene Konvention für die Verteilung der Vorfaktoren ist in der Physik üblich. In der Mathematik verwendet man eher die symmetrische Definition mit Faktoren  $1/\sqrt{2\pi}$  in Transformation und Umkehr-Transformation. Es ist in der Physik üblich, bei Transformationen nach der Zeit die Vorzeichen in den Exponenten umgekehrt zu definieren.

4. Fourier-Sinus-Reihe

$$F_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx \sin \left( n\pi \frac{x}{L} \right) f(x) \quad (3.103)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty F_n \sin \left( n\pi \frac{x}{L} \right) \quad (3.104)$$

## 5. Fourier-Cosinus-Reihe

$$F_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx \cos\left(n\pi \frac{x}{L}\right) f(x) \quad (3.105)$$

$$f(x) = \frac{F_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \quad (3.106)$$

## 6. Laplace-Transformation

$$F(s) = \int_0^{\infty} dt e^{-st} f(t) \quad (3.107)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds e^{st} F(s) \quad (3.108)$$

## 7. Hankel-Transformation

$$F_n(k) = \int_0^{\infty} dr r J_n(kr) f(r) \quad (3.109)$$

$$f(r) = \int_0^{\infty} dk k J_n(kr) F_n(k) \quad (3.110)$$

Im Prinzip können wir diese Transformationen für eine zeitliche oder eine räumliche unabhängige Variable anwenden oder auch für mehrere Variablen.

Der *Zweck* einer Integral-Transformation einer PDG ist, die Anzahl der unabhängigen Variablen zu reduzieren – im Idealfall wird die PDG auf eine gewöhnliche Differentialgleichung oder sogar auf eine algebraische Gleichung reduziert. Das wird dadurch erreicht, dass die Ableitung nach der in der Transformation auftretenden Variablen auf eine Multiplikation abgebildet wird. Für die Laplace-Transformation haben wir das bereits gezeigt, für die verschiedenen Fourier-Transformationen ist es hinlänglich bekannt. Die Berechnung verwendet jeweils partielle Integration. Für die Hankel-Transformation sind die Ausdrücke nicht so einfach, da sie Transformationen mit verschiedenen  $n$  verknüpfen.

*Welche* Transformation jeweils angemessen ist, hängt zunächst vom Definitionsintervall der Funktion und evtl. von ihrer Symmetrie ab:

- endliches Intervall: Fourier-Sinus/Cosinus-Reihe
- halboneinfaches Intervall: Fourier-Sinus/Cosinus- oder Laplace- oder Hankel-Transformation
- reelle Achse: Fourier-Transformation
  - *periodische* Funktion: Fourier-Sinus/Cosinus-Reihe
  - *gerade* oder *ungerade* Funktion (d.h. wohlbestimmte *Parität*): Fourier-Sinus/Cosinus-Reihe (manchmal ist es aber einfacher, die volle Fourier-Transformation zu verwenden)

Die Integral-Transformationen entwickeln eine Funktion in gewisse *orthogonale Funktionen*. Auf solche Entwicklungen waren wir auch vom Separationsansatz über das sich ergebende Sturm-Liouville-Problem geführt worden. Wir fassen die wesentlichen Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen den beiden Methoden zusammen:

Separation und Sturm-Liouville-Theorie	Integral-Transformation
Gleichungen 2. Ordnung	beliebige Ordnung
vollständige Separation (eine Variable) erforderlich	auch in mehreren Variablen
Separation muss Sturm-Liouville-Gleichung ergeben (insb. zweiter Ordnung) <sup>1</sup>	keine Einschränkung
Funktionensystem ergibt sich	Funktionensystem vorgegeben; wenige Standard-Systeme
Lösung i.A. als Reihenentwicklung, Summation selten analytisch möglich	Rücktransformation evtl. schwierig

Wir haben bereits Beispiele kennengelernt, in denen das Sturm-Liouville-Problem auf das Funktionensystem führt, nach dem eine der Integral-Transformationen entwickelt:

<sup>1</sup>Z.B. ist die zeitliche Gleichung für die Diffusionsgleichung nicht von dieser Form.

- Diffusionsgleichung auf  $[0, 1]$ , homogene Dirichlet-Randbedingungen: Fourier-Sinus-Reihe,
- Wellengleichung für kreisförmiges Trommelfell, homogene Dirichlet-Randbedingungen: Hankel-Transformation (Radialgleichung).

Wir betrachten ein **Beispiel** mit Transformation nach den *räumlichen* Variablen, nachdem wir schon in Abschnitt 2.4 Transformationen nach der Zeit kennen gelernt haben. Gegeben sei die Wellengleichung in drei Raumdimensionen mit einer lokalen Auslenkung in den Anfangsbedingungen:

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \quad \text{für } -\infty < x, y, z < \infty, \quad (3.111)$$

$$u(\mathbf{r}, 0) = \delta(x) \delta(y) \delta(z) \equiv \delta(\mathbf{r}), \quad (3.112)$$

$$u_t(\mathbf{r}, 0) = 0. \quad (3.113)$$

Wir verwenden die Fourier-Transformation nach  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ :

$$U(\mathbf{k}, t) := \int d^3r e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} u(\mathbf{r}, t). \quad (3.114)$$

Die Transformation des Gradienten  $\nabla u$  ergibt mittels partieller Integration

$$\int d^3r e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \nabla u(\mathbf{r}, t) = - \int d^3r (\nabla e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) u(\mathbf{r}, t), \quad (3.115)$$

wobei wir angenommen haben, dass  $u$  für große  $|\mathbf{r}|$  hinreichen schnell abfällt. Dies ist aber

$$\dots = +i\mathbf{k} \int d^3r e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} u(\mathbf{r}, t) = i\mathbf{k}U. \quad (3.116)$$

Die Anfangsbedingungen transformieren wir ebenfalls:

$$U(\mathbf{k}, 0) = \int d^3r e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r}) = 1, \quad (3.117)$$

$$U_t(\mathbf{k}, 0) = 0. \quad (3.118)$$

Die Gleichung lautet also Fourier-transformiert

$$U'' = -c^2k^2U, \quad (3.119)$$

$$U(\mathbf{k}, 0) = 1, \quad (3.120)$$

$$U'(\mathbf{k}, 0) = 0, \quad (3.121)$$

wobei  $k := |\mathbf{k}|$ . Es handelt sich jetzt um eine gewöhnliche Differentialgleichung, in der  $\mathbf{k}$  nur als Parameter erscheint. Die allgemeine Lösung ist einfach

$$U(\mathbf{k}, t) = A \sin ckt + B \cos ckt. \quad (3.122)$$

Die Anfangsbedingungen ergeben

$$U(\mathbf{k}, t) = \cos ckt. \quad (3.123)$$

Schließlich müssen wir die Lösung zurück transformieren, was am besten in Kugelkoordinaten für  $\mathbf{k}$  auszuführen ist, wobei der Winkel  $\theta$  gegenüber  $\mathbf{r}$  gemessen wird,

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \cos ckt = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk d\theta d\phi k^2 \sin \theta e^{ikr \cos \theta} \cos ckt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int dk d\theta k^2 \sin \theta e^{ikr \cos \theta} \cos ckt. \end{aligned} \quad (3.124)$$

Mittels der Substitution  $v = \cos \theta$ ,  $dv = -d\theta \sin \theta$  wird dies

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk k^2 \int_{-1}^1 dv e^{ikrv} \cos ckt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk k^2 \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr} \cos ckt \\ &= \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty dk k \sin kr \cos ckt \end{aligned} \quad (3.125)$$



Dieses Integral ist formal nicht konvergent. Wir führen einen konvergenzerzeugenden Faktor  $e^{-\lambda k^2}$  ein und schicken am Ende  $\lambda \rightarrow 0^+$ . Dieses Verfahren führt nicht immer auf das richtige Ergebnis, d.h. wir müssen unser Resultat durch Einsetzen überprüfen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}, t) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty dk k \sin kr \cos ckt e^{-\lambda k^2} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi^2 r} \frac{\sqrt{\pi}}{8\lambda^{3/2}} \left( (r - ct) \exp \left[ -\frac{(r - ct)^2}{4\lambda} \right] + (r + ct) \exp \left[ -\frac{(r + ct)^2}{4\lambda} \right] \right) \\ &= 0 \quad \text{für } r \neq ct, \end{aligned} \tag{3.126}$$

da die Exponentialfunktionen für  $\lambda \rightarrow 0^+$  hinreichend schnell verschwinden. Also muss  $u(\mathbf{r}, t)$  proportional zu  $\delta(r - ct)$  sein. Wir machen den Ansatz

$$u(\mathbf{r}, t) = f(r) \delta(r - ct). \tag{3.127}$$

Dann ist

$$\int d^3r u(\mathbf{r}, t) = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 f(r) \delta(r - ct) = 4\pi c^2 t^2 f(ct). \tag{3.128}$$

Andererseits gilt für unsere Lösung

$$\int d^3r u(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{k} = 0, t) = 1. \tag{3.129}$$

Gleichsetzen ergibt

$$f(ct) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \tag{3.130}$$

und damit die Lösung

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi r^2} \delta(r - ct). \tag{3.131}$$

Die Lösung ist eine sich ausbreitende Kugelwelle, deren Amplitude wie  $1/r^2$  abnimmt, d.h. umgekehrt proportional zur Oberfläche der Kugel. Bachte, dass hinter der Wellenfront wieder  $u(\mathbf{r}, t) = 0$  ist.

## 4 Die Poisson-Gleichung und die Laplace-Gleichung

Die *Poisson-Gleichung* lautet

$$\nabla^2 u \equiv u_{xx} + u_{yy} + \dots = f(\mathbf{r}). \quad (4.1)$$

Ist die Gleichung homogen, d.h.  $f \equiv 0$ , so nennt man die Gleichung

$$\nabla^2 u = 0 \quad (4.2)$$

*Laplace-Gleichung.* Offenbar ist die Poisson-Gleichung von zweiter Ordnung, linear und elliptisch. Sie repräsentiert damit die dritte Klasse von linearen PDG's zweiter Ordnung.

Die Gleichungen sind aus der Elektrodynamik gut bekannt. Dort führt man zur Lösung der Maxwell-Gleichungen das skalare Potential  $\phi$  und das Vektorpotential  $\mathbf{A}$  ein. Dann folgt aus den Maxwell-Gleichungen, dass das skalare Potential die Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 \phi = 4\pi\rho \quad (4.3)$$

erfüllt, wobei  $\rho$  die Ladungsdichte ist.

Poisson- oder Laplace-Gleichungen ergeben sich auch für *stationäre Lösungen* von Diffusions- oder Wellengleichungen: Betrachte z.B. einen Körper, der sich anfangs im thermischen Gleichgewicht befindet. Ab dem Zeitpunkt  $t = 0$  werden nun bestimmte Energiestromdichten durch die Oberfläche vorgegeben, z.B. durch Bestrahlung mit Licht, Kühlung etc. Diese Ströme sollen nicht überall auf der Oberfläche gleich sein. Wir können auch auf Teilen der Oberfläche stattdessen die Temperatur für  $t > 0$  vorgeben. Die resultierende Temperaturverteilung  $u(\mathbf{r}, t)$  wird durch eine Diffusionsgleichung

$$u_t = a^2 \nabla^2 u \quad (4.4)$$

mit i.A. komplizierten Randbedingungen beschrieben.  $u(\mathbf{r}, t)$  wird nun eine komplizierte Zeitentwicklung durchmachen, aber schließlich, für  $t \rightarrow \infty$ , in einen stationären Zustand übergehen. Dieser ist charakterisiert durch  $u_t = 0$  und daher

$$\nabla^2 u = 0. \quad (4.5)$$

Der stationäre Zustand gehorcht also der Laplace-Gleichung. Es ist wichtig zu bemerken, dass im stationären Zustand durchaus Ströme fließen können.

Da sich Poisson- und Laplace-Gleichungen in der Physik typischerweise für stationäre Phänomene ergeben, beschreibt keine der unabhängigen Variablen die Zeit und es hat daher keinen Sinn, von *Anfangsbedingungen* zu sprechen; alle Ränder des Definitionsbereichs sind von derselben Art.

Wir erinnern noch an die Typen von linearen Randbedingungen:

- Dirichlet: Funktion  $u$  (oder Dichte) vorgegeben,
- Neumann: Normalenableitung  $\partial u / \partial n$  (oder Stromdichte) vorgegeben,<sup>1</sup>
- gemischt: Linearkombination  $au + b\partial u / \partial n$  vorgegeben.

Wenn Neumann-Randbedingungen auf dem *gesamten* Rand gelten, muss noch eine *Konsistenzbedingung* erfüllt sein, wie wir jetzt zeigen: Nach dem Gauß'schen Satz gilt für das ( $n$ -dimensionale) Volumenintegral über die Poissongleichung  $\nabla^2 u = f$ ,

$$\int_V d^n r f(\mathbf{r}) = \int_V d^n r \nabla^2 u = \int_{\partial V} ds \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla u \equiv \int_{\partial V} ds \frac{\partial u}{\partial n}. \quad (4.6)$$

Hier ist  $V$  das  $n$ -dimensionale Volumen und  $\partial V$  sein  $(n-1)$ -dimensionaler Rand.  $\hat{\mathbf{n}}$  ist der Normaleneinheitsvektor auf  $\partial V$  an der Stelle  $\mathbf{r}$  und  $\partial u / \partial n$  ist die Normalenableitung. Der erste Ausdruck der Gleichung (4.6) ergibt sich aber aus der Inhomogenität in der Poisson-Gleichung und der letzte aus den Neumann-Randbedingungen. Sind sie nicht identisch, so existiert keine Lösung.

**Beispiel:** Betrachte die Poisson-Gleichung

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y) \quad \text{für den Kreis } x^2 + y^2 < 1, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = cx \quad \text{für } x^2 + y^2 = 1. \quad (4.8)$$

Die Konsistenzbedingung lautet

$$\int d^2 r f = \int_0^{2\pi} d\phi x = \int_0^{2\pi} d\phi \cos \phi = 0, \quad (4.9)$$

wobei Polarkoordinaten verwendet wurden. Also nur wenn das Integral über  $f$  verschwindet, ist dieses Problem lösbar.

<sup>1</sup>Die Normalenableitung ist definiert durch  $\partial u / \partial n := \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla u$ , wobei  $\hat{\mathbf{n}}$  der nach außen weisende Normaleneinheitsvektor auf dem Rand ist.

## 4.1 Harmonische Funktionen

Eine Funktion  $u$ , die die Laplace-Gleichung

$$\nabla^2 u = 0 \quad (4.10)$$

im Bereich  $D$  erfüllt, nennt man *harmonisch* auf  $D$ . Diese Definition gilt für jede Zahl von unabhängigen Variablen  $n \geq 2$ . Harmonische Funktionen haben zahlreiche nützliche Eigenschaften, von denen wir nun einige diskutieren.

**Satz:** Sei  $u$  eine harmonische Funktion auf  $D$  und sei  $S$  eine *beliebige* geschlossene Hyperfläche in  $D$  einschließlich des Randes.<sup>2</sup> Dann ist

$$\int_S ds \frac{\partial u}{\partial n} = 0. \quad (4.11)$$

Dies folgt sofort aus der Konsistenzbedingung (4.6). Bemerkung: Für zwei Variablen ist  $S$  eine Kurve.

**Satz** (Mittelwertsatz für harmonische Funktionen): Sei  $u$  eine harmonische Funktion auf  $D$  und sei  $\mathbf{r}$  ein Punkt im Inneren von  $D$  (nicht auf dem Rand). Sei

$$C(\mathbf{r}, \rho) := \{\mathbf{r}' \mid |\mathbf{r}' - \mathbf{r}| = \rho\} \quad (4.12)$$

eine Hypersphäre mit Mittelpunkt  $\mathbf{r}$  und Radius  $\rho$ ,<sup>3</sup> die vollständig in  $D$  liegt. Sei

$$U(\mathbf{r}, \rho) := \frac{\int_{C(\mathbf{r}, \rho)} d^{n-1}r u(\mathbf{r})}{\int_{C(\mathbf{r}, \rho)} d^{n-1}r} \quad (4.13)$$

der Mittelwert von  $u$  auf  $C(\mathbf{r}, \rho)$ . Dann ist

$$u(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}, \rho). \quad (4.14)$$

Also ist eine harmonische Funktion an jedem Punkt gleich ihrem Mittelwert über jede Hypersphäre (Kreis, Kugel...) um diesen Punkt, sofern dieser Mittelwert existiert.

**Beweis:** Wir leiten  $U(\mathbf{r}, \rho)$  nach  $\rho$  ab:

$$U_\rho(\mathbf{r}, \rho) = \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\int d\Omega u(\mathbf{r})}{\int d\Omega}. \quad (4.15)$$

Hier ist  $d\Omega = ds/\rho^{n-1}$  ein Raumwinkelelement (in zwei Dimensionen:  $d\phi$ , in drei Dimensionen  $d\phi d\theta \sin\theta$  usw.). Die Integrale erstrecken sich über die Einheitshypersphäre (Einheitskreis, Einheitskugel usw.) in  $n$  Dimensionen. Dann ist

$$U_\rho(\mathbf{r}, \rho) = \frac{\int d\Omega u_\rho(\mathbf{r})}{\int d\Omega} = \frac{\int d\Omega \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial n}}{\int d\Omega} = 0, \quad (4.16)$$

nach dem vorigen Satz. Daher ist der Mittelwert  $U(\mathbf{r}, \rho)$  unabhängig von  $\rho$ . Da aber

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} U(\mathbf{r}, \rho) = u(\mathbf{r}), \quad (4.17)$$

da  $u(\mathbf{r})$  stetig ist (sogar zweimal stetig differenzierbar), folgt

$$U(\mathbf{r}, \rho) = u(\mathbf{r}). \quad (4.18)$$

**Satz** (Maximumprinzip für harmonische Funktionen): Sei  $u$  eine harmonische Funktion auf  $D$ , die nicht konstant ist, dann nimmt  $u$  das Maximum auf dem Rand  $\partial D$  an.

<sup>2</sup>In den Sätzen über harmonische Funktionen wird nirgends angenommen, dass der Rand von  $D$  zusammenhängt, dass also  $D$  selbst einfach zusammenhängend ist.  $D$  kann Löcher haben. In jedem Fall muss der *gesamte* Rand berücksichtigt werden.

<sup>3</sup>Für zwei Variablen ist  $C(\mathbf{r}, \rho)$  ein Kreis.

**Beweis** (*reductio ad absurdum*): Nehmen wir an,  $u$  nimmt ihr globales Maximum an einem Punkt  $\mathbf{r}_0$  im Inneren von  $D$  an. Sei  $\mathbf{r}_1$  ein Punkt in  $D$ , für den gilt

$$u(\mathbf{r}_1) < u(\mathbf{r}_0) \quad (4.19)$$

und die Hypersphäre  $C(\mathbf{r}_0, \rho)$  mit  $\rho := |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0|$  liegt ganz in  $D$ . (Da  $u$  nicht konstant ist und ein Maximum im Inneren annimmt, existieren solche Punkte.) Da  $u$  das globale Maximum bei  $\mathbf{r}_0$  annimmt, gilt für den Mittelwert auf  $C(\mathbf{r}_0, \rho)$ :  $U(\mathbf{r}_0, \rho) \leq u(\mathbf{r}_0)$ . Da  $u$  an einem Punkt auf  $C(\mathbf{r}_0, \rho)$ , nämlich  $\mathbf{r}_1$ , echt kleiner ist als bei  $\mathbf{r}_0$  und da  $u$  stetig ist (sogar zweimal stetig differenzierbar), folgt

$$U(\mathbf{r}_0, \rho) < u(\mathbf{r}_0). \quad (4.20)$$

Das ist aber ein Widerspruch zum Mittelwertsatz.

Also nimmt jede harmonische Funktion ihr Maximum auf dem Rand an, es sei denn, sie ist konstant. Da mit  $u$  auch  $-u$  harmonisch auf  $D$  ist, gilt dasselbe für das Minimum.

**Korollar:** Die Lösung der Poisson-Gleichung (nicht nur der Laplace-Gleichung!) mit Dirichlet-Randbedingungen ist eindeutig. Denn wenn  $u$  und  $v$  die Poisson-Gleichung  $\nabla^2 u(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$  auf  $D$  mit denselben Dirichlet-Randbedingungen erfüllen, dann erfüllt die Differenz  $u - v$  die Laplace-Gleichung und verschwindet auf dem Rand  $\partial D$ . Nach dem Maximum-(Minimum-)Prinzip folgt  $u - v = 0$  auf  $D$ .

**Korollar:** Der Mittelwertsatz gilt auch umgekehrt: Erfüllt eine Funktion  $u$  die Konsequenz des Mittelwertsatzes (Mittelwerteigenschaft), so ist  $u$  auch harmonisch. Beweis: sei  $R$  ein in der Definitionsmenge  $D$  von  $u$  liegender Bereich, evtl. mit  $D$  identisch. Sei  $v$  die *harmonische* Funktion, die auf  $\partial R$  mit  $u$  übereinstimmt. Da mit  $u$  und  $v$  auch  $u - v$  die Mittelwerteigenschaft hat, und das Maximumprinzip aus dieser folgt, nimmt  $u - v$  ihr Maximum und ihr Minimum auf  $\partial R$  an. Auf  $\partial R$  ist jedoch  $u - v = 0$ . Daher ist  $u = v$  in  $R$ . Also ist  $u$  harmonisch.

## 4.2 Poisson-Integralformel

Der Separationsansatz ist für die Poisson- und Laplace-Gleichung oft erfolgreich, wenn die Form des Definitionsbereichs nicht zu kompliziert ist, so dass sich geeignete Variablen finden lassen. Wir besprechen ein Beispiel, das zugleich ein wichtiges Resultat ergibt.

Wir betrachten harmonische Funktionen von zwei Variablen auf dem *Kreis* mit Radius  $R$  mit vorgegebenen Werten auf dem Kreis. D.h. wir suchen Lösungen der Laplace-Gleichung für  $u(r, \phi)$ , in Polarkoordinaten,

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\phi\phi} = 0 \quad \text{für } r < R, 0 \leq \phi < 2\pi, \quad (4.21)$$

mit  $u(R, \phi)$  vorgegeben. Der Separationsansatz  $u(r, \phi) = R(r) \Phi(\phi)$  führt auf Eigenfunktionen für  $\Phi(\phi)$  der Form  $\cos n\phi$  mit  $n = 0, 1, \dots$ ,  $\sin n\phi$  mit  $n = 1, 2, \dots$ , siehe Abschnitt 3.2. Also hat  $u$  die Form einer Fourier-Reihe

$$u(r, \phi) = \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(r) \cos n\phi + b_n(r) \sin n\phi] \quad (4.22)$$

(beachte die periodischen Randbedingungen für  $\Phi$ ). Multiplikation der PDG (4.21) mit  $\cos n\phi$  bzw.  $\sin n\phi$  ergibt, nach partieller Integration, gewöhnliche Differentialgleichungen für  $a_n(r)$  und  $b_n(r)$ :

$$a_n'' + \frac{1}{r} a_n' - \frac{n^2}{r^2} a_n = 0, \quad (4.23)$$

$$b_n'' + \frac{1}{r} b_n' - \frac{n^2}{r^2} b_n = 0. \quad (4.24)$$

Die Entwicklung der Randbedingung ergibt

$$a_n(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \cos n\phi u(R, \phi), \quad (4.25)$$

$$b_n(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \sin n\phi u(R, \phi). \quad (4.26)$$

Die Lösungen von Gleichungen (4.23) und (4.24) sind reine Potenzen von  $r$ , mit etwas Probieren findet man die Lösungen

$$a_n(r) = a_n(R) \left(\frac{r}{R}\right)^n, \quad (4.27)$$

$$b_n(r) = b_n(R) \left(\frac{r}{R}\right)^n. \quad (4.28)$$

Einsetzen in Gl. (4.22) ergibt

$$u(r, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha u(R, \alpha) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_0^{2\pi} d\alpha \cos n(\alpha - \phi) u(R, \alpha), \quad (4.29)$$

wobei wir das Additionstheorem für  $\cos$  benutzt haben. Ist  $u$  auf dem Rand zumindest stückweise stetig, so darf man  $\sum_n$  und  $\int d\alpha$  vertauschen. Die Summe lautet dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\alpha - \phi) = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n e^{in(\alpha - \phi)}, \quad (4.30)$$

dies ist aber einfach eine geometrische Reihe (beachte  $r/R < 1$ ) mit dem Grenzwert

$$\dots = \operatorname{Re} \frac{1}{1 - (r/R)e^{i(\alpha - \phi)}} - 1. \quad (4.31)$$

Damit folgt die *Poisson-Integralformel*

$$u(r, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \phi)} u(R, \alpha) \quad (4.32)$$

für  $r < R$ . Diese Formel ergibt die harmonische Funktion  $u$  an *jedem* Punkt im Inneren eines Kreises, ausgedrückt durch  $u$  auf dem Rand. Für den Mittelpunkt ergibt sich als Spezialfall wieder der Mittelwertsatz.

Bemerkung: Für Neumann-Randbedingungen findet man die Formel

$$u(r, \phi) = -\frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \ln \left[ 1 - 2\frac{r}{R} \cos(\alpha - \phi) + \frac{r^2}{R^2} \right] u_r(R, \alpha) + C \quad (4.33)$$

mit einer beliebigen Konstanten  $C$ . Beachte, dass Neumann-Randbedingungen die Konsistenzbedingung

$$\int_0^{2\pi} d\alpha u_r(R, \alpha) = 0 \quad (4.34)$$

erfüllen müssen. Dies ist nur Gl. (4.11) für einen Kreis.

### 4.3 Holomorphe Funktionen und konforme Abbildungen

Wir erinnern uns an die Funktionentheorie: Seien  $z = x + iy$  und  $w = u + iv$  komplexe Variablen und sei  $f$  eine Abbildung von  $z$  auf  $w$ :

$$f(z) = w. \quad (4.35)$$

Sei  $\Delta z$  komplex. Wenn der Grenzwert

$$\frac{df}{dz} := \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (4.36)$$

existiert *und* von der Art der Annäherung von  $\Delta z \rightarrow 0$  unabhängig ist, so heißt  $f$  im Punkt  $z$  *komplex differenzierbar* und  $df/dz$  die Ableitung von  $f$  in  $z$ . Ist diese Bedingung in einer Umgebung von  $z$  erfüllt, so heißt  $f$  in  $z$  *holomorph*.<sup>4</sup> Ist  $f$  in jedem  $z \in R$  holomorph, so heißt  $f$  in  $R$  holomorph.

Sei nun  $f(z)$  holomorph in  $z$ . Die Definition erfordert dann

$$\frac{df}{dz} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta x) - f(z)}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(z + i\Delta y) - f(z)}{i\Delta y}. \quad (4.37)$$

Mit  $f(z) = u + iv$ ,  $z = x + iy$  erhalten wir

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{u(z + \Delta x) - u(z)}{\Delta x} + i \frac{v(z + \Delta x) - v(z)}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[ -i \frac{u(z + i\Delta y) - u(z)}{\Delta y} + \frac{v(z + i\Delta y) - v(z)}{\Delta y} \right]. \quad (4.38)$$

Dann müssen Real- und Imaginärteil für sich gleich sein, also folgt mit der Definition der Ableitung im Reellen

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x. \quad (4.39)$$

<sup>4</sup>Oder *analytisch*, besonders in der englischsprachigen Literatur (*analytic*).

Dies sind die *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*. Man kann zeigen, dass  $f = u + iv$  holomorph ist *genau dann*, wenn  $u$  und  $v$  Gleichungen (4.39) erfüllen.

**Satz:** Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion von  $z = x + iy$  sind harmonische Funktionen von  $x$  und  $y$ .

**Beweis:**  $u$  und  $v$  erfüllen

$$u_{xx} = v_{xy} = -u_{yy}, \quad (4.40)$$

also

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (4.41)$$

analog für  $v$ .

**Satz:** Jede harmonische Funktion *in zwei Variablen* ist Realteil einer holomorphen Funktion (und analog Imaginärteil einer anderen holomorphen Funktion).

**Beweis:** Sei  $u(x, y)$  harmonisch und sei

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -u_y \\ u_x \end{pmatrix}. \quad (4.42)$$

Dann ist  $\mathbf{F}$  ein konservatives Feld, da

$$\frac{\partial}{\partial x} F_2 - \frac{\partial}{\partial y} F_1 = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (4.43)$$

ist. Daher existiert zu  $\mathbf{F}$  ein Potential, d.h.

$$v(x, y) := \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{F} = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (-u_y dx + u_x dy) \quad (4.44)$$

ist unabhängig vom Integrationsweg. Weiter gilt

$$v_x = -u_y \quad \text{und} \quad v_y = u_x, \quad (4.45)$$

also erfüllen  $u$  und  $v$  die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und  $u + iv$  ist holomorph.  $v$  heißt zu  $u$  *konjugiert*.

Diese Verknüpfungen zeigen, dass in *zwei* Dimensionen die Ergebnisse aus der Funktionentheorie in Aussagen über harmonische Funktionen übersetzt werden können. Wir besprechen eine darauf basierende Methode, die der *konformen Abbildung*:

Sei  $f$  eine *holomorphe* Abbildung von  $z = x + iy \in R$  auf  $w = u + iv \in R'$ , die *bijektiv* ist und deren Umkehrabbildung ebenfalls holomorph ist. Dann heißt  $f$  *biholomorph* oder *konform* auf  $R$ . Der Begriff „konform“ wird v.a. in geometrischem Zusammenhang benutzt – man kann zeigen, dass konforme Abbildungen *winkeltreu* sind, d.h. das Bild zweier sich unter einem Winkel  $\alpha$  schneidender Kurven sind zwei Kurven, die sich ebenfalls unter dem Winkel  $\alpha$  schneiden.

Sei  $\psi(u, v)$  eine *harmonische* Funktion von  $u$  und  $v$ ,  $w = u + iv \in R'$ . Sei weiter

$$\phi(x, y) := \psi[u(x, y), v(x, y)] \equiv \psi[\operatorname{Re} f(x + iy), \operatorname{Im} f(x + iy)]. \quad (4.46)$$

Dann ist

$$\phi_x = \psi_u u_x + \psi_v v_x, \quad (4.47)$$

$$\phi_{xx} = \psi_{uu} u_x^2 + \psi_u u_{xx} + 2\psi_{uv} u_x v_x + \psi_{vv} v_x^2 + \psi_v v_{xx}, \quad (4.48)$$

$$\phi_y = \psi_u u_y + \psi_v v_y, \quad (4.49)$$

$$\phi_{yy} = \psi_{uu} u_y^2 + \psi_u u_{yy} + 2\psi_{uv} u_y v_y + \psi_{vv} v_y^2 + \psi_v v_{yy}. \quad (4.50)$$

Da  $f$  holomorph ist, erfüllen  $u$  und  $v$  die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und sind auch harmonisch, also  $u_x = v_y$ ,  $u_y = -v_x$ ,  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ,  $v_{xx} + v_{yy} = 0$ . Also folgt

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = (\psi_{uu} + \psi_{vv})(u_x^2 + u_y^2) = 0, \quad (4.51)$$

da  $\psi$  harmonisch sein sollte. Also ist die Bildfunktion  $\phi$  *harmonisch* für  $x + iy \in R$ . Da eine konforme Abbildung nach Definition bijektiv ist, gilt der Schluss auch in der anderen Richtung.

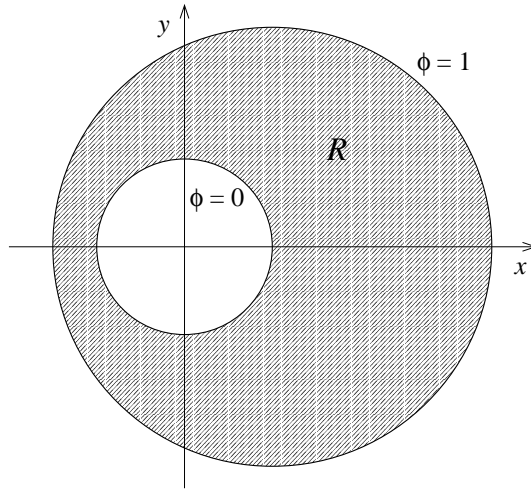


Abbildung 11: Ein komplizierte Region  $R$ , auf der die Laplace-Gleichung mittels konformer Abbildung gelöst werden kann.

Wir verdeutlichen den Nutzen dieser Aussage an einem **Beispiel**: Gesucht ist die Lösung der Laplace-Gleichung

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0, \quad (4.52)$$

(harmonische Funktion), die die Randbedingungen

$$\phi = 0 \quad \text{für } x^2 + y^2 = R_0^2, \quad (4.53)$$

$$\phi = 1 \quad \text{für } (x - x_1)^2 + y^2 = R_1^2 \quad (R_1 - |x_1| > R_0) \quad (4.54)$$

erfüllt, im Gebiet  $R$  zwischen den dadurch definierten *nicht konzentrischen* Kreisen. Sei  $z = x + iy$ . Die konforme Abbildung

$$w = f(z) = \frac{z + a}{z + b} \quad (4.55)$$

mit

$$a = \frac{R_1^2 - x_1^2 - R_0^2}{2x_1} - \sqrt{\left(\frac{R_1^2 - x_1^2 - R_0^2}{2x_1}\right)^2 - R_0^2}, \quad (4.56)$$

$$b = \frac{R_0^2}{a} \quad (4.57)$$

bildet  $R$  auf einen Ring  $R'$  zwischen den *konzentrischen* Kreisen um den Ursprung  $w = 0$  mit den Radien  $R'_0 = |(R_0 + a)/(R_0 + b)|$  und  $R'_1 = |(x_1 + R_1 + a)/(x_1 + R_1 + b)|$  ab.

Nun lösen wir das folgende Hilfsproblem: Gesucht ist die harmonische Funktion  $\psi(u, v)$  in  $R'$  mit

$$\psi = 0 \quad \text{für } u^2 + v^2 = (R'_0)^2, \quad (4.58)$$

$$\psi = 1 \quad \text{für } u^2 + v^2 = (R'_1)^2. \quad (4.59)$$

Wir haben schon gezeigt, dass die Lösung eindeutig ist.  $\psi$  erfüllt die Laplace-Gleichung, die in Polarkoordinaten lautet

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} (r\psi_r)_r + \frac{1}{r^2} \psi_{\theta\theta} = 0. \quad (4.60)$$

Wir machen den Ansatz  $\psi = \psi(r)$  (unabhängig von  $\theta$ ), also

$$0 = (r\psi_r)_r = \psi_r + r\psi_{rr}. \quad (4.61)$$

Das ist eine gewöhnliche Differentialgleichung *erster* Ordnung für  $\psi_r$ . Wir machen einen Potenzansatz,  $\psi_r = r^\nu$ , dann ist  $\psi_{rr} = \nu r^{\nu-1}$ , also

$$0 = r^\nu + r\nu r^{\nu-1} = r^\nu + \nu r^\nu \quad \Rightarrow \quad \nu = -1. \quad (4.62)$$

Es folgt  $\psi_r = 1/r$  und  $\psi = \ln r + C$ . Mit den Randbedingungen folgt

$$\psi(u, v) = \frac{\ln(r/R'_0)}{\ln(R'_1/R'_0)} \quad \text{mit } r = \sqrt{u^2 + v^2} = |u + iv| = |w|. \quad (4.63)$$

Nun haben wir aber gezeigt, dass, wenn  $\psi(u, v)$  auf  $R'$  harmonisch ist, auch  $\phi(x, y) = \psi[u(x, y), v(x, y)]$  auf  $R$  harmonisch ist. Damit ist die gesuchte Funktion

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\ln(R'_1/R'_0)} \ln \left( \frac{1}{R'_0} \left| \frac{z+a}{z+b} \right| \right) \quad \text{mit } z = x + iy. \quad (4.64)$$

Zahlenbeispiel: Für  $R_0 = 1$ ,  $x_1 = 1$ ,  $R_1 = 5/2$  erhalten wir

$$a = 1/4, \quad (4.65)$$

$$b = 4, \quad (4.66)$$

$$R'_0 = 1/4, \quad (4.67)$$

$$R'_1 = 1/2 \quad (4.68)$$

und damit

$$\phi(\rho, \alpha) = \frac{1}{2 \ln 2} \ln \frac{16\rho^2 + 8\rho \cos \alpha + 1}{\rho^2 + 8\rho \cos \alpha + 16}, \quad (4.69)$$

wobei  $\rho, \alpha$  ebene Polarkoordinaten sind.

Die Methode der konformen Abbildung vereinfacht eine Laplace-Gleichung in zwei Dimensionen, wenn es gelingt, die geometrische Form des Definitionsbereichs zu vereinfachen. Abbildungen, die viele mögliche Formen vereinfachen, sind tabelliert.



## 5 Klassifikation von linearen Gleichungen zweiter Ordnung

Wir kehren nun zur Klassifikation von linearen PDG's zweiter Ordnung in Abschnitt 1.2 zurück. Die allgemeine Form einer solchen Gleichung in zwei Variablen ist

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0, \quad (5.1)$$

wobei  $A, \dots, F$  gegebene Funktionen von  $x$  und  $y$  sind, die wir als beliebig oft differenzierbar annehmen. Der willkürliche Faktor 2 in  $2Bu_{xy}$  wurde eingeführt, um später die Notation zu erleichtern.<sup>1</sup> In den letzten Abschnitten haben wir verschiedene Spezialfälle betrachtet. Nun wollen wir diese allgemeine Gleichung untersuchen und dabei insbesondere klären, welche Art von Randbedingungen wir vorgeben müssen, um die Lösung in einem bestimmten Bereich eindeutig festzulegen.

### 5.1 Cauchy-Daten

Als erstes betrachten wir Randbedingungen auf einer Geraden im  $(x, y)$ -Raum. Wir wählen unser Koordinatensystem so, dass die Gerade mit der  $y$ -Achse ( $x = 0$ ) zusammenfällt.  $u(x, y)$  soll nun Gl. (5.1) erfüllen und

$$u(0, y) = f(y) \quad (5.2)$$

(beliebig oft differenzierbar) ist auf einem Intervall  $[a, b]$  auf der  $y$ -Achse vorgegeben. Dann erhält man folgende Ableitungen auf diesem Intervall durch direkte Berechnung:

$$u_y(0, y), \quad u_{yy}(0, y), \quad u_{yyy}(0, y) \dots \quad (5.3)$$

Aber weder die Randbedingung noch Gl. (5.1) legt die Ableitungen  $u_x(0, y), u_{xx}(0, y), u_{xy}(0, y) \dots$  fest.<sup>2</sup> Mit diesen Informationen können wir nichts darüber aussagen, wie sich  $u(x, y)$  für  $x \neq 0$  verhält.

Aus diesem Grund geben wir zusätzlich

$$u_x(0, y) = g(y) \quad (5.4)$$

(beliebig oft differenzierbar) für  $y \in [a, b]$  vor. Direkte Ableitung ergibt

$$u_{xy}(0, y), \quad u_{xyy}(0, y) \dots \quad (5.5)$$

Falls nun  $A \neq 0$  in Gl. (5.1) ist, kann man die Gleichung nach  $u_{xx}$  auflösen,

$$u_{xx} = -\frac{2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G}{A}. \quad (5.6)$$

Damit ist auch  $u_{xx}(0, y)$  bestimmt, da alle Terme auf der rechten Seite bekannt sind. Ableitung von Gl. (5.6) nach  $x$  ergibt  $u_{xxx}(0, y)$  ausgedrückt durch bekannte Funktionen, einschließlich  $u_{xx}(0, y)$ . Entsprechend können wir nun alle Ableitungen nach  $x$  für  $y \in [a, b]$  durch Iteration berechnen und anschließend auch alle gemischten Ableitungen nach  $x$  und  $y$ . Die Vorgabe von  $u$  und  $u_x$  für  $y \in [a, b]$  ist ein Beispiel für *Cauchy-Daten*. Diese gestatten offenbar für  $A \neq 0$  die Berechnung sämtlicher partieller Ableitungen.

Allgemein bezeichnet man als *Cauchy-Daten* die Vorgabe der *gesuchten Funktion* und ihrer *Normalenableitung* auf einer Kurve.

Kennen wir aber alle Ableitungen nach  $x$ , können wir die Taylor-Reihe für  $u(x, y)$  um  $x = 0$  berechnen:

$$u(x, y) = u(0, y) + u_x(0, y)x + u_{xx}(0, y)\frac{x^2}{2!} + u_{xxx}(0, y)\frac{x^3}{3!} + \dots \quad (5.7)$$

und damit die gesuchte Funktion für  $x \neq 0$  bestimmen.

Das *Cauchy-Kowalewski-Theorem*, das wir hier nicht beweisen, sagt aus, dass, wenn die Funktionen  $f, g, B/A, \dots, G/A$  in einer Umgebung von  $y_0$  in eine Taylor-Reihe entwickelbar (d.h. reell analytisch) sind, so konvergiert die Taylor-Reihe (5.7) in einer Umgebung von  $y_0$  gegen die Lösung der PDG und diese ist eindeutig.

**Beispiel:** Wir betrachten die Laplace-Gleichung

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (5.8)$$

$$u(0, y) = \sin y, \quad (5.9)$$

$$u_x(0, y) = y. \quad (5.10)$$

<sup>1</sup>Beachte die von Gleichung (1.12) abweichende Konvention.

<sup>2</sup>Gleichung (5.1) ergibt nur eine Relation zwischen  $u_x$  und  $u_{xx}$ , legt  $u_x$  aber nicht fest.

Wir erhalten für  $x = 0$  die Ableitungen

$$u_y = \cos y, \quad (5.11)$$

$$u_{yy} = -\sin y, \quad (5.12)$$

$$u_{yyy} = -\cos y, \quad (5.13)$$

$$u_{xy} = 1, \quad (5.14)$$

$$u_{xyy} = 0 \quad (5.15)$$

und, aus der Laplace-Gleichung und Ableitungen nach  $y$  davon,

$$u_{xx} = -u_{yy} = \sin y, \quad (5.16)$$

$$u_{xxx} = -u_{xyy} = 0, \quad (5.17)$$

$$u_{xxxx} = -u_{xxyy} = -(u_{xx})_{yy} = \sin y, \quad (5.18)$$

$$u_{xxxxx} = -u_{xxxxy} = -(u_{xxx})_{yy} = 0, \quad (5.19)$$

$$u_{xxxxxx} = -u_{xxxxxy} = -(u_{xxxx})_{yy} = \sin y \quad (5.20)$$

usw. Wir sehen, dass mit  $n = 0, 1, 2, \dots$  gilt

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} u(0, y) = \begin{cases} \sin y & \text{für } n \text{ gerade,} \\ y & \text{für } n = 1, \\ 0 & \text{für } n > 1 \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (5.21)$$

Die Taylor-Reihe für  $u$  lautet

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u(0, y)}{\partial x^n} x^n = xy + \sin y \sum_{n \text{ gerade}} \frac{x^n}{n!} = xy + \sin y \cosh x. \quad (5.22)$$

Der Konvergenzradius ist  $\infty$ . Damit haben wir die Lösung sogar im gesamten Raum bestimmt.

Wir betrachten jetzt Cauchy-Daten auf einer beliebigen stetig differenzierbaren Kurve  $\Gamma$  in der  $(x, y)$ -Ebene.  $\Gamma$  sei durch die Gleichung

$$\xi(x, y) = 0 \quad (5.23)$$

definiert.  $\xi(x, y)$  soll stetig differenzierbar sein. Die Gleichungen  $\xi(x, y) = \text{const}$  mit verschiedenen Konstanten beschreiben eine *Schar* von Kurven. Wir führen eine zweite Schar

$$\eta(x, y) = \text{const} \quad (5.24)$$

(stetig differenzierbar) ein.  $\xi$  und  $\eta$  seien so gewählt, dass sie im interessierenden Bereich als *Koordinatensystem* dienen können. Dies erfordert insbesondere, dass die Kurven  $\xi = \text{const}$  und  $\eta = \text{const}$  *nirgends tangential* zueinander liegen. Das ist der Fall, wenn die *Jacobi-Determinante*

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(u, v)} := \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0 \quad (5.25)$$

ist. Die Kurven sind i.A. *nicht orthogonal*.

Wir betrachten  $u$  nun als Funktion von  $\xi$  und  $\eta$ . Wir geben  $u$  und die Normalenableitung auf  $\Gamma$  vor. Punkte auf  $\Gamma$  können wir mit der Koordinate  $\eta$  unterscheiden, also sind

$$u(0, \eta) = f(\eta) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial n} u(0, \eta) = g(\eta) \quad (5.26)$$

vorgegeben. Bei der partiellen Ableitung nach  $\eta$  soll  $\xi$  konstant gehalten werden, also ist die *tangentiale* Ableitung auf  $\Gamma$  einfach  $u_\eta(0, \eta)$ .

Die Normalenableitung ist jedoch i.A. *nicht*  $u_\xi$ , da  $u_\xi$  auf Kurven mit konstantem  $\eta$  auszurechnen ist, die i.A. nicht orthogonal auf  $\Gamma$  stehen. Die Normalenableitung ist allgemein

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla u = \hat{\mathbf{n}} \cdot \left( \hat{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \hat{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) u. \quad (5.27)$$

Hier sind  $\hat{\xi}$  und  $\hat{\eta}$  Koordinaten-Einheitsvektoren, d.h. tangentielle Einheitsvektoren an Kurven  $\eta = \text{const}$  und  $\xi = \text{const}$ . Konventionell ist der Normaleneinheitsvektor  $\hat{\mathbf{n}}$  nach *links* gerichtet, wenn man die Kurve

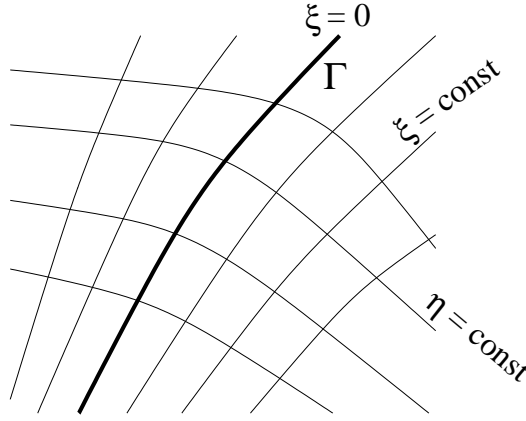


Abbildung 12: Zwei Scharen von Kurven  $\xi(x, y) = \text{const}$  und  $\eta(x, y) = \text{const}$ , die ein lokales Koordinatensystem bilden. Die Kurve  $\Gamma$  (fett) entspricht  $\xi = 0$ .

$\xi = \text{const}$  in Richtung wachsender  $\eta$  durchläuft. Somit bestimmt die Vorgabe von  $u(0, \eta)$  und  $\partial u / \partial n$  auf  $\Gamma$  sowohl  $u_\xi$  als auch  $u_\eta$  und damit

$$u_\eta, \quad u_{\eta\eta}, \quad u_{\eta\eta\eta}, \dots, \quad u_\xi, \quad u_{\xi\eta}, \quad u_{\xi\eta\eta}, \dots \quad (5.28)$$

auf  $\Gamma$ . Zur Bestimmung von  $u_{\xi\xi}$  und höherer Ableitungen nach  $\xi$  benötigen wir wieder die PDG. Mittels

$$u_x = \xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta \quad (5.29)$$

usw. erhalten wir die PDG für die neuen Variablen  $\xi, \eta$ :

$$\begin{aligned} & (A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2) u_{\xi\xi} + 2[A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + C\xi_y\eta_y] u_{\xi\eta} + (A\eta_x^2 + 2B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2) u_{\eta\eta} \\ & + (A\xi_{xx} + 2B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y) u_\xi + (A\eta_{xx} + 2B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y) u_\eta \\ & + F u + G = 0. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Diese Gleichung können wir nach  $u_{\xi\xi}$  auflösen, falls

$$A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 \neq 0 \quad (5.31)$$

ist. Wir können nun zwei Fälle unterscheiden:

1. *Alle* (stetig differenzierbaren, reelle) Funktionen  $\xi(x, y)$  erfüllen die Ungleichung. Dann können wir im gesamten Definitionsbereich aus Cauchy-Daten auf einer beliebigen Kurve  $\Gamma$  alle Ableitungen auf  $\Gamma$  bestimmen und wie oben die Lösung  $u$  in einer Umgebung von  $\Gamma$  aus der Taylor-Reihe bestimmen.

Ein Beispiel ist  $A = C = 1, B = 0$ . Dann wird der obige Ausdruck  $\xi_x^2 + \xi_y^2 \geq 0$ . Der Ausdruck kann aber nicht gleich Null sein, da sonst die Jacobi-Determinante  $\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x$  verschwinden würde.

2. Es existiert eine Funktion  $\xi(x, y)$ , so dass

$$A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0 \quad \text{für } \xi = 0. \quad (5.32)$$

Also existiert zumindest eine Kurve  $\Gamma$ , auf der Cauchy-Daten *nicht* ausreichen, um  $u$  in einer Umgebung zu bestimmen.

## 5.2 Charakteristiken und kanonische Formen

Wann treten die beiden Fälle aus dem vorigen Abschnitt auf? Der Ausdruck

$$A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = \xi_x^2 \left[ A + 2B \frac{\xi_y}{\xi_x} + C \left( \frac{\xi_y}{\xi_x} \right)^2 \right] = \xi_y^2 \left[ A \left( \frac{\xi_x}{\xi_y} \right)^2 + 2B \frac{\xi_x}{\xi_y} + C \right] \quad (5.33)$$

ist eine quadratische Form in  $\xi_y/\xi_x$  oder  $\xi_x/\xi_y$ . Zumindest eine von beiden Formen existiert, da nicht  $\xi_x = \xi_y = 0$  sein kann (Jacobi-Determinante!). Wir nehmen o.B.d.A. an, dass  $\xi_x/\xi_y$  existiert. Dann ist

$$A \left( \frac{\xi_x}{\xi_y} \right)^2 + 2B \frac{\xi_x}{\xi_y} + C = 0 \quad (5.34)$$

eine quadratische Gleichung für  $\xi_x/\xi_y$ . Die Lösungen dieser Gleichung sind formal<sup>3</sup>

$$\frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \quad (5.35)$$

Definition: *Charakteristiken* sind genau die Kurven in  $(x, y)$ -Raum, für die Gl. (5.35) bzw. Gl. (5.32) erfüllt sind. Da die linke Seite reell ist, muss das auch für die rechte Seite gelten. Äquivalent dazu sind Charakteristiken die Kurven, für die die Vorgabe von Cauchy-Daten nicht ausreicht, um die Funktion  $u$  in einer Umgebung der Kurve zu bestimmen.

Mehr noch: Auf einer Charakteristik  $\xi = 0$  verschwindet nach Definition der Koeffizient von  $u_{\xi\xi}$  in Gl. (5.30), die also die Form

$$\begin{aligned} & 2[A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + C\xi_y\eta_y] u_{\xi\eta} + (A\eta_x^2 + 2B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2) u_{\eta\eta} \\ & + (A\xi_{xx} + 2B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y) u_\xi + (A\eta_{xx} + 2B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y) u_\eta \\ & + F u + G = 0. \end{aligned} \quad (5.36)$$

annimmt. Sind auf der Charakteristik Cauchy-Daten vorgegeben, so sind  $u(0, \eta)$  und  $u_\xi(0, \eta)$  bekannt und durch Ableitung  $u_\eta$ ,  $u_{\eta\eta}$  und  $u_{\xi\eta}$ . Damit sind aber *alle Terme* ist der PDG (5.36) gegeben. Gleichung (5.36) ist also eine *Konsistenzbedingung* an die Cauchy-Daten. Ist sie nicht erfüllt, existiert überhaupt keine Lösung.

Wir betrachten die Steigung von Kurven  $\xi(x, y) = \text{const}$ . Entlang einer solchen Kurve gilt

$$d\xi = \xi_x dx + \xi_y dy = 0. \quad (5.37)$$

Daraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\xi_x}{\xi_y} \quad (5.38)$$

für die lokale Steigung der Kurve. Damit sind Charakteristiken genau die Kurven, für deren Steigung eine der *charakteristische Gleichungen*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} \quad (5.39)$$

gilt. Beachte, dass  $A, B, C$  im Allgemeinen Funktionen von  $x$  und  $y$  sind! Die Steigung ist notwendig reell, daher richtet sich die Existenz von Charakteristiken nach der Diskriminanten  $B^2 - AC$  im interessierenden Gebiet:

- für  $B^2 - AC > 0$  existieren zwei unterschiedliche reelle Lösungen,
- für  $B^2 - AC = 0$  existiert eine reelle Lösung,
- für  $B^2 - AC < 0$  existieren keine reellen Lösungen.

Wir werden in Kürze diese drei Fälle der Reihe nach besprechen. Zuvor betrachten wir eine weitere wichtige Eigenschaft von Charakteristiken, die in folgendem Satz ausgedrückt ist:

**Satz:** Sei  $u$  eine Lösung einer linearen PDG zweiter Ordnung in zwei Variablen, Gl. (5.1). Sei  $\Gamma$ , definiert durch  $\xi(x, y) = 0$ , eine Kurve und  $(\xi, \eta)$  ein lokales Koordinatensystem. Auf  $\Gamma$  seien  $u, u_\eta, u_\xi, u_{\eta\eta}$  und  $u_{\eta\xi}$  stetig, aber  $u_{\xi\xi}$  nicht stetig. Dann ist  $\Gamma$  eine *Charakteristik*.

Mit anderen Worten: Auf Charakteristiken und nur auf diesen kann  $u_{\xi\xi}$  unstetig sein.<sup>4</sup>  $u$  ist dann offensichtlich nicht zweimal stetig differenzierbar – in diesem Sinne erweitern wir den Begriff einer *Lösung* einer PDG.

**Beweis:** Wir bezeichnen die Lösung auf den beiden Seiten von  $\Gamma$  mit  $u^+$  und  $u^-$ .  $u^\pm$  erfüllen Gl. (5.30),

$$\begin{aligned} & (A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2) u_{\xi\xi}^\pm + 2[A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + C\xi_y\eta_y] u_{\xi\eta}^\pm + (A\eta_x^2 + 2B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2) u_{\eta\eta}^\pm \\ & + (A\xi_{xx} + 2B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y) u_\xi^\pm + (A\eta_{xx} + 2B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y) u_\eta^\pm \\ & + F u^\pm + G = 0. \end{aligned} \quad (5.40)$$

<sup>3</sup>Für  $A = 0$  erhalten wir eine unbestimmte Lösung, in diesem Fall müssen wir nach  $\xi_y/\xi_x$  auflösen.

<sup>4</sup>Unstetigkeiten von  $u$  selbst oder der ersten Ableitung  $u_\xi$  entlang einer Kurve  $\Gamma$  sind dagegen ziemlich langweilig. Sie entsprechen unterschiedlichen Cauchy-Daten für die beiden Seiten von  $\Gamma$  und hierfür läßt sich i.A. für *jede* Kurve eine Lösung finden.

Wir nähern uns jetzt demselben Punkt auf  $\Gamma$  von beiden Seiten und bilden die Differenz der PDG's für  $u^+$  und  $u^-$ . Da alle Ableitungen außer  $u_{\xi\xi}$  stetig sind, heben sich diese Terme weg und es bleibt

$$(A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2)(u_{\xi\xi}^+ - u_{\xi\xi}^-) = 0. \quad (5.41)$$

Nach Voraussetzung ist  $u_{\xi\xi}^+ \neq u_{\xi\xi}^-$  auf mindestens einem Teil von  $\Gamma$ . Es folgt

$$A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0, \quad (5.42)$$

also ist  $\Gamma$  eine Charakteristik.

Bemerkung: Analog zeigt man, dass  $u_{\xi\xi\xi}$ ,  $u_{\xi\xi\xi\xi}$ , ... nur auf einer Charakteristik unstetig sein können.

Zusammenfassung: Eine Charakteristik  $\xi = 0$  hat die folgenden äquivalenten Eigenschaften:

- Vorgabe von Cauchy-Daten genügt nicht, um die Funktion in einer Umgebung zu bestimmen,
- Cauchy-Daten können nicht beliebig vorgegeben werden, sondern müssen eine Konsistenzbedingung erfüllen,
- zweite oder höhere Ableitungen der Funktion nach  $\xi$  können unstetig sein.

Wir besprechen jetzt die drei Fälle von linearen PDG's zweiter Ordnung.

**Hyperbolischer Fall:**  $B^2 - AC > 0$

Die Gleichung

$$A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0 \quad (5.43)$$

hat zwei reelle Lösungen (5.35), oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \mp \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \quad (5.44)$$

Also sind alle Kurven  $y(x)$  mit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A} \quad (5.45)$$

Charakteristiken.

Die Kurven  $\xi = \text{const}$  mögen nun  $dy/dx = (B + \sqrt{B^2 - AC})/A$  erfüllen, die Kurven  $\eta = \text{const}$  dagegen  $dy/dx = (B - \sqrt{B^2 - AC})/A$ . Alle diese Kurven sind Charakteristiken. Die Bedingung  $B^2 - AC > 0$  gewährleistet, dass die Steigungen  $dy/dx$  der  $\xi$ - und  $\eta$ -Kurven nirgends übereinstimmen – die beiden Kurvenscharen sind nirgends tangential. Wir können die Charakteristiken also als lokales Koordinatensystem verwenden.

Die  $\xi$ -Kurven erfüllen per Konstruktion Gl. (5.43) und die  $\eta$ -Kurven entsprechend

$$A\eta_x^2 + 2B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 = 0. \quad (5.46)$$

Einsetzen in die allgemeine Form Gl. (5.30) ergibt

$$2[A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + C\xi_y\eta_y] u_{\xi\eta} + (A\xi_{xx} + 2B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y) u_\xi + (A\eta_{xx} + 2B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y) u_\eta + F u + G = 0. \quad (5.47)$$

Der Koeffizient von  $u_{\xi\eta}$  ist nicht Null, da sonst die Gleichung gar nicht von zweiter Ordnung wäre, und wir können durch ihn teilen. Die hyperbolische Gleichung nimmt dann ihre *kanonische Form*

$$u_{\xi\eta} + \alpha u_\xi + \beta u_\eta + \gamma u + \delta = 0 \quad (5.48)$$

an, wobei  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  Funktionen von  $\xi$  und  $\eta$  sind. Bemerkung: Eine alternative kanonische Form lautet

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \alpha u_\xi + \beta u_\eta + \gamma u + \delta = 0 \quad (5.49)$$

mit anderen Variablen  $\xi, \eta$  und Funktionen  $\alpha$  usw.

**Beispiel:** Für die einfache Wellengleichung

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad (5.50)$$

ist, im Vergleich mit Gl. (5.1) und mit  $t$  an Stelle von  $y$ ,

$$A = -c^2, \quad B = 0, \quad C = 1 \quad (5.51)$$

und damit  $B^2 - AC = c^2 > 0$ . Die Charakteristiken erfüllen daher

$$\frac{dt}{dx} = \pm \frac{\sqrt{c^2}}{c^2} = \pm \frac{1}{c} \quad (5.52)$$

oder

$$\frac{dx}{dt} = \pm c. \quad (5.53)$$

Die Charakteristiken sind alle Geraden mit der Steigung  $\pm c$ . Sie haben damit die Bedeutung von Kurven entlang derer sich Signale ausbreiten und teilen den Raum in zwei Gebiete, in denen das Signal bereits bzw. noch nicht vorüber gegangen ist. Es ist naheliegend, dass gewisse Unstetigkeiten auf den Charakteristiken auftreten können, da das System im zweiten Gebiet nichts von einem Signal im ersten Gebiet „weiß“.

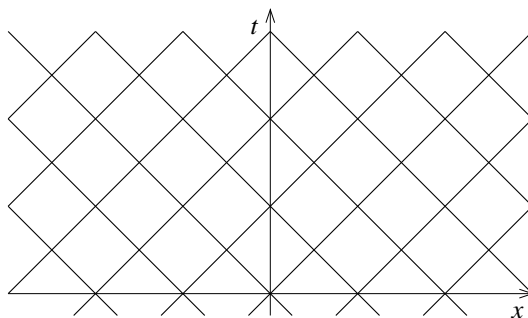


Abbildung 13: Charakteristiken der Wellengleichung.

Für den hyperbolischen Fall bestimmen die Charakteristiken den kausalen Zusammenhang vom Funktionswert  $u$  an zwei Punkten, wie wir für den einfachsten Fall der Wellengleichung schon gesehen haben. Man hat den folgenden allgemeinen Satz:

**Satz:**  $u(x, y)$  erfülle eine hyperbolische PDG. Auf einer Kurve  $\Gamma$ , die *keine* Charakteristik ist, seien Cauchy-Daten vorgegeben. Dann ist  $u$  an einem Punkt  $(x_0, y_0)$  bestimmt durch die Cauchy-Daten auf dem Abschnitt von  $\Gamma$ , der zwischen den Schnittpunkten von  $\Gamma$  mit den beiden durch  $(x_0, y_0)$  verlaufenden Charakteristiken liegt, sofern diese Schnittpunkte existieren. Existieren sie nicht, so reichen die Cauchy-Daten nicht hin, um  $u(x_0, y_0)$  festzulegen.

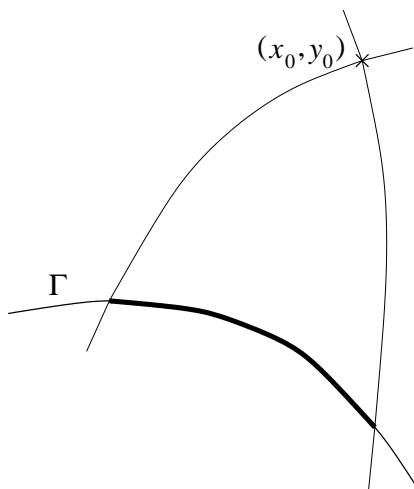


Abbildung 14: Allgemeine hyperbolische Gleichung: Der Funktionswert  $u(x_0, y_0)$  ist durch Cauchy-Daten auf dem fett gezeichneten Abschnitt der Kurve  $\Gamma$  bestimmt. Die beiden dünn gezeichneten Kurven sind die durch  $(x_0, y_0)$  gehenden Charakteristiken.

**Satz:** Sei unter gleichen Bedingungen  $(x_1, y_1)$  ein Punkt auf  $\Gamma$ . Dann hängt die Lösung  $u(x, t)$  im von den beiden durch  $(x_1, y_1)$  verlaufenden Charakteristiken begrenzten Gebiet von den Cauchy-Daten bei  $(x_1, y_1)$  ab. Wir verzichten hier auf die formalen Beweise, die ähnlich zu den bereits durchgeführten verlaufen.

**Parabolischer Fall:**  $B^2 - AC = 0$

Die Gleichung

$$A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0 \quad (5.54)$$

hat *eine* reelle Lösung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A}. \quad (5.55)$$

Alle Kurven, die diese Gleichung erfüllen, sind Charakteristiken. Es existiert nur *eine* Schar von Charakteristiken.

Die Kurven  $\xi = \text{const}$  mögen  $dy/dx = B/A$  erfüllen. Wir führen eine zweite Schar von Kurven  $\eta = \text{const}$  ein, die nirgends tangential zu den Charakteristiken liegen, so dass  $(\xi, \eta)$  ein lokales Koordinatensystem bilden.

Der Koeffizient von  $u_{\xi\xi}$  in Gl. (5.30) verschwindet, weil die Kurven  $\xi = \text{const}$  Charakteristiken sind. Der Koeffizient von  $u_{\xi\eta}$  ist

$$\begin{aligned} 2[A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + \underbrace{C}_{=B^2/A}\xi_y\eta_y] &= 2\xi_y \left[ A \frac{\xi_x}{\xi_y} \eta_x + B \left( \frac{\xi_x}{\xi_y} \eta_y + \eta_x \right) + \frac{B^2}{A} \eta_y \right] \\ &= 2\xi_y \left[ -B\eta_x + B \left( -\frac{B}{A} \eta_y + \eta_x \right) + \frac{B^2}{A} \eta_y \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.56)$$

unter Beachtung von  $\xi_x/\xi_y = -B/A$ . Der Koeffizient von  $u_{\eta\eta}$  ist nicht Null, da sonst die Gleichung nicht von zweiter Ordnung wäre. Division durch diesen Koeffizienten bringt die parabolische Gleichung auf ihre *kanonische Form*

$$u_{\eta\eta} + \alpha u_\xi + \beta u_\eta + \gamma u + \delta = 0, \quad (5.57)$$

wobei  $\alpha, \dots, \delta$  Funktionen von  $\xi, \eta$  sind.

**Beispiel:** Die einfache Diffusionsgleichung

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \quad (5.58)$$

hat  $A = -a^2, B = C = 0$  und damit  $B^2 - AC = 0$ . Die Charakteristiken erfüllen

$$\frac{dt}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \text{const}, \quad (5.59)$$

sind also alle Linien konstanter Zeit. Auf diesen müssen Cauchy-Daten die Konsistenzbedingung erfüllen bzw.  $u_t$  ist bereits durch  $u$  festgelegt. Wir verstehen jetzt aus der allgemeineren Theorie, wieso wir bei der Diffusionsgleichung nur  $u(x, 0)$  als Anfangsbedingung vorgeben konnten und nicht zugleich  $u_t(x, 0)$ .

Nach dem vorigen Abschnitt können wir Charakteristiken als Trajektorien der Signalausbreitung betrachten. Damit finden wir hier, dass sich Signale mit unendlicher Geschwindigkeit ausbreiten (bei der Wellengleichung war  $dt/dx = 1/c$ ), in Übereinstimmung mit unserer früheren Beobachtung.

**Elliptischer Fall:**  $B^2 - AC < 0$

Es existieren *keine* Charakteristiken. Man kann die Gleichung dennoch auf eine einfache *kanonische Form* bringen. Das Vorgehen besteht aus zwei Transformationsschritten:

**1. Schritt:** Wir führen neue Koordinaten  $\rho, \sigma$  ein, so dass die PDG die Form

$$u_{\rho\sigma} + \alpha u_\rho + \beta u_\sigma + \gamma u + \delta = 0 \quad (5.60)$$

annimmt. Das ist dieselbe Form wie im hyperbolischen Fall, also fragen wir uns, wie das funktionieren kann. Die Antwort ist, dass wir hier *komplexe* Variablen erlauben. Wir lösen formal die charakteristischen Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} \quad (5.61)$$

und erhalten zwei Scharen von Lösungen,  $\rho = \text{const}$  und  $\sigma = \text{const}$ . Da aber  $B^2 - AC < 0$  sind diese Lösungen *nicht reell* und beschreiben daher keine Charakteristiken. Wir können aber alle Manipulationen formal durchführen und analog zum hyperbolischen Fall die Form (5.60) herleiten.

**2. Schritt:** Wir transformieren auf neue Variablen

$$\xi = \frac{\rho + \sigma}{2}, \quad (5.62)$$

$$\eta = \frac{\rho - \sigma}{2i}. \quad (5.63)$$

$\rho$  und  $\sigma$  sind nach der Herleitung *komplex konjugiert*, daher sind  $\xi$  und  $\eta$  reell. Durch Ausdrücken der Ableitungen nach  $\rho, \sigma$  durch solche nach  $\xi, \eta$  erhalten wir die *kanonische Form*

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \tilde{\alpha}u_{\xi} + \tilde{\beta}u_{\eta} + \tilde{\gamma}u + \tilde{\delta} = 0 \quad (5.64)$$

mit Funktionen  $\tilde{\alpha}, \dots, \tilde{\delta}$  von  $\xi, \eta$ . Beachte, dass beide zweiten Ableitungen denselben, nicht verschwindenden Koeffizienten haben, durch den hier bereits geteilt wurde.

**Beispiel:** Die Laplace-Gleichung  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  ist schon in kanonischer Form. Wir betrachten daher die PDG

$$y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0 \quad \text{für } x > 0, y > 0. \quad (5.65)$$

Hier ist  $B^2 - AC = -x^2 y^2 < 0$ .

1. Schritt: Wir finden die charakteristischen Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{-x^2 y^2}}{y^2} = \pm i \frac{x}{y}. \quad (5.66)$$

Dies sind zwei gewöhnliche Differentialgleichungen für  $y(x)$ , die leicht durch Trennung der Variablen gelöst werden können:

$$y^2 \mp ix^2 = \text{const.} \quad (5.67)$$

Wir nennen die beiden Konstanten  $\rho$  und  $\sigma$ :

$$y^2 + ix^2 = \rho, \quad (5.68)$$

$$y^2 - ix^2 = \sigma. \quad (5.69)$$

$\rho(x, y) = \text{const}$  und  $\sigma(x, y) = \text{const}$  sind also Lösungen der charakteristischen Gleichungen. Sie würden Charakteristiken beschreiben, wenn sie reelle Funktionen wären.

2. Schritt: Die endgültigen Variablen sind

$$\xi = \frac{\rho + \sigma}{2} = y^2, \quad (5.70)$$

$$\eta = \frac{\rho - \sigma}{2i} = x^2. \quad (5.71)$$

Nun müssen wir die PDG noch auf diese Variablen transformieren. Es ist

$$\frac{\partial}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} = 2x \frac{\partial}{\partial \eta} = 2\sqrt{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (5.72)$$

und analog

$$\frac{\partial}{\partial y} = 2\sqrt{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (5.73)$$

Daraus folgt

$$u_{xx} = 2\sqrt{\eta} (2\sqrt{\eta} u_{\eta})_{\eta} = 4\sqrt{\eta} \left( \frac{1}{2\sqrt{\eta}} u_{\eta} + \sqrt{\eta} u_{\eta\eta} \right) = 2u_{\eta} + 4\eta u_{\eta\eta} \quad (5.74)$$

und analog

$$u_{yy} = 2u_{\xi} + 4\xi u_{\xi\xi}. \quad (5.75)$$

Damit lautet die PDG

$$0 = y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy} = 2\xi u_{\eta} + 4\xi \eta u_{\eta\eta} + 2\eta u_{\xi} + 4\xi \eta u_{\xi\xi} \quad (5.76)$$

und nach Division durch  $4\xi\eta$ :

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{2\xi} u_{\xi} + \frac{1}{2\eta} u_{\eta} = 0. \quad (5.77)$$

Dies ist die kanonische Form der Gleichung.



## 6 Gleichungen erster Ordnung

Wir diskutieren nun PDG's *erster* Ordnung. Diese kommen ebenfalls in der Physik vor. Ein Beispiel ist die Kontinuitätsgleichung

$$u_t + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (6.1)$$

wobei  $u$  eine Dichte und  $\mathbf{j}$  die zugehörige Stromdichte ist. Dies ist jedoch nur dann eine PDG erster Ordnung, wenn  $j$  explizit als Funktion von  $u$  gegeben ist. Ist z.B. in einer Raumdimension  $j = cu(1-u)$ , so folgt

$$u_t + c(1-2u)u_x = 0. \quad (6.2)$$

Man sieht, dass diese PDG erster Ordnung nicht linear ist, was in der Praxis oft der Fall ist. Weitere Beispiele sind die Dirac-Gleichung und die Boltzmann-Gleichung. Wir beschränken uns wieder überwiegend auf Gleichungen in zwei Variablen. Die Ergebnisse lassen sich aber auf mehrere Variablen verallgemeinern.

Einige Definitionen: Eine *lineare* PDG erster Ordnung in zwei Variablen  $x, y$  hat nach der bereits bekannten Definition die allgemeine Form

$$Au_x + Bu_y + Cu + D = 0, \quad (6.3)$$

wobei  $A, B, C, D$  Funktionen von  $x, y$  sind. Eine *quasilineare* PDG erster Ordnung hat die Form

$$f(x, y, u)u_x + g(x, y, u)u_y = h(x, y, u) \quad (6.4)$$

mit Funktionen  $f, g, h$  von  $x, y$  und  $u$ . Diese allgemeine Gleichung ist also linear in den Ableitungen  $u_x$  und  $u_y$  aber i.A. nicht in  $u$  selbst. Der Spezialfall einer linearen Gleichung ergibt sich offensichtlich für

$$f(x, y, u) = A(x, y), \quad g(x, y, u) = B(x, y), \quad h(x, y, u) = -C(x, y)u - D(x, y). \quad (6.5)$$

Wir betrachten die allgemeinere Klasse von quasilinearen Gleichungen, da sie im Prinzip mit der Lösungsmethode der Charakteristiken nicht schwieriger zu lösen sind als lineare Gleichungen. **Beispiele:**

$$\begin{aligned} u_x + 2x^2u_y &= x + yu && \text{linear,} \\ uu_x + \sin(yu)u_y + u^2 &= 0 && \text{quasilinear,} \\ u_x^2 + xu_y &= au + b && \text{nicht quasilinear.} \end{aligned} \quad (6.6)$$

### 6.1 Charakteristiken

Wir können Charakteristiken ähnlich wie für Gleichungen zweiter Ordnung definieren. Bei Gleichungen erster Ordnung werden sie sich als noch nützlicher erweisen. Für Gleichungen zweiter Ordnung hatten wir *Cauchy-Daten* definiert als Vorgabe der Funktion und ihrer Normalableitung auf einer Kurve  $\Gamma$ . Aufgrund unserer Erfahrungen mit gewöhnlichen Differentialgleichungen erwarten wir, dass wir für eine PDG erster Ordnung nur die Funktion selbst vorgeben müssen. Daher stellen wir uns folgende Frage:

Existieren Kurven  $\Gamma$ , so dass die Vorgabe von  $u$  auf  $\Gamma$  *nicht* ausreicht, um  $u$  in einer Umgebung von  $\Gamma$  zu bestimmen? Wenn ja, liegt es nahe, solche Kurven als *Charakteristiken* zu bezeichnen.

Nehmen wir an, eine Charakteristik  $\Gamma$  existiert. Sie sei definiert durch  $\xi(x, y) = 0$ . Wir führen zwei Familien von Kurven ein:  $\xi(x, y) = \text{const}$  und  $\eta(x, y) = \text{const}$ , so dass  $\xi$  und  $\eta$  ein lokales Koordinatensystem bilden. In den neuen Koordinaten lautet die allgemeine Form der PDG

$$(f\xi_x + g\xi_y)u_\xi + (f\eta_x + g\eta_y)u_\eta = h. \quad (6.7)$$

$u(0, \eta)$  ist auf  $\Gamma$  vorgegeben. Daher können wir sofort  $u_\eta$  auf  $\Gamma$  ausrechnen. Zur Berechnung von  $u_\xi$  benötigen wir die PDG,

$$u_\xi = \frac{h - (f\eta_x + g\eta_y)u_\eta}{f\xi_x + g\xi_y}. \quad (6.8)$$

Diese Umstellung nach  $u_\xi$  ist jedoch nur möglich, wenn

$$f\xi_x + g\xi_y \neq 0. \quad (6.9)$$

Dann können wir direkt  $u_{\xi\eta}$  berechnen und durch Ableiten der PDG schließlich alle höheren Ableitungen, ähnlich wie beim Fall zweiter Ordnung.

Auf einer Charakteristik  $\Gamma$  muss dagegen gelten

$$f\xi_x + g\xi_y = 0 \quad (6.10)$$

und wir erhalten die *charakteristische Gleichung*

$$\frac{dy}{dx} \equiv -\frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{g(x, y, u)}{f(x, y, u)}. \quad (6.11)$$

Damit haben wir wieder eine Gleichung für die Steigung der Charakteristiken erhalten. Falls  $f = 0$  ist, berechnen wir stattdessen  $dx/dy$ . Beachte, dass es für eine quasilineare Gleichung erster Ordnung *genau eine* Familie von Charakteristiken gibt.

Betrachten wir  $u(x, y)$  auf einer Charakteristik  $\Gamma$ . Die *totale* Ableitung nach  $x$  auf  $\Gamma$  lautet

$$\frac{du}{dx} = u_x + \frac{dy}{dx} u_y = \frac{fu_x + gu_y}{f}. \quad (6.12)$$

Mit der PDG eingesetzt ergibt sich

$$\frac{du}{dx} = \frac{h}{f}. \quad (6.13)$$

Manchmal bezeichnet man  $(x, y, u)$  als Charakteristik, wenn Gleichungen (6.11) und (6.13) erfüllt sind. Wir werden diese Gleichung ausnutzen, um PDG's erster Ordnung zu lösen.

Was geschieht andererseits, wenn wir  $u$  auf einer Charakteristik  $\Gamma$  vorgeben? Wir wissen schon, dass dann gilt

$$\frac{du}{dx} = \frac{fu_x + gu_y}{f}. \quad (6.14)$$

Es treten zwei Fälle auf:

1. Wenn  $du/dx = h/f$ , ist die Gleichung trivial erfüllt. Lösungen existieren, sind aber durch die Vorgabe von  $u$  nicht eindeutig bestimmt (nach der Definition von Charakteristiken).
2. Wenn  $du/dx \neq h/f$  ist Gl. (6.14) nicht erfüllbar. Es existieren keine Lösungen.

Gleichung (6.13) auf  $\Gamma$  stellt also eine *Konsistenzbedingung* dar.

Wir betrachten ein **Beispiel**, das auch zeigt, wie man Charakteristiken zur Lösung einer PDG verwenden kann. Wir suchen Lösungen der PDG

$$u_x + 2x u_y = y \quad (6.15)$$

mit der Randbedingung

$$u(0, y) = 1 + y^2 \quad \text{für } 0 < y < 1. \quad (6.16)$$

Die Gleichung ist sogar linear und die Koeffizienten lauten

$$f = 1, \quad g = 2x, \quad h = y. \quad (6.17)$$

Die Bedingung für die Charakteristiken ist also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g}{f} = 2x. \quad (6.18)$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung hat die Lösungen

$$y = x^2 + c_1 \quad (6.19)$$

mit einer beliebigen Konstanten  $c_1$ . Die Charakteristiken sind also Parabeln. Nun gilt auf einer Charakteristik

$$\frac{du}{dx} = \frac{h}{f} = y = x^2 + c_1. \quad (6.20)$$

Die Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung ist

$$u = \frac{1}{3} x^3 + c_1 x + c_2. \quad (6.21)$$

Diese Lösung gilt nur entlang der durch die Wahl der Konstanten  $c_1$  bestimmten Charakteristik.

Nun berücksichtigen wir noch die Randbedingung  $u(0, y) = 1 + y^2$  für  $0 < y < 1$ . Dieses Intervall auf der  $y$ -Achse wird von den Charakteristiken mit  $0 < c_1 < 1$  geschnitten. Für den Schnittpunkt  $(0, y_0)$  ist

$$y_0 = 0^2 + c_1 = c_1. \quad (6.22)$$

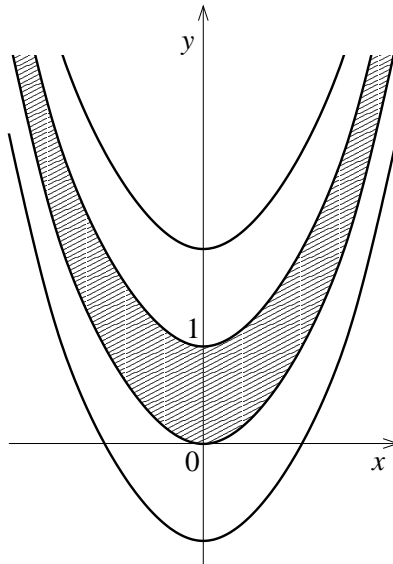


Abbildung 15: Charakteristiken für die lineare Gleichung erster Ordnung  $u_x + 2xu_y = y$ . Die Vorgabe von  $u(0, y)$  für  $0 < y < 1$  legt die Lösung im schraffierten Gebiet fest.

Dort ist, nach der Randbedingung,

$$u(0, y_0) = 1 + y_0^2. \quad (6.23)$$

Auf der Charakteristik ist die Lösung der PDG jedoch bekannt, Gl. (6.21), also gilt auch

$$u(0, y_0) = \frac{1}{3} \cdot 0^3 + c_1 \cdot 0 + c_2. \quad (6.24)$$

Damit folgt

$$c_2 = 1 + y_0^2 \quad (6.25)$$

und

$$u = \frac{1}{3} x^3 + c_1 x + c_2 = \frac{1}{3} x^3 + y_0 x + 1 + y_0^2. \quad (6.26)$$

Diese Lösung gilt auf der Charakteristik mit  $c_1 = y_0$ , die die Gleichung  $y = x^2 + y_0$  erfüllt. Also kennen wir die Lösung nun, zumindest implizit, im Gebiet zwischen den Parabeln

$$y = x^2 \quad \text{und} \quad y = x^2 + 1, \quad (6.27)$$

das in Abb. 15 schraffiert ist. Außerhalb dieses Gebietes können wir nichts aussagen.

Ein beliebiger Punkt  $(x, y)$  in diesem Gebiet liegt auf einer Charakteristik

$$y = x^2 + y_0, \quad (6.28)$$

also ist

$$y_0 = y - x^2. \quad (6.29)$$

Damit erhalten wir schließlich die explizite Form der Lösung

$$u(x, y) = \frac{1}{3} x^3 + (y - x^2)x + 1 + (y - x^2)^2 = x^4 - \frac{2}{3} x^3 - 2x^2 y + xy + y^2 + 1 \quad (6.30)$$

im schraffierten Gebiet. Wir erkennen jetzt auch anschaulich, wieso wir i.A. nicht  $u$  auf einer Charakteristik vorgeben können bzw. warum  $u$  auf einer Charakteristik eine Konsistenzbedingung erfüllen muss: Für Gleichungen erster Ordnung bestimmt schon die Vorgabe von  $u$  an *einem* Punkt  $u$  auf der gesamten Charakteristik.

Bemerkung 1: In der Praxis ist oft die Verwendung einer Parameterdarstellung für die Charakteristiken nützlich, besonders wenn sich diese nicht überall explizit in der Form  $y(x)$  schreiben lassen. Eine geringfügige Verallgemeinerung der obigen Überlegungen führt auf die charakteristischen Gleichungen

$$\frac{dx}{d\lambda} = f(x, y, u), \quad \frac{dy}{d\lambda} = g(x, y, u), \quad \frac{du}{d\lambda} = h(x, y, u) \quad (6.31)$$

mit einem Parameter  $\lambda$ . Die Lösungen  $(x(\lambda), y(\lambda))$  sind Parameterdarstellungen von Charakteristiken auf denen die Funktion selbst die dritte Gleichung erfüllen muss. Die oben angegebene Form der Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g}{f} \quad \text{und} \quad \frac{du}{dx} = \frac{h}{f} \quad (6.32)$$

ergibt sich sofort wieder, sofern diese Ausdrücke existieren.

Wir beweisen kurz die Korrektheit der Parameterdarstellung: Eine Kurve  $(x(\lambda), y(\lambda))$  erfülle die Gleichungen (6.31). Definiere eine Größe  $\xi(x, y)$ , so dass  $\xi = \text{const}$  auf der Kurve. Dann ist

$$f\xi_x + g\xi_y = \xi_x \frac{dx}{d\lambda} + \xi_y \frac{dy}{d\lambda} = \frac{d\xi}{d\lambda} = 0 \quad (6.33)$$

da  $\xi = \text{const}$ . Damit ist die Kurve eine Charakteristik. Schließlich leiten wir  $u$  entlang dieser Charakteristik ab,

$$\frac{du}{d\lambda} = u_x \frac{dx}{d\lambda} + u_y \frac{dy}{d\lambda} = fu_x + gu_y = h, \quad (6.34)$$

womit auch die dritte Charakteristische Gleichung gezeigt ist.

Bemerkung 2: In der Gleichung

$$f(x, y, u) u_x + g(x, y, u) u_y = h(x, y, u) \quad (6.35)$$

suchen wir  $u$  als Funktion von  $x$  und  $y$ . Das Problem ist aber tatsächlich symmetrisch in  $x, y, u$ ; wir können z.B. auch nach  $x(u, y)$  suchen. Dazu benutzen wir

$$u_x = \frac{1}{x_u} \quad (6.36)$$

und, bei konstantem  $x$ ,

$$0 = dx = x_u du + x_y dy, \quad (6.37)$$

also

$$u_y = -\frac{x_y}{x_u}. \quad (6.38)$$

Einsetzen in die PDG ergibt

$$\frac{f}{x_u} - \frac{g x_y}{x_u} = h \quad (6.39)$$

oder umgestellt

$$h x_u + g x_y = f. \quad (6.40)$$

Beachte, dass  $f, g, h$  einfach die Rollen getauscht haben. Es ist manchmal nützlich, eine solche Transformation auszuführen, um eine einfachere PDG zu erhalten.

## Mehr Variablen

Wir diskutieren kurz die Verallgemeinerung auf mehr als zwei Variablen. Sei

$$\sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n, u) u_{x_i} = h(x_1, \dots, x_n, u) \quad (6.41)$$

eine quasilineare Gleichung erster Ordnung in  $n$  Variablen. Sei  $u$  auf einer gewissen  $(n-1)$ -dimensionalen Hyperfläche  $S$  vorgegeben. Dann bezeichnet man als Charakteristiken die Lösungen der Gleichungen

$$\frac{dx_i}{d\lambda} = f_i, \quad (6.42)$$

$$\frac{du}{d\lambda} = h. \quad (6.43)$$

Wieder existiert *eine* Schar von Charakteristiken und i.A. liegt jeder Punkt auf genau einer Charakteristik. Die Vorgabe von  $u$  auf  $S$  bestimmt  $u$  auf allen Charakteristiken, die  $S$  schneiden. Wir erwarten sinnvolle Lösungen nur, wenn  $S$  keine Charakteristiken enthält.

## 6.2 Allgemeine Gleichungen erster Ordnung

Die bisherigen Ergebnissen können zum Teil auf *allgemeine* Gleichungen erster Ordnung übertragen werden, die also i.A. nicht linear oder quasilinear sind. Wir beschränken uns auf zwei Variablen. Die allgemeine Form einer PDG erster Ordnung in zwei Variablen lautet

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (6.44)$$

mit einer hinreichend oft stetig differenzierbaren Funktion  $F$ . Wir nehmen wieder an, dass  $u$  auf einer Kurve  $\Gamma$ , definiert durch  $\xi(x, y) = 0$ , vorgegeben ist und suchen die Lösung in der Umgebung von  $\Gamma$ . Es ist nützlich, neue Koordinaten  $\xi, \eta$  einzuführen. In diesen nimmt Gl. (6.44) die Form

$$F(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), u(\xi, \eta), u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y) \quad (6.45)$$

an. Aus  $u$  auf  $\Gamma$  kann man wieder direkt die tangentielle Ableitung  $u_\eta$  bestimmen.  $u_\xi$  und daraus  $\partial u / \partial n$  erhalten wir *im Prinzip* aus Gl. (6.45) – diese Gleichung ist aber i.A. nichtlinear, so dass es mehrere Lösungen für  $u_\xi$  auf  $\Gamma$  geben kann. Es ist daher üblich,  $u$  und  $\partial u / \partial n$  vorzugeben, die dann aber Gl. (6.45) als Konsistenzbedingung erfüllen müssen.

Existieren *Charakteristiken* für die allgemeine Gleichung? Damit meinen wir Kurven, auf denen die Vorgabe von  $u$  [und  $\partial u / \partial n$  unter Erfüllung von Gl. (6.45)] nicht ausreicht, um  $u$  in einer Umgebung festzulegen.

Um diese Frage zu beantworten, leiten wir Gl. (6.45) nach  $\xi$  ab. Wir führen die Bezeichnungen

$$p = u_x \quad \text{und} \quad q = u_y \quad (6.46)$$

ein. Dann ist die Ableitung nach  $\xi$

$$F_x x_\xi + F_y y_\xi + F_u u_\xi + F_p (u_{\xi\xi} \xi_x + u_{\xi\eta} \eta_x) + F_q (u_{\xi\xi} \xi_y + u_{\xi\eta} \eta_y) = 0 \quad (6.47)$$

(beachte  $\xi_{x\xi} = \partial 1 / \partial x = 0$  usw.). Die Ableitungen von  $F$  enthalten keinen Term  $u_{\xi\xi}$ , somit ist diese Gleichung linear in  $u_{\xi\xi}$  mit dem Koeffizienten

$$F_p \xi_x + F_q \xi_y. \quad (6.48)$$

Ist nun

$$F_p \xi_x + F_q \xi_y = 0, \quad (6.49)$$

so können wir die Gleichung nicht nach  $u_{\xi\xi}$  auflösen. Analog kann man zeigen, dass sich dann auch  $u_{\xi\xi\xi}, \dots$  nicht bestimmen lassen. Damit haben wir die *charakteristische Gleichung* gefunden. Sie läßt sich auch schreiben als

$$\frac{dy}{dx} \equiv -\frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{F_q}{F_p} \quad (6.50)$$

entlang der Charakteristik. Wie im quasilinearen Fall ist es nützlich, eine Parameterdarstellung einzuführen. Eine Charakteristik sei gegeben durch  $(x(\lambda), y(\lambda))$ . Auf der Charakteristik gilt dann

$$\frac{dx}{d\lambda} = F_p, \quad (6.51)$$

$$\frac{dy}{d\lambda} = F_q. \quad (6.52)$$

Weiter folgt

$$\frac{du}{d\lambda} = u_x \frac{dx}{d\lambda} + u_y \frac{dy}{d\lambda} = p F_p + q F_q. \quad (6.53)$$

Im Vergleich zum quasilinearen Fall stoßen wir hier auf ein Problem: Die Gleichungen (6.51), (6.52), (6.53) enthalten  $p = u_x$  und  $q = u_y$  auf der rechten Seite, die wir nicht als Funktionen von  $\lambda$  kennen, und damit können wir das Gleichungssystem noch nicht lösen. Wir benötigen auch Gleichungen für  $p(\lambda)$  und  $q(\lambda)$ , die wir wie folgt erhalten. Wir leiten Gl. (6.44) nach  $x$  ab:

$$F_x + F_u p + F_p p_x + F_q q_x = 0, \quad (6.54)$$

also, mit  $q_x = u_{xy} = p_y$  und Gleichungen (6.51) und (6.52),

$$F_x + F_u p + \frac{dx}{d\lambda} p_x + \frac{dy}{d\lambda} p_y = F_x + F_u p + \frac{dp}{d\lambda} = 0. \quad (6.55)$$

Damit erhalten wir

$$\frac{dp}{d\lambda} = -F_x - F_u p \quad (6.56)$$

und analog

$$\frac{dq}{d\lambda} = -F_y - F_u q. \quad (6.57)$$

Gleichungen (6.51), (6.52), (6.53), (6.56) und (6.57) stellen fünf gekoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen für die Funktionen  $x$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $p$ ,  $q$  von  $\lambda$  dar. Starten wir von einem Punkt auf der Kurve mit vorgegebenen Daten, so kennen wir alle fünf Größen an diesem Punkt und können nun im Prinzip die fünf Funktionen von  $\lambda$  bestimmen. Damit bekommen wir nicht nur die Charakteristik  $(x(\lambda), y(\lambda))$ , sondern auch die Funktion  $u$  und ihre Ableitungen  $u_x$  und  $u_y$  entlang der Charakteristik,<sup>1</sup> d.h. auch die Tangentialebene an der Fläche  $u(x, y)$  an jedem Punkt der Charakteristik. Die Gesamtheit der fünf Größen entlang einer Charakteristik nennt man auch einen *charakteristischen Streifen*.

**Beispiel:** Wir betrachten die PDG erster Ordnung

$$u - xu_x - \frac{1}{2}u_y^2 + x^2 = 0 \quad (6.58)$$

mit

$$u(x, 0) = x^2 - \frac{1}{6}x^4 \quad \text{für } 0 < x < 1. \quad (6.59)$$

Mit  $p$  und  $q$  lautet die PDG

$$u - xp - \frac{q^2}{2} + x^2 = 0. \quad (6.60)$$

Aus der Randbedingung folgt

$$u_x(x, 0) = p(x, 0) = 2x - \frac{2}{3}x^3 \quad \text{für } 0 < x < 1 \quad (6.61)$$

und mit der PDG

$$x^2 - \frac{1}{6}x^4 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{q^2(x, 0)}{2} + x^2 = \frac{x^4}{2} - \frac{q^2(x, 0)}{2} = 0 \quad \text{für } 0 < x < 1. \quad (6.62)$$

Konsistente Vorgaben für  $q$  sind also  $q(x, 0) = \pm x^2$  für  $0 < x < 1$ . Wir geben

$$q(x, 0) = x^2 \quad \text{für } 0 < x < 1 \quad (6.63)$$

vor. Die charakteristischen Gleichungen lauten

$$\frac{dx}{d\lambda} = -x, \quad \frac{dy}{d\lambda} = -q, \quad \frac{du}{d\lambda} = -px - q^2, \quad \frac{dp}{d\lambda} = -2x, \quad \frac{dq}{d\lambda} = -q. \quad (6.64)$$

Wir bestimmen die Charakteristik, die das vorgegebene Intervall bei  $x = x_0$  schneidet. Dieser Punkt möge dem Parameter  $\lambda = 0$  entsprechen. Dann finden wir

$$x(\lambda) = x_0 e^{-\lambda}, \quad (6.65)$$

$$\Rightarrow p(\lambda) = 2x_0 e^{-\lambda} + c_1, \quad (6.66)$$

$$q(\lambda) = c_2 e^{-\lambda}, \quad (6.67)$$

$$\Rightarrow y(\lambda) = c_2 e^{-\lambda} + c_3. \quad (6.68)$$

Die Randbedingungen ergeben

$$p(\lambda) = 2x_0 e^{-\lambda} - \frac{2}{3}x_0^3, \quad (6.69)$$

$$q(\lambda) = x_0^2 e^{-\lambda}, \quad (6.70)$$

$$y(\lambda) = x_0^2 (e^{-\lambda} - 1). \quad (6.71)$$

Wir können nun den Parameter  $\lambda$  eliminieren,

$$y = x_0 x - x_0^2, \quad (6.72)$$

$$p = 2x - \frac{2}{3}x_0^3, \quad (6.73)$$

$$q = x_0 x. \quad (6.74)$$

---

<sup>1</sup>Man kann zeigen, dass die so bestimmten Ableitungen mit der ursprünglichen PDG konsistent sind.

Beachte, dass die Charakteristiken in diesem Beispiel Geraden sind. Die Funktion  $u$  selbst bestimmen wir am besten direkt aus der PDG,

$$u = px + \frac{1}{2}q^2 - x^2 = 2x^2 - \frac{2}{3}x_0^3x + \frac{1}{2}x_0^2x^2 - x^2 = x^2 - \frac{2x_0^3}{3}x + \frac{x_0^2}{2}x^2. \quad (6.75)$$

Nun können wir auch  $x_0$  mittels  $y = x_0x - x_0^2$  durch  $y$  ausdrücken:

$$x_0 = \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - y}, \quad (6.76)$$

wobei das Vorzeichen so gewählt wurde, dass  $x = x_0$  für  $y = 0$  erfüllt ist. Schließlich ergibt sich die Lösung

$$u = x^2 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{12}x(x^2 - 4y)^{3/2} \quad (6.77)$$

zu den vorgegebenen Randbedingungen. Diese Lösung gilt nur in den Punkten, die durch Charakteristiken mit dem vorgegebenen Intervall verbunden sind. Dieses Gebiet ist in Abbildung 16 gezeigt (wir beschränken uns auf  $y > 0$ ).

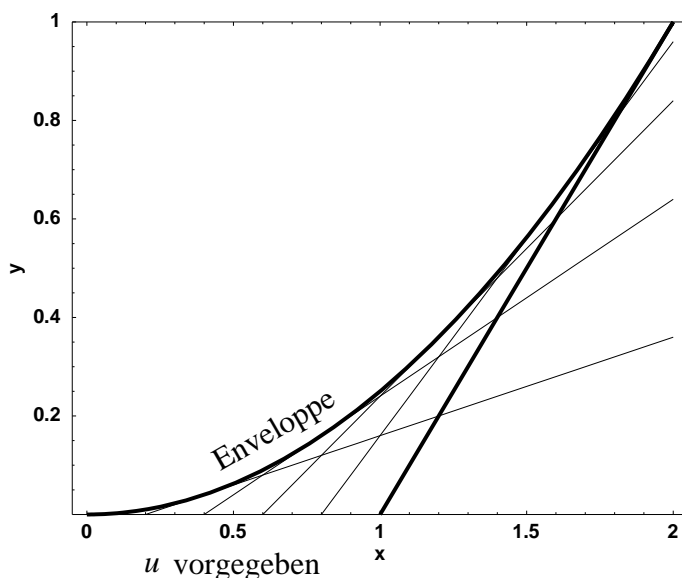


Abbildung 16: Charakteristiken für die nichtlineare Gleichung erster Ordnung  $u - xu_x - u_y^2/2 + x^2 = 0$  mit einer speziellen Vorgabe von  $u(x, 0)$  für  $0 < x < 1$ , siehe Text. Diese Vorgabe legt die Lösung im Gebiet zwischen den fett gezeichneten Kurven fest. Beachte, dass die linke Begrenzung eine Einhüllende von Charakteristiken ist. Sie gehorcht der Gleichung  $y = x^2/4$ . Die dünn gezeichneten Geraden sind Charakteristiken.

Wir sehen sofort, dass sich die Charakteristiken in diesem Beispiel *schneiden* und eine *Einhüllende* (*Envelope*) aufweisen. Das ist typisch für *nichtlineare* Gleichungen (einschließlich quasilineare Gleichungen) erster Ordnung.

Bei der Betrachtung von Abb. 16 fällt auf, dass sich im Inneren des Lösungsgebiets in jedem Punkt *zwei* Charakteristiken schneiden. Integration entlang der zwei Charakteristiken durch einen Schnittpunkt wird i.A. *unterschiedliche* Werte von  $u$ ,  $p$ ,  $q$  ergeben. Im Beispiel hatten wir stillschweigend die Charakteristik gewählt, die zwischen dem gesuchten Punkt und der Kurve mit Randbedingungen *nicht* die Einhüllende berührt, denn so ergibt sich eine stetige Lösung. Der Grund ist folgender: Um eine stetige Lösung zu erhalten, muss insbesondere der Schnittpunkt  $(x_0, 0)$  stetig vom betrachteten Punkt  $(x, y)$  abhängen. In der Nähe der  $x$ -Achse müssen wir die steileren Charakteristiken wählen, da die flacheren sich der Charakteristik  $y = 0$  für  $x_0 = 0$  annähern, die mit der Randbedingung nicht verträglich ist (denn auf dieser Charakteristik wäre  $u = x^2$ ).<sup>2</sup> Daher erfordert Stetigkeit, im gesamten Gebiet die steileren Charakteristiken zu benutzen. Im Gebiet rechts von der rechten fett gezeichneten Charakteristik  $y = x - 1$  in Abb. 16 können wir eine *eindeutige* Lösung finden, da nur jeweils eine Charakteristik durch jeden Punkt das vorgegebene Intervall schneidet. Dies erfordert aber die Verwendung der flacheren Charakteristiken. Daher wird sich die Lösung entlang  $y = x - 1$  nicht stetig an die Lösung im eben diskutierten Gebiet anschließen.

<sup>2</sup>Dieses Beispiel ist also ziemlich subtil, da wir tatsächlich die Randbedingungen auf einer Charakteristik vorgeben! Nur geht die Charakteristik-Eigenschaft der  $x$ -Achse nicht in die Lösung ein, weil wir für jeden vorgegebenen Punkt  $(x_0, 0)$  die *andere* Charakteristik durch diesen Punkt benutzen.

### 6.3 Einhüllende und vollständiges Integral

Sei eine Kurvenschar im  $(x, y)$ -Raum definiert durch die Gleichung

$$g(x, y, \alpha) = 0, \quad (6.78)$$

wobei der Parameter  $\alpha$  verschiedene Kurven der Schar unterscheidet. Hat die Schar eine Einhüllende, so schneiden sich in jedem Punkt der Einhüllenden zwei „benachbarte“ Kurven, d.h. gekennzeichnet durch die Parameter  $\alpha$  und  $\alpha + d\alpha$ . In diesem Punkt muss also neben Gl. (6.78) auch

$$g(x, y, \alpha + d\alpha) = 0 \quad (6.79)$$

gelten. Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt

$$g(x, y, \alpha + d\alpha) - g(x, y, \alpha) = g_\alpha(x, y, \alpha) d\alpha = 0, \quad (6.80)$$

also erfüllen die Punkte der Einhüllenden simultan die beiden Gleichungen

$$g(x, y, \alpha) = 0, \quad (6.81)$$

$$g_\alpha(x, y, \alpha) = 0. \quad (6.82)$$

Wir interessieren uns speziell für die Einhüllende einer Schar von *Charakteristiken*. Da jeder Punkt auf der Einhüllenden auch auf einer Charakteristik liegt *und* die Einhüllende am Berührungspunkt tangential zu dieser ist,<sup>3</sup> gilt für jeden Punkt der Einhüllenden, dass die Vorgabe von  $u$  und  $\partial u / \partial n$  nicht ausreicht, um  $u$  in einer Umgebung zu bestimmen. D.h. die Einhüllende der Charakteristiken ist selbst eine Charakteristik!

Im obigen **Beispiel** erhalten wir für die Einhüllende das Gleichungssystem (der Parameter ist hier  $x_0$ )

$$y - x_0 x + x_0^2 = 0, \quad (6.83)$$

$$-x + 2x_0 = 0, \quad (6.84)$$

woraus durch Elimination von  $x_0$  folgt

$$y - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^2 = y - \frac{1}{4}x^2 = 0, \quad (6.85)$$

also ist

$$y = \frac{1}{4}x^2 \quad (6.86)$$

die explizite Form der Einhüllenden.

Einhüllende lassen sich auch für höherdimensionale Objekte wie Flächen definieren. Dies ist von Bedeutung für die Lösungen von nichtlinearen PDG's erster Ordnung. Eine Schar von Flächen sei durch die Gleichung

$$g(x, y, z, \alpha) = 0 \quad (6.87)$$

mit dem Parameter  $\alpha$  definiert. Ein einhüllende Fläche ist in jedem Punkt tangential zu einer der Flächen der Schar; man kann zeigen, dass die Einhüllende dann Gl. (6.87) und

$$g_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0 \quad (6.88)$$

erfüllen muss.

Die Anwendung auf Lösungen von PDG's ist folgende: Sei  $u(x, y, \alpha)$  eine Schar von Lösungen *derselben* PDG erster Ordnung, aber i.A. nicht zu denselben Randbedingungen. Die Schar habe eine Einhüllende  $U(x, y)$ . Diese ist notwendig tangential zur Lösung  $u(x, y, \alpha)$  im Berührungspunkt mit dieser. Damit gilt an diesem Punkt aber

$$U(x, y) = u(x, y, \alpha), \quad (6.89)$$

$$U_x(x, y) = u_x(x, y, \alpha), \quad (6.90)$$

$$U_y(x, y) = u_y(x, y, \alpha). \quad (6.91)$$

Da  $u(x, y, \alpha)$  nun bei  $(x, y)$  die PDG erfüllt, gilt das auch für  $U(x, y)$ . Also: Die Einhüllende von Lösungen ist selbst eine Lösung.

---

<sup>3</sup>Dies folgt es daraus, dass bei einem nicht tangentialen Schnittpunkt Teile der Charakteristik auf jeder der beiden Seiten der angeblichen Einhüllenden liegen würden, die dann aber gar keine Einhüllende wäre.



Wir erwarten nicht, dass *ein* Parameter  $\alpha$  ausreicht, um *alle* Lösungen einer PDG darzustellen, da zur eindeutigen Bestimmung einer Lösung i.A. eine ganze *Funktion*, z.B. auf dem Rand, vorgegeben werden muss. Nun machen wir einen scheinbar kleinen Schritt, der dennoch zu einer weitaus allgemeineren Menge von Lösungen führt. Wir betrachten nämlich eine Schar von Lösungen mit *zwei* Parametern  $\alpha$  und  $\beta$ .

Seien  $u(x, y, \alpha, \beta)$  Lösungen einer PDG erster Ordnung (für  $\alpha, \beta$  aus einer bestimmten Menge). Wir können speziell  $\beta$  als *beliebige* Funktion von  $\alpha$  ansetzen, da die Aussage ja für alle  $\alpha, \beta$  gilt. Dann erhalten wir eine Schar von Lösungen  $u(x, y, \alpha, \beta(\alpha))$ , deren *Einhüllende* das Gleichungssystem

$$u(x, y, \alpha, \beta(\alpha)) - u = 0, \quad (6.92)$$

$$u_\alpha + u_\beta \beta'(\alpha) = 0 \quad (6.93)$$

erfüllt. Diese Einhüllende hängt jedoch von der *beliebigen* Funktion  $\beta(\alpha)$  ab. Da wir gesehen haben, dass die Vorgabe einer Funktion auf einer geeigneten Kurve die Lösung eindeutig bestimmt, nennen wir die resultierenden Einhüllenden eine *allgemeine Lösung* der PDG.

Beachte, dass wir diese allgemeine Lösung aus einer *zwei-parametrischen* Schar von Lösungen gewonnen haben. Diese Schar nennt man daher ein *vollständiges Integral* der PDG.

Achtung: Die Nomenklatur ist hier irreführend; eine *allgemeine Lösung* umfasst nämlich im Allgemeinen *nicht alle* Lösungen der PDG! Auch können sich aus verschiedenen vollständigen Integralen verschiedene allgemeine Lösungen ergeben.

Dies ist ein guter Platz für ein **Beispiel**: Wir bleiben bei der PDG (6.58). Ein Beispiel für ein vollständiges Integral dieser Gleichung ist

$$u = x^2 + \alpha x + \frac{1}{2}(y - \beta)^2, \quad (6.94)$$

da dies für alle reellen  $\alpha, \beta$  eine Lösung ist, wie man durch Einsetzen sieht. Natürlich ist es speziell auch eine Lösung für  $\beta = \alpha$  oder  $\beta = \sin \alpha^3 - 5\alpha$  usw. Jede solche Wahl von  $\beta(\alpha)$  ergibt eine ein-parametrische Schar von Lösungen, die i.A. eine Einhüllende hat, die für jedes  $\beta(\alpha)$  verschieden ist. Zum Beispiel führt  $\beta = \alpha$  auf das folgende Gleichungssystem für die Einhüllende:

$$x^2 + \alpha x + \frac{1}{2}(y - \alpha)^2 - u = 0, \quad (6.95)$$

$$x - (y - \alpha) = 0. \quad (6.96)$$

Elimination von  $\alpha$  ergibt die Lösung

$$u = \frac{1}{2}x^2 + xy. \quad (6.97)$$

Die Gesamtheit aller so gefundenen Lösungen bildet die *allgemeine Lösung*, die man jedoch außer in trivialen Fällen nicht geschlossen angeben kann.

Ein vollständiges Integral hat noch eine weitere interessante Eigenschaft: Wir bilden die Einhüllende  $U(x, y, \beta)$  der Lösungen  $u(x, y, \alpha, \beta)$  für verschiedene  $\alpha$  und festes  $\beta$ . Die  $U(x, y, \beta)$  bilden selbst eine ein-parametrische Schar von Lösungen der PDG, die i.A. eine Einhüllende  $\mathcal{U}(x, y)$  hat, die wieder eine Lösung der PDG ist. Diese nennt man eine *singuläre Lösung*. Nach Konstruktion erhalten wir die singuläre Lösung zu einem vollständigen Integral aus dem Gleichungssystem

$$u(x, y, \alpha, \beta) = u, \quad (6.98)$$

$$u_\alpha(x, y, \alpha, \beta) = 0, \quad (6.99)$$

$$u_\beta(x, y, \alpha, \beta) = 0 \quad (6.100)$$

durch Elimination von  $\alpha, \beta$ .

In unserem **Beispiel** ist ein anderes vollständiges Integral

$$u = x^2 + \alpha\beta x + \frac{1}{2}(y - \alpha - \beta)^2. \quad (6.101)$$

Hier lauten die drei Gleichungen

$$x^2 + \alpha\beta x + \frac{1}{2}(y - \alpha - \beta)^2 = u, \quad (6.102)$$

$$\beta x - (y - \alpha - \beta) = 0, \quad (6.103)$$

$$\alpha x - (y - \alpha - \beta) = 0, \quad (6.104)$$

also  $\beta = \alpha$  und

$$\alpha = \frac{y}{x+2}. \quad (6.105)$$

Einsetzten in die erste Gleichung ergibt

$$\mathcal{U} = u = x^2 + \frac{xy^2}{(x+2)^2} + \frac{1}{2} \left( y - \frac{2y}{x+2} \right)^2 = x^2 + \frac{xy^2}{2(x+2)} \quad (6.106)$$

als singuläre Lösung.

Zum Schluss betrachten wir noch den Zusammenhang zwischen einem vollständigen Integral und Charakteristiken. Wir wählen eine Funktion  $\beta(\alpha)$ , dann ist  $u(x, y, \alpha, \beta(\alpha))$  eine ein-parametrische Schar von Lösungen. I.A. existiert eine Einhüllende  $U(x, y)$ . Die Lösung  $u(x, y, \alpha, \beta(\alpha))$  für ein bestimmtes  $\alpha = a$  berührt die Einhüllende in einer *Kurve*  $\Gamma$ ,<sup>4</sup> und ist dort zu ihr tangential.

Es gibt jedoch keinen Grund, weshalb höhere Ableitung als die erste von  $u$  und  $U$  auf  $\Gamma$  übereinstimmen sollten.  $u$  und  $U$  sind beide Lösungen der PDG und eine weitere Lösung erhält man durch Zusammensetzen von  $u$  auf der einen Seite von  $\Gamma$  und  $U$  auf der anderen. Diese Lösung zeigt jedoch unstetige höhere Ableitungen. Dies ist aber nur möglich, wenn  $\Gamma$  eine Charakteristik ist.<sup>5</sup>

Seien  $\beta(a) = b$ ,  $\beta'(a) = c$ . Dann erhalten wir zumindest einen Teil der Charakteristiken einer PDG aus dem Gleichungssystem

$$u(x, y, a, b) = u, \quad (6.107)$$

$$u_\alpha(x, y, a, b) + c u_\beta(x, y, a, b) = 0, \quad (6.108)$$

für  $x, y$  und  $u$  bei gegebenen  $a, b, c$ . Dieses beschreibt gerade alle Punkte  $(x, y, u)$  auf der Schnittkurve  $\Gamma$ . Kennen wir ein vollständiges Integral  $u(x, y, a, b)$ , können wir somit eine Klasse von Charakteristiken ermitteln.

## 6.4 Eikonal-Gleichung

Wir betrachten die zeitliche Ausbreitung einer Störung im  $n$ -dimensionalen Raum. Zu jedem Zeitpunkt  $t$  existiert eine  $(n-1)$ -dimensionale Hyperfläche, die den gestörten vom ungestörten Teil des Raumes trennt. Unser Ziel ist, eine PDG zu finden, die diese zeitabhängige Fläche beschreibt.

Sei  $T(\mathbf{r})$  die Zeit, zu der die Grenzfläche den Punkt  $\mathbf{r}$  passiert. Dann ist

$$t = T(\mathbf{r}) \quad (6.109)$$

eine implizite Darstellung der Grenzfläche zur Zeit  $t$ . Die lokale Ausbreitungsgeschwindigkeit der Störung sei  $c(\mathbf{r})$ . Das *Huygens'sche Prinzip* legt nahe, dass jeder Punkt  $\mathbf{r}$  auf der Grenzfläche Ausgangspunkt einer Kugelwelle (eigentlich einer „Hypersphärenwelle“) mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c(\mathbf{r})$  ist. Dann ist die Grenzfläche zur Zeit  $t + dt$  ist die *Einhüllende* der Kugeln mit Mittelpunkten  $\mathbf{r}$  auf der Grenzfläche zur Zeit  $t$  und Radien  $c(\mathbf{r}) du$ .<sup>6</sup> Ist  $|\nabla c(\mathbf{r})|$  beschränkt, so ist für hinreichend kleines  $dt$  die Geschwindigkeit  $c$  auf der Längenskala  $c dt$  konstant. Daher ist die Grenzfläche zur Zeit  $t + dt$  gegenüber  $t$  *orthogonal* um  $c dt$  verschoben.

Nun wissen wir, dass der Gradient

$$\nabla T \quad (6.110)$$

auf Hyperflächen  $T = \text{const}$  senkrecht steht. Die Normalenableitung bezüglich dieser Hyperflächen ist offenbar

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla T = \pm |\nabla T| = \pm \frac{dT}{cdT} = \pm \frac{1}{c}, \quad (6.111)$$

also

$$\nabla T \cdot \nabla T = \frac{1}{c^2} \quad (6.112)$$

oder

$$T_x^2 + T_y^2 + \dots = \frac{1}{c^2}. \quad (6.113)$$

Dies ist die *Eikonal-Gleichung*. Die Lösung  $T(\mathbf{r})$  nennt man auch *Eikonal-Funktion*. Beachte, dass  $c$  i.A. vom Ort abhängt. Die Eikonal-Gleichung ist eine nichtlineare PDG erster Ordnung mit einer besonders einfachen Form.

<sup>4</sup>Da wir durch Variation des einen Parameters  $\alpha$  die gesamte einhüllende Fläche erhalten.

<sup>5</sup>Wäre  $\Gamma$  keine Charakteristik, so wäre die Lösung in einer Umgebung *auf beiden Seiten* von  $\Gamma$  durch eine Taylor-Reihe bestimmt und alle Ableitungen wären damit stetig.

<sup>6</sup>Es gibt natürlich zwei solche Einhüllenden, entsprechend der Ausbreitung in positiver und negativer Zeitrichtung.

Bevor wir ein Beispiel betrachten, untersuchen wir noch die Charakteristiken der Eikonal-Gleichung. Wir beschränken uns auf zwei unabhängige Variablen, die Verallgemeinerung ist nicht schwierig. Sei wieder

$$p = T_x, \quad q = T_y. \quad (6.114)$$

Die charakteristischen Gleichungen lauten hier

$$\frac{dx}{d\lambda} = p, \quad (6.115)$$

$$\frac{dy}{d\lambda} = q, \quad (6.116)$$

$$\frac{dT}{d\lambda} = p^2 + q^2 = \frac{1}{c^2} \quad (6.117)$$

$$\frac{dp}{d\lambda} = -\frac{c_x}{c^3}, \quad (6.118)$$

$$\frac{dq}{d\lambda} = -\frac{c_y}{c^3}. \quad (6.119)$$

Aus den ersten beiden Gleichung folgt

$$d\mathbf{r} = \nabla T d\lambda, \quad (6.120)$$

d.h.  $d\mathbf{r}$  steht immer senkrecht auf den Grenzflächen  $T = \text{const}$ . Damit stehen aber auch die Charakteristiken senkrecht auf allen Grenzflächen. In diesem Zusammenhang nennt man sie auch *Strahlen (rays)*. Damit verhalten sich die Charakteristiken der Eikonal-Gleichung wie die der Wellengleichung – sie beschreiben die *Trajektorien* der Ausbreitung von Störungen.

Es ist praktisch, als Parameter in den charakteristischen Gleichungen die Strecke  $s$  entlang der Strahlen zu nehmen. Es ist

$$\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 = p^2 + q^2 = \frac{1}{c^2}. \quad (6.121)$$

Wählen wir das Vorzeichen  $ds/d\lambda = +1/c$ , so folgt

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{d\lambda} \frac{d\lambda}{ds} = cp \quad (6.122)$$

und analog

$$\frac{dy}{ds} = cq. \quad (6.123)$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{ds^2} &= \frac{dc}{ds} p + c \frac{dp}{ds} = (c_x cp + c_y cq) p - \frac{c_x}{c} \\ &= \left( c_x \frac{dx}{ds} + c_y \frac{dy}{ds} \right) \frac{dx}{ds} - \frac{c_x}{c}, \end{aligned} \quad (6.124)$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \left( c_x \frac{dx}{ds} + c_y \frac{dy}{ds} \right) \frac{dy}{ds} - \frac{c_y}{c}. \quad (6.125)$$

Diese Gleichungen werden ergänzt durch die Bedingung, dass  $s$  tatsächlich die Strecke entlang der Strahlen misst:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1. \quad (6.126)$$

Man kann zeigen, dass diese Bedingung erfüllt bleibt, wenn die Anfangsbedingungen sie erfüllen.

Beachte, dass  $T$  in den Gleichungen nicht mehr auftaucht. Dieses System von *gewöhnlichen* Differentialgleichungen für die Komponenten von  $\mathbf{r}(s)$  bestimmt den gesamten Verlauf eines Strahls, wenn (a) ein Anfangspunkt und die entsprechende Anfangsrichtung oder (b) zwei Punkte vorgegeben werden (im zweiten Fall sofern überhaupt ein Strahl zwischen beiden Punkten existiert). Die Verallgemeinerung auf  $n$  Variable  $x_i$  ist nicht überraschend:

$$c \frac{dx_i^2}{ds^2} = \sum_j \frac{\partial c}{\partial x_j} \frac{dx_j}{ds} \frac{dx_i}{ds} - \frac{\partial c}{\partial x_i}. \quad (6.127)$$

Mehr zum Zusammenhang der Eikonal-Gleichung mit der Wellengleichung wird in Abschnitt 7.4 gesagt werden.

Wir betrachten ein **Beispiel**: In zwei Dimensionen sei die Ausbreitungsgeschwindigkeit geeignet skaliert

$$c = \cosh x \tag{6.128}$$

Die Eikonal-Gleichung lautet dann

$$T_x^2 + T_y^2 = \frac{1}{\cosh^2 x}. \tag{6.129}$$

Die charakteristischen Gleichungen für die Strahlen lauten

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \sinh x \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 - \frac{\sinh x}{\cosh x}, \tag{6.130}$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \sinh x \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds}, \tag{6.131}$$

wobei die Anfangsbedingungen Gl. (6.126) erfüllen müssen. Analytische Lösungen sind nicht offensichtlich. Numerische Integration führt zu typischen Strahlen, wie sie in Abb. 17 gezeigt sind.

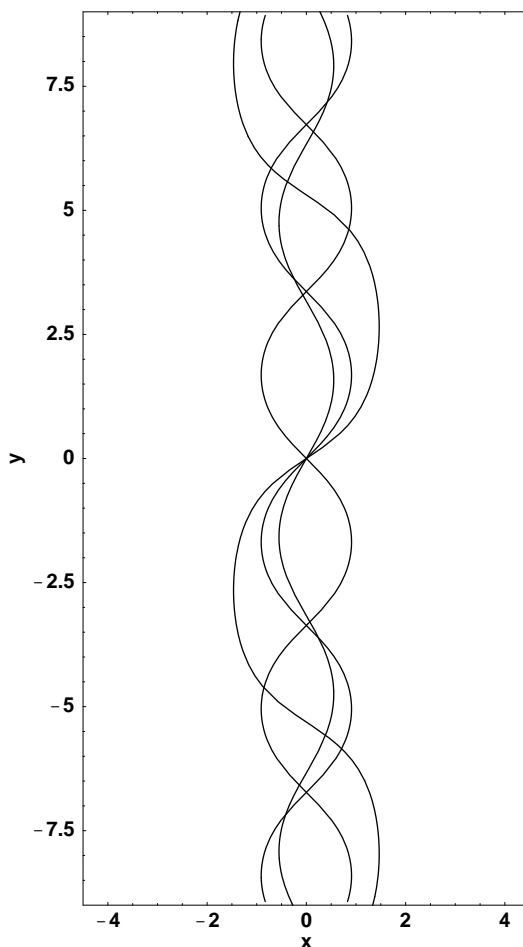


Abbildung 17: Einige der den Ursprung enthaltenden Strahlen (Charakteristiken) der Eikonal-Gleichung in zwei Dimensionen mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c = \cosh x$ . Beachte, dass die Strahlen in  $y$ -Richtung zur  $y$ -Achse, d.h. zum Bereich geringerer Geschwindigkeit oder „optisch dichteren Bereich“, zurückgebeugt werden. Ähnlich ist die Situation in Glasfaserkabeln mit Gradienten im Brechungsindex.

## 6.5 Legendre-Transformationen

Wir hatten in der allgemeinen Gleichung erster Ordnung

$$F(x, y, u, p, q) = 0 \tag{6.132}$$

$x$  und  $y$  als unabhängige Variablen betrachtet. Es ist manchmal nützlich, zu  $p$  und/oder  $q$  als unabhängige Variable überzugehen. Die notwendige Transformation ergibt sich aus dem totalen Differential

$$du = u_x dx + u_y dy = p dx + q dy. \tag{6.133}$$

Wir definieren eine neue Funktion

$$f := u - px. \quad (6.134)$$

Dann ist

$$df = du - d(px) = p dx + q dy - x dp - p dx = -x dp + q dy. \quad (6.135)$$

Wenn wir  $f$  als Funktion von  $p$  und  $y$  auffassen, gilt

$$x = -f_p, \quad q = f_y. \quad (6.136)$$

Wir können die PDG durch Einsetzen dieser Beziehungen in eine Gleichung für  $v(p, y)$  umwandeln, die evtl. einfacher zu lösen ist.

Wir können noch zwei weitere Funktionen definieren,

$$g := u - qy, \quad (6.137)$$

$$h := u - px - qy. \quad (6.138)$$

Dann ist

$$dg = p dx - y dq, \quad (6.139)$$

$$dh = -x dp - y dq \quad (6.140)$$

und für  $g$

$$p = g_x, \quad y = -g_q \quad (6.141)$$

bzw. für  $h$

$$x = -h_p, \quad y = -h_q. \quad (6.142)$$

Die Transformationen von  $u$  auf  $f$ ,  $g$  oder  $h$  nennt man *Legendre-Transformationen*.<sup>7</sup> Sie sind nicht auf zwei Variablen beschränkt. Sie ändern die natürlichen Variablen einer Größe und sind in der Thermodynamik von großer Bedeutung.

**Beispiel:** Die PDG

$$u_x^2 + xu_y = p^2 + xq = 0 \quad (6.143)$$

ist zunächst nicht trivial. Wir führen

$$h = u - px - qy \quad (6.144)$$

ein, dann ist  $x = -h_p$  und wir erhalten

$$p^2 - h_p q = 0 \quad \Rightarrow \quad h_p = \frac{p^2}{q}. \quad (6.145)$$

Diese Gleichung läßt sich aber leicht lösen:

$$h(p, q) = \frac{1}{3q} p^3 + H(q) \quad (6.146)$$

mit einer beliebigen Funktion  $H(q)$ . Die Rücktransformation liefert eine implizite Darstellung von Lösungen  $u$  der ursprünglichen Gleichung:

$$\begin{aligned} x &= -h_p = -\frac{p^2}{q}, \\ y &= -h_q = \frac{p^3}{3q^2} - H'(q), \\ u &= h + px + qy = -\frac{p^3}{3q} + H(q) - qH'(q). \end{aligned} \quad (6.147)$$

Für jede Wahl der Funktion  $H(q)$  erhalten wir *im Prinzip* eine Lösung  $u(x, y)$  durch Elimination der Parameter  $p, q$ .

---

<sup>7</sup>In der mathematischen Literatur bezeichnet man insbesondere  $u \mapsto h$  als Legendre-Transformation. Wir verwenden hier auch die in der Physik übliche Wahl der Vorzeichen, die sich von derjenigen in der Mathematik unterscheidet; in der Mathematik würde man  $px + qy - u$  als Legendre-Transformierte von  $u$  bezeichnen.

## 6.6 Unstetigkeiten, schwache Lösungen

Im Beispiel aus Abbildung 16 war uns ein Problem aufgefallen: Wir hatten die Lösung an einem Punkt gefunden, indem wir die Charakteristik durch diesen Punkt zum Schnittpunkt mit der Kurve mit vorgegebenen Werten zurückverfolgt haben, dann konnte die Lösung entlang der Charakteristik explizit berechnet werden. Nun schneiden sich die Charakteristiken jedoch typischerweise für nichtlineare Gleichungen erster Ordnung und man erhält aus zwei Charakteristiken durch einen Punkt i.A. unterschiedliche Lösungen. Oben hatten wir zusätzlich eine stetige Lösung gefordert, um dieses Problem zu lösen.

Es treten jedoch bei nichtlinearen Gleichungen erster Ordnung häufig Fälle auf, in denen *keine* Lösung existiert, die überall im Bereich, in dem die Methode der Charakteristiken ein Ergebnis liefert, stetig ist. Hier folgt aus der PDG mit Randbedingungen *nicht*, wo die Unstetigkeit liegt. Eine weitere Angabe ist notwendig, die aus dem physikalischen Problem ermittelt werden muss.

Oft handelt es sich dabei um einen Erhaltungssatz, den die Lösung  $u$  trotz der Unstetigkeit erfüllen muss. Wir nehmen an, dass die *Dichte*  $u$  eine Kontinuitätsgleichung

$$u_t + f_x = 0 \quad (6.148)$$

erfüllt, wobei  $f$  die zu  $u$  gehörende Flussdichte ist, die wir dem konkreten Problem entnehmen müssen.

Eine Funktion  $u$ , die entlang einer Kurve unstetig ist, aber sonst eine gegebene PDG erster Ordnung erfüllt, und *überall* (einschließlich auf der Kurve) einen Erhaltungssatz erfüllt, nennt man *schwache Lösung*. Die Unstetigkeit selbst nennt man auch *Schockwelle*.

Zur Erläuterung betrachten wir das folgende Beispiel:  $u$  erfülle die sogar quasilineare PDG

$$u_t + 2uu_x = 0 \quad \text{für } -\infty < x < \infty, t > 0 \quad (6.149)$$

mit der Vorgabe

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 0, \\ 1 - x & \text{für } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{für } x > 1. \end{cases} \quad (6.150)$$

Die PDG läßt sich auch in Form einer Kontinuitätsgleichung

$$u_t + (u^2)_x = 0 \quad (6.151)$$

schreiben, hier ist die Flussdichte  $f = u^2$ . Stellen wir uns Partikel vor, die sich in einer Dimension bewegen, so würde dies bedeuten, dass die Rate  $f$ , mit der Partikel einen Punkt passieren, quadratisch von der Dichte abhängt. Im Unterschied zur Situation im Straßenverkehr *erhöht* eine hohe Dichte hier also die mittlere Geschwindigkeit der Partikel.

Wir sehen die Charakteristiken aus? Aus Gleichungen (6.51), (6.52), (6.53) erhalten wir die Parameterdarstellung der Charakteristiken,

$$\frac{dx}{d\lambda} = 2u, \quad (6.152)$$

$$\frac{dt}{d\lambda} = 1, \quad (6.153)$$

$$\frac{du}{d\lambda} = u_x 2u + u_t = 0 \quad (6.154)$$

Die zweite Gleichung zeigt, dass wir  $\lambda = t$  wählen können. Dann folgt

$$\frac{dx}{dt} = 2u, \quad (6.155)$$

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad (6.156)$$

also

$$u = u(x_0, 0), \quad (6.157)$$

$$x = x_0 + 2u(x_0, 0)t \quad (6.158)$$

auf der Charakteristik. Mit der Anfangsbedingung (6.150) ergeben sich die Charakteristiken

$$x(t) = \begin{cases} x_0 + 2t & \text{für } x_0 \leq 0, \\ x_0 + 2(1 - x_0)t & \text{für } 0 < x_0 \leq 1, \\ x_0 & \text{für } x_0 > 1, \end{cases} \quad (6.159)$$

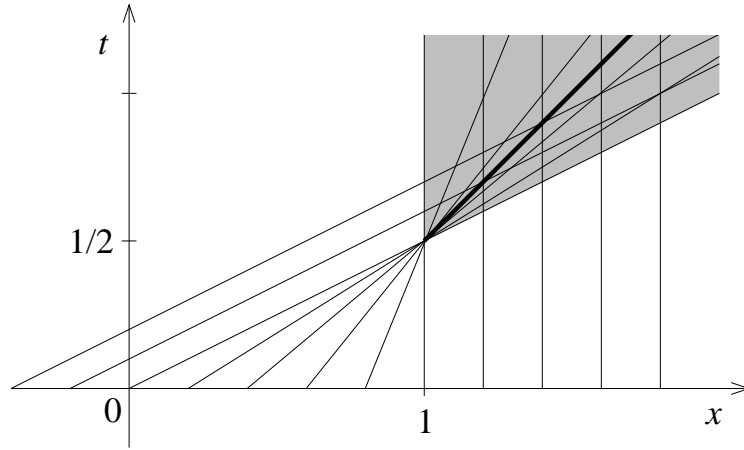


Abbildung 18: Charakteristiken für die nichtlineare Gleichung erster Ordnung  $u_t + 2uu_x = 0$  mit den speziellen im Text genannten Randbedingungen. Im schraffierten Gebiet schneiden sich Charakteristiken. Die fett eingezeichnete Kurve, hier eine Gerade, ist die Schockwelle.

die in Abbildung 18 dargestellt sind.

Man erkennt, dass sich einige Charakteristiken im Punkt  $(1, 1/2)$  schneiden. Allgemein schneiden sich in jedem Punkt mit

$$1 < x < 2t \quad (6.160)$$

genau drei Charakteristiken. Das ist typisch für den einfachsten Fall von Unstetigkeiten. Außerhalb dieses Gebietes ist die Lösung eindeutig, nämlich wegen Gl. (6.157)

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 1 \text{ und } t \geq x/2, \\ 1 - x_0 = \frac{1-x}{1-2t} & \text{für } x < 1 \text{ und } t < x/2, \\ 0 & \text{für } x \geq 1 \text{ und } t < x/2. \end{cases} \quad (6.161)$$

Nun müssen wir noch die Lösung im Bereich mit sich schneidenden Charakteristiken finden. An jedem Punkt existieren im Prinzip drei mögliche Lösungen:  $u = 1$ ,  $u = (1-x)/(1-2t)$  und  $u = 0$ .

Um eine eindeutige Lösung zu erhalten, benötigen wir *zusätzliche* Informationen. Wir nehmen zum einen aus physikalischen Gründen an, dass  $u(x, t)$  für jedes  $t$  monoton mit  $x$  abfällt. Die zweite Lösung entspricht für  $t > 1/2$  einer mit  $x$  *anwachsenden* Funktion, die wir demnach ausschließen. Auch kann die Lösung nicht zwischen 0 und 1 hin und her springen. Es muss sich an einer Stelle ein Sprung von der linken Lösung  $u = 1$  auf die rechte Lösung  $u = 0$  befinden. Wir müssen noch die Lage dieser Unstetigkeit bestimmen.

Wir stellen die (zweite) natürliche Forderung, dass  $u(x, t)$  auch bei der Unstetigkeit die Kontinuitätsgleichung

$$u_t + (u^2)_x = 0 \quad (6.162)$$

erfüllt, die ja äquivalent zur ursprünglichen PDG ist. Die Unstetigkeit liege bei  $x = X(t)$ . Die linke Lösung ist  $u = 1$ , die rechte  $u = 0$ . Der Ansatz für die unstetige Lösung ist also

$$u(x, t) = \Theta[X(t) - x] \quad (6.163)$$

mit der Sprungfunktion  $\Theta(x)$ . Einsetzen in die Kontinuitätsgleichung ergibt

$$\delta(X - x) X' - \delta(X - x) = (X' - 1) \delta(X - x) = 0. \quad (6.164)$$

Für  $x \neq X(t)$  ist diese Gleichung immer erfüllt, für  $x = X(t)$  folgt jedoch

$$X'(t) = 1, \quad (6.165)$$

d.h. die Schockwelle bewegt sich mit der Geschwindigkeit 1 vorwärts. Da sie den Punkt  $(1, 1/2)$  enthalten muss, ist ihr Ort

$$X(t) = t + \frac{1}{2}. \quad (6.166)$$

Insgesamt erhalten wir die Lösung

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq x/2 \text{ und } t > x - 1/2, \\ 1 - x_0 = \frac{1-x}{1-2t} & \text{für } x < 1 \text{ und } t < x/2, \\ 0 & \text{für } x \geq 1 \text{ und } t < x - 1/2. \end{cases} \quad (6.167)$$

Für kompliziertere Probleme muss die Lösung auf beiden Seiten der Schockwelle nicht konstant sein, auch muss ihre Geschwindigkeit zeitlich nicht konstant sein.



## 7 Störungstheorie

Sehr oft haben wir es in der Physik mit Problemen zu tun, in denen eine Größe viel kleiner ist als eine andere. Zum Beispiel treffen wir in der Quantenmechanik auf Systeme, die von einem Hamiltonian  $H = H_0 + H_1$  beschrieben werden, wobei  $H_1$  in einem gewissen Sinne klein ist. In solchen Fällen verwenden wir die Methoden der *Störungstheorie*. Die Kenntnis der Störungstheorie für die Schrödinger-Gleichung läßt vermuten, dass auch allgemein PDG's, die einen kleinen Parameter enthalten, mittels einer ähnlichen Störungstheorie näherungsweise gelöst werden können. Das ist in der Tat der Fall. Die Störungstheorie kann darüberhinaus in manchen Fällen zu einer nützlichen Reihenentwicklung der Lösung führen.

### 7.1 Kleine Störungen der Gleichung

Wir beginnen mit dem Fall einer kleinen Störung in der Gleichung selbst, nicht in den Randbedingungen. Gegeben sei eine PDG<sup>1</sup>

$$F[u] = 0 \quad (7.1)$$

für  $u(x_1, x_2, \dots)$  mit geeigneten Randbedingungen. In  $F[u]$  und/oder in den Randbedingungen soll ein Parameter  $\epsilon$  auftauchen. Oft führt man von Hand einen solchen Parameter ein und setzt ihn am Ende auf eins. Die Methode der Störungsrechnung besteht nun aus folgenden Schritten:

1. Entwickle  $u$  formal nach kleinen  $\epsilon$  in eine *Störungsreihe*,

$$u = u^{(0)} + \epsilon u^{(1)} + \epsilon^2 u^{(2)} + \dots + \epsilon^n u^{(n)} + \dots, \quad (7.2)$$

wobei die  $u^{(n)}$  Funktionen der unabhängigen Variablen sind.

2. Setze die Entwicklung von  $u$  in  $F[u] = 0$  und in die Randbedingungen ein und sortiere nach Ordnungen von  $\epsilon$ .
3. Da die resultierende Gleichung für *alle* hinreichend kleinen  $\epsilon$  gelten soll, folgt, dass alle Koeffizienten von  $\epsilon^n$  *einzelnen* verschwinden müssen. Schreibe die entsprechenden Gleichungen aus.
4. Löse diese Gleichungen iterativ, angefangen mit der Ordnung  $n = 0$ .

Offenbar ist das Verfahren nur nützlich, wenn die im letzten Schritt zu lösenden Gleichungen *einfacher* sind als das ursprüngliche Problem. Ein häufig anzutreffender Fall ist der, dass die Störung die PDG *nichtlinear* macht. Dann sind die PDG's für die einzelnen Ordnungen  $u^{(n)}$  linear und somit meist einfacher zu lösen.

Wir erläutern die Methode an einem Beispiel:  $u$  erfülle die PDG

$$\nabla^2 u + \epsilon u_r u_\phi = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\phi\phi} + \epsilon u_r u_\phi = 0 \quad (7.3)$$

in ebenen Polarkoordinaten  $r, \phi$  mit der Randbedingung

$$u(r = 1, \phi) = \cos \phi. \quad (7.4)$$

Also erfüllt  $u$  „beinahe“ die Laplace-Gleichung. Beachte, dass die Gleichung von zweiter Ordnung und die Störung *nichtlinear* ist – wir haben keine Methode zur Verfügung, diese Gleichung *exakt* zu lösen.

1. Sei

$$u = u^{(0)} + \epsilon u^{(1)} + \dots \quad (7.5)$$

2. Einsetzen in die PDG ergibt

$$\nabla^2 u^{(0)} + \epsilon \nabla^2 u^{(1)} + \epsilon^2 \nabla^2 u^{(2)} + \dots + \epsilon u_r^{(0)} u_\phi^{(0)} + \epsilon^2 u_r^{(0)} u_\phi^{(1)} + \epsilon^2 u_r^{(1)} u_\phi^{(0)} + \dots = 0 \quad (7.6)$$

und für die Randbedingungen

$$u^{(0)}(1, \phi) + \epsilon u^{(1)}(1, \phi) + \dots = \cos \phi. \quad (7.7)$$

---

<sup>1</sup> $F$  ist hier ein beliebiger *Differentialoperator*, d.h.  $F[u]$  enthält  $u$ , die unabhängigen Variablen und Ableitungen von  $u$  nach diesen bis zu einer endlichen Ordnung.

3. Koeffizientenvergleich liefert

$$\nabla^2 u^{(0)} = 0, \quad (7.8)$$

$$\nabla^2 u^{(1)} + u_r^{(0)} u_\phi^{(0)} = 0, \quad (7.9)$$

$$\nabla^2 u^{(2)} + u_r^{(0)} u_\phi^{(1)} + u_r^{(1)} u_\phi^{(0)} = 0 \quad (7.10)$$

usw., jeweils mit der Randbedingung

$$u^{(0)}(1, \phi) = \cos \phi, \quad (7.11)$$

$$u^{(1)}(1, \phi) = 0 \quad (7.12)$$

usw.

4. Die Lösung zur Ordnung  $n = 0$  ist die harmonische Funktion, die die vorgegebene Randbedingung erfüllt, dies ist

$$u^{(0)} = r \cos \phi, \quad (7.13)$$

wie man durch Einsetzen beweist. Man kommt auf diese Lösung z.B. mittels Separationsansatz oder indem man erkennt, dass  $u^{(0)} = \operatorname{Re} r e^{i\phi}$  ist. Damit lautet die Gleichung für  $n = 1$ :

$$\nabla^2 u^{(1)} + \cos \phi (-r \sin \phi) = \nabla^2 u^{(1)} - r \cos \phi \sin \phi = \nabla^2 u^{(1)} - \frac{r}{2} \sin 2\phi = 0. \quad (7.14)$$

Ihre Lösung ist

$$u^{(1)} = \frac{r^3 - r^2}{10} \sin 2\phi \quad (7.15)$$

(ausprobieren!). Daraus erhalten wir die explizite Gleichung für  $n = 2$ , deren Lösung lautet

$$u^{(2)} = -\frac{1}{300} \left( \frac{r^7}{11} - \frac{r^6}{4} + \frac{2r^5}{9} - \frac{25r^4}{396} \right) \sin 4\phi + \frac{r^5 - r}{480} \cos \phi + \left( -\frac{r^5}{64} + \frac{r^4}{35} - \frac{87r^3}{6720} \right) \cos 3\phi. \quad (7.16)$$

Wie man sieht, werden die Terme in der Störungsreihe schnell komplizierter. Bis zur ersten Ordnung erhalten wir die Lösung

$$u(r, \phi) = r \cos \phi + \epsilon \frac{r^3 - r^2}{10} \sin 2\phi + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (7.17)$$

Für welche Werte von  $\epsilon$  und wie schnell eine solche Störungsreihe konvergiert und wieviele Terme nötig sind, um bei gegebenem  $\epsilon$  eine gewisse Genauigkeit zu erzielen, hängt natürlich vom konkreten Problem ab. In unserem Beispiel sind alle Ordnungen der Lösung beschränkt und die Schranken der führenden Terme sind  $|u^{(0)}| \leq 1$  und  $|u^{(1)}| \leq 4/270$ . Falls sich der Trend fortsetzt (was er tut), so wäre sogar für  $\epsilon = 1$  eine schnelle Konvergenz zu erwarten und  $u \approx u^{(0)}$  eine recht gute Näherung mit einem Fehler von einigen Prozent.

Ein Kriterium für die Güte der Lösung ist, in welchem Maße die ursprüngliche PDG von der Näherungslösung verletzt wird. Um dies zu sehen, setzen wir  $u \approx \tilde{u} = u^{(0)} + \epsilon u^{(1)}$  in Gl. (7.3) ein. Wäre die Lösung exakt, müsste dies Null ergeben. Tatsächlich erhalten wir

$$\nabla^2 \tilde{u} + \epsilon \tilde{u}_r \tilde{u}_\phi = \frac{\epsilon^2 r^2 \cos \phi}{10} [2 - 3r + (-4 + 5r) \cos 2\phi] + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (7.18)$$

Dieser Fehler ist von der Ordnung  $\epsilon^2$ , weil wir die Lösung bis zur Ordnung  $\epsilon$  eingesetzt haben. Die typische Skala der Lösung ist 1, z.B. ist 1 die obere Schranke von  $|u^{(0)}|$ . Verglichen damit ist dieser Fehler klein, nämlich kleiner als  $\epsilon^2/10$ .

## 7.2 Störung des Randes

Mit der Methode aus dem letzten Abschnitt können wir kleine Störungen in der PDG selbst oder in den auf dem Rand vorgegebenen Werten behandeln. Manchmal trifft man aber auf Probleme, in denen die *Form* des Randes nur wenig von einer einfacheren Form, etwa einem Kreis, abweicht. Um solche Probleme geht es in diesem Abschnitt.

$u(\xi_1, \xi_2, \dots)$  möge einer gegebenen PDG gehorchen, wobei  $\xi_i$  Koordinaten sind, die i.A. krummlinig sein können. Der Rand des Definitionsgebietes sei durch

$$\xi_1 = \Xi(\xi_2, \dots) \quad (7.19)$$

definiert und die Randbedingung laute

$$u(\xi_1 = \Xi(\xi_2, \dots), \xi_2, \dots) = f(\xi_2, \dots), \quad (7.20)$$

wobei  $f$  eine vorgegebene Funktion ist.<sup>2</sup> Nun sei speziell  $\Xi(\xi_2, \dots)$  „fast konstant“ in dem Sinne, dass

$$\Xi(\xi_2, \dots) = 1 + \Delta\Xi(\xi_2, \dots) \quad (7.21)$$

(wir können durch Umskalierung immer erreichen, dass der erste Term eins ist) mit

$$\Delta\Xi \ll 1 \quad \text{für alle } (\xi_2, \dots) \quad (7.22)$$

gilt. Dann führen wir formal einen Parameter  $\epsilon$  ein, so dass

$$\Xi = 1 + \epsilon\Delta\Xi, \quad (7.23)$$

wobei wir am Ende  $\epsilon = 1$  setzen. Dann läßt sich die Randbedingung nach  $\epsilon$  in eine Taylor-Reihe entwickeln,

$$u(\Xi, \xi_2, \dots) = u(1, \xi_2, \dots) + \epsilon\Delta\Xi u_{\xi_1}(1, \xi_2, \dots) + \frac{1}{2}\epsilon^2\Delta\Xi^2 u_{\xi_1\xi_1}(1, \xi_2, \dots) + \dots = f(\xi_2, \dots). \quad (7.24)$$

Nun hat die Randbedingung aber eine Form, die wir mit der Störungsentwicklung aus dem letzten Abschnitt behandeln können. Wir entwickeln  $u$  ebenfalls nach  $\epsilon$ ,

$$u = u^{(0)} + \epsilon u^{(1)} + \epsilon^2 u^{(2)} + \dots \quad (7.25)$$

und verfahren wir oben. Wir sehen dann, dass die in jeder Ordnung zu lösenden PDG's Randbedingungen auf dem *einfachen* Rand  $\xi_1 = 1$  haben.

**Beispiel:** Wir suchen die Lösung der Laplace-Gleichung

$$\nabla^2 u = 0 \quad (7.26)$$

mit der Randbedingung

$$u(R + \epsilon \cos \phi, \phi) = \sin \phi, \quad (7.27)$$

die  $\epsilon$  schon enthält. Der Rand ist eine „Pascal'sche Schnecke“. Die Randbedingung schreiben wir als

$$u(R, \phi) + \epsilon \cos \phi u_r(R, \phi) + \frac{1}{2}\epsilon^2 \cos^2 \phi u_{rr}(R, \phi) + \dots \quad (7.28)$$

Einsetzen der Entwicklung von  $u$  in die Laplace-Gleichung ergibt natürlich einfach

$$\nabla^2 u^{(n)} = 0 \quad (7.29)$$

zu jeder Ordnung, da die PDG  $\epsilon$  gar nicht enthält. Die Komplikation kommt allein aus den Randbedingungen,

$$u^{(0)}(R, \phi) = \sin \phi, \quad (7.30)$$

$$u^{(1)}(R, \phi) + \cos \phi u_r^{(0)}(R, \phi) = 0, \quad (7.31)$$

$$u^{(2)}(R, \phi) + \cos \phi u_r^{(1)}(R, \phi) + \frac{1}{2}\cos^2 \phi u_{rr}^{(0)}(R, \phi) = 0 \quad (7.32)$$

usw. Hieraus können wir die  $u^{(n)}$  iterativ bestimmen. Z.B. per Separation erhalten wir

$$u^{(0)} = \frac{r}{R} \sin \phi \quad (7.33)$$

und damit als Randbedingung für  $u^{(1)}$ :

$$u^{(1)}(R, \phi) = -\cos \phi u_r^{(0)}(R, \phi) = -\frac{1}{2R} \sin 2\phi. \quad (7.34)$$

Die Lösung ist

$$u^{(1)} = -\frac{r^2}{2R^3} \sin 2\phi. \quad (7.35)$$

In diesem Fall können die Lösungen in allen Ordnungen prinzipiell bestimmt werden. Die Störungsreihe beginnt mit

$$u(r, \phi) = \frac{r}{R} \sin \phi - \epsilon \frac{r^2}{2R^3} \sin 2\phi + \epsilon^2 \left[ \frac{r^3}{2R^5} \sin 3\phi + \frac{r}{2R^3} \sin \phi \right] + \dots \quad (7.36)$$

---

<sup>2</sup>Wir betrachten hier Dirichlet-Randbedingungen, aber für andere Fälle lassen sich ähnliche Aussagen treffen.

### 7.3 Singuläre Störungstheorie: Grenzschicht-Methode

Wir diskutieren beispielhaft zwei Methoden, die anwendbar sind, wenn die bisher vorgestellte Störungstheorie versagt. Die bisherige Störungsrechnung ist nicht anwendbar, wenn die *höchste* Ableitung nach einer der Variablen nur in der Störung auftritt. Dies verdeutlicht ein Beispiel: Gesucht ist die Lösung der PDG

$$\epsilon(u_{xx} + u_{yy}) + u_x = y(1 - y^2) \quad \text{für } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \quad (7.37)$$

mit der Randbedingung

$$u = 0 \quad (7.38)$$

auf dem gesamten Rand. Es sei  $\epsilon > 0$ . Wir versuchen eine Störungsentwicklung

$$u = u^{(0)} + \epsilon u^{(1)} + \epsilon^2 u^{(2)} + \dots \quad (7.39)$$

Die Gleichung in der Ordnung  $n = 0$  lautet

$$u_x^{(0)} = y(1 - y^2). \quad (7.40)$$

Es handelt sich de facto um eine gewöhnliche Differentialgleichung, in der  $y$  nur als Parameter auftritt. Die allgemeine Lösung ist

$$u^{(0)}(x, y) = xy(1 - y^2) + f(y) \quad (7.41)$$

mit einer beliebigen Funktion  $f(y)$ . Die Randbedingungen erfordern

$$\begin{aligned} u^{(0)}(x, 0) &= f(0) = 0, \\ u^{(0)}(x, 1) &= f(1) = 0, \\ u^{(0)}(0, y) &= f(y) = 0, \\ u^{(0)}(1, y) &= y(1 - y^2) + f(y) = 0. \end{aligned} \quad (7.42)$$

Die letzten beiden Bedingungen sind jedoch unvereinbar. Also finden wir keine Lösung zur Ordnung  $n = 0$  und die Störungsrechnung versagt schon an dieser Stelle.

Andererseits würden wir erwarten, dass für kleine  $\epsilon$  die exakte Lösung im *größten Teil* des Gebietes durch  $u^{(0)}$  mit geeignetem  $f(y)$  gut angenähert wird. Wir setzen daher

$$u(x, y) = u^{(0)}(x, y) + p(x, y, \epsilon), \quad (7.43)$$

wobei  $u^{(0)}$  die Gleichung nullter Ordnung,

$$u_x^{(0)} = y(1 - y^2) \quad (7.44)$$

erfüllt, aber nur die Randbedingungen

$$u^{(0)}(x, 0) = u^{(0)}(x, 1) = 0. \quad (7.45)$$

Wie oben gezeigt können wir nicht hoffen, ein  $u^{(0)}$  zu finden, das *alle* Randbedingungen erfüllt. Die Lösung ist dann

$$u^{(0)}(x, y) = xy(1 - y^2) + f(y) \quad (7.46)$$

mit  $f(0) = f(1) = 0$ . Die Funktion  $p(x, y, \epsilon)$  soll so gewählt werden, dass die von  $u^{(0)}$  verletzten Randbedingungen von  $u$  „möglichst gut“ erfüllt werden. Einsetzen von  $u = u^{(0)} + p$  in die ursprüngliche PDG ergibt

$$\epsilon \nabla^2 u^{(0)} + \epsilon \nabla^2 p + u_x^{(0)} + p_x = y(1 - y^2), \quad (7.47)$$

also mit Gleichungen (7.44) und (7.46),

$$\epsilon \nabla^2 [xy(1 - y^2) + f(y)] + \epsilon \nabla^2 p + p_x = 0, \quad (7.48)$$

$$\Rightarrow \epsilon(-6xy + f_{yy}) + \epsilon \nabla^2 p + p_x = 0. \quad (7.49)$$

Wir substituieren  $x = \epsilon \xi$  und erhalten

$$\epsilon(-6xy + f_{yy}) + \epsilon^{-1} p_{\xi\xi} + \epsilon p_{yy} + \epsilon^{-1} p_\xi = 0 \quad (7.50)$$

also

$$\epsilon^2(-6xy + f_{yy}) + p_{\xi\xi} + \epsilon^2 p_{yy} + p_\xi = 0. \quad (7.51)$$

Wir beschränken uns hier auf eine Näherung bis zur Ordnung  $\epsilon$  und vernachlässigen daher die Terme in  $\epsilon^2$  (dies ist keine kontrollierte Näherung, da wir vorher  $x$  mit  $\epsilon$  skaliert haben). Die resultierende, einfache Gleichung lautet

$$p_{\xi\xi} + p_{\xi} = 0 \quad (7.52)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$p(\xi, y) = g(y) e^{-\xi} + h(y) \quad (7.53)$$

mit beliebigen Funktionen  $g, h$ . Die gesamte Näherungslösung ist dann

$$u(x, y) \cong xy(1 - y^2) + f(y) + g(y) e^{-x/\epsilon}. \quad (7.54)$$

Hier haben wir  $h(y)$  o.B.d.A. fort gelassen, da es in  $f(y)$  absorbiert werden kann. Die Randbedingung

$$u(0, y) = 0 \quad (7.55)$$

erfordert nun

$$f(y) + g(y) = 0 \quad (7.56)$$

und die Randbedingung

$$u(1, y) = 0 \quad (7.57)$$

erfordert

$$y(1 - y^2) + f(y) + g(y) e^{-1/\epsilon} = y(1 - y^2) + f(y)(1 - e^{-1/\epsilon}) = 0, \quad (7.58)$$

also

$$f(y) = -g(y) = -\frac{y(1 - y^2)}{1 - e^{-1/\epsilon}}. \quad (7.59)$$

Da die Rechnung jedoch nur bis zur ersten Ordnung in  $\epsilon$  galt, müssen wir dieses Ergebnis ebenfalls bis zur ersten Ordnung entwickeln, um konsistent zu sein (höhere Potenzen in der Lösung hätten keine sinnvolle Bedeutung). Dann erhalten wir

$$f(y) = -g(y) \cong -y(1 - y^2), \quad (7.60)$$

hier sogar bis zu jeder endlichen Ordnung in  $\epsilon$ . Eingesetzt in die Lösung erhalten wir

$$u(x, y) \cong xy(1 - y^2) - y(1 - y^2) + y(1 - y^2) e^{-x/\epsilon} = y(1 - y^2)(x - 1 + e^{-x/\epsilon}). \quad (7.61)$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese Näherung in der PDG einen Fehler der Ordnung  $\epsilon$  erzeugt (wie allerdings auch schon  $u^{(0)}$ ), aber die Randbedingungen bis auf einen exponentiell kleinen Fehler der Form  $e^{-1/\epsilon}$  erfüllt.

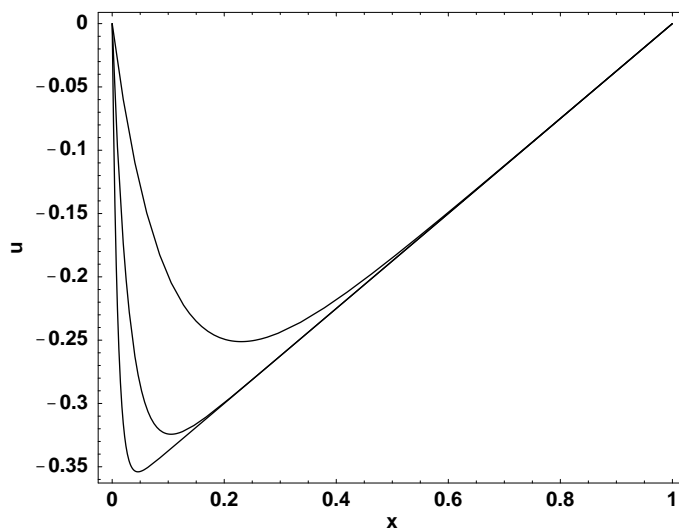


Abbildung 19: Näherungslösung  $u(x, y = 1/2)$  des im Text beschriebenen singulären Problems für  $\epsilon = 1/100$  (steilste Kurve bei  $x \approx 0$ ),  $3/100$ ,  $1/10$ . Beachte die Grenzschicht bei  $x \approx 0$ .

Abbildung 19 zeigt die Näherungslösung speziell für  $y = 1/2$ . Man erkennt, dass sich  $u$  in der Nähe von  $x = 0$  sehr schnell ändert. Dies liegt an der Exponentialfunktion, die nur für  $x \lesssim \epsilon$  wesentlich von

Null verschieden ist, bei  $x = 0$  aber den Wert eins annimmt. Diesen Bereich schneller Änderung nennt man *Grenzschicht*.

Dieses Beispiel ist ein Spezialfall des folgenden allgemeinen Verfahrens, der *Grenzschicht-Methode*: Eine PDG für eine Funktion  $u$  sei vorgegeben, in der eine der höchsten Ableitungen linear mit einem Koeffizienten  $\epsilon$  eingeht.

1. Bestimme die Lösung  $h$  der PDG mit  $\epsilon = 0$  gesetzt.
2. Führe für jeden Rand des Definitionsbereichs folgende Schritte aus:

(a) Setze

$$u = h + p, \tag{7.62}$$

wobei  $p$  nur in der Nähe des Randes wesentlich von Null verschieden sein soll.

(b) Setze  $u = h + p$  in die PDG ein, erhalte PDG für  $p$ .

(c) Die Koordinate senkrecht zum Rand sei  $x$ . Substituiere

$$x = \xi \epsilon^\nu \tag{7.63}$$

mit einem noch unbekanntem Koeffizienten  $\nu > 0$ .

(d) Wähle  $\nu$  so, dass die PDG für  $p$  in der führenden Ordnung in  $\epsilon$  einfach wird *und* eine schnell abfallende Lösung hat, die die Randbedingung am betrachteten Rand erfüllt.

(e) Existiert *keine* solche Lösung, setze  $p = 0$  (*keine* Grenzschicht an diesem Rand!).

Die resultierende Näherung für  $u$  ist  $h$  plus die Summe der Funktionen  $p$  von allen Rändern.

## 7.4 WKB-Näherung

Die Wellengleichung

$$v_{tt} = c^2 \nabla^2 v, \tag{7.64}$$

hier im zweidimensionalen Raum, hat viele in der Zeit periodische Lösungen unterschiedlicher Gestalt, wie man leicht einsieht. Zunächst ist ein nützlich

$$v = \operatorname{Re} u \tag{7.65}$$

anzusetzen, wobei  $u$  ebenfalls die Wellengleichung erfüllt, aber komplex ist. Die Eigenmoden der Gleichung erhält man durch Separation oder, in diesem Fall, durch Fourier-Transformation nach der Zeit, was auf die *Helmholtz-Gleichung*

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad \text{mit } k := \frac{\omega}{c} \tag{7.66}$$

führt. Die Eigenmoden zur Eigenfrequenz  $\omega$  sind dann

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \tag{7.67}$$

wobei  $|\mathbf{k}| = k$  ist. Offenbar existiert eine *ganze Mannigfaltigkeit* von Eigenmoden zur Frequenz  $\omega$ , hier parametrisiert durch den Polarwinkel  $\phi$  von  $\mathbf{k}$ . Aber bekanntlich sind auch alle Linearkombinationen von Eigenmoden zu demselben Eigenwert Eigenmoden zu eben demselben Eigenwert. Da es überabzählbar viele Eigenmoden gibt, nimmt die Linearkombination die Form einer Integration an.

Wir wollen nun allgemeine Eigenmoden untersuchen und drücken sie durch Amplitude und Phase aus:

$$u(x, y) = \alpha(x, y) e^{ik\beta(x, y)}, \tag{7.68}$$

wobei die Funktionen  $\alpha$  und  $\beta$  auch parametrisch von  $k$  abhängen. Die entsprechende reelle Lösung der Wellengleichung ist dann

$$v = \alpha \cos(k\beta + \omega t). \tag{7.69}$$

Einsetzen von  $u$  in die Helmholtz-Gleichung ergibt

$$k^2 (1 - \beta_x^2 - \beta_y^2) \alpha + ik (\alpha \nabla^2 \beta + 2\alpha_x \beta_x + 2\alpha_y \beta_y) + \nabla^2 \alpha = 0. \tag{7.70}$$

Wir führen nun eine Näherung für *große*  $k$  ein. Damit ist gemeint, dass die einheitenlose Größe  $kl \gg 1$  ist, wobei  $l$  eine typische Längenskala ist, auf der wir ein System beschreiben wollen. Mit anderen Worten, die Näherung gilt im *Fernfeld*, für  $l/\lambda \gg 1$ , wobei  $\lambda$  die Wellenlänge ist.

In dieser Näherung ist der dominante Term der Gleichung der Term in  $k^2$ . In führender Ordnung ist also

$$\beta_x^2 + \beta_y^2 \cong 1. \quad (7.71)$$

Dies ist eine *Eikonal-Gleichung*, vgl. Abschnitt 6.4. Die Charakteristiken oder Strahlen dieser Gleichung sind Geraden, da die charakteristischen Gleichungen

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d^2y}{ds^2} = 0 \quad (7.72)$$

lauten. Die Kurven konstanter Phase  $\beta = \text{const}$  stehen senkrecht auf diesen Geraden. Der zweitwichtigste Term in Gl. (7.70) ist der lineare in  $k$ , wir fordern, dass dieser ebenfalls verschwindet,

$$\alpha \nabla^2 \beta + 2(\alpha_x \beta_x + \alpha_y \beta_y) = \alpha \nabla^2 \beta + 2(\nabla \alpha) \cdot (\nabla \beta) = 0, \quad (7.73)$$

und bestimmen daraus  $\alpha(x, y)$ . Der Gradient  $\nabla \beta$  steht aber senkrecht auf den Flächen  $\beta = \text{const}$ , zeigt also entlang der Strahlen, und hat wegen Gl. (7.71) die Länge 1. Gleichung (7.73) beschreibt also bei bekanntem  $\beta(x, y)$  die Änderung von  $\alpha$  entlang der Strahlen. Bestimmen wir  $\alpha$  und  $\beta$  auf diese Weise machen wir einen Fehler durch Vernachlässigung des Terms  $\nabla^2 \alpha$  in Gl. (7.70), der für große  $k$  klein ist.

Diese Näherungsmethode heißt *WKB-Näherung* nach Wenzel, Kramers und Brillouin. Sie wird in der Quantenmechanik als semiklassische Näherung verwendet.

Als **Beispiel** betrachten wir auslaufende Kreiswellen (also sind die Kurven  $\beta = \text{const}$  Kreise). Der Mittelpunkt der Kreiswellen sei der Ursprung. Dann sind die Strahlen alle Ursprungsgeraden. Dann ist

$$\beta(x, y) = \beta_0 + \sqrt{x^2 + y^2} \quad (7.74)$$

(einsetzen!), wobei wir die konstante Phase  $\beta_0$  gleich vernachlässigen. Damit lautet die Gleichung für  $\alpha$

$$\begin{aligned} \alpha \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right) + 2\alpha_x \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2\alpha_y \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ = \alpha \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2\alpha_x \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2\alpha_y \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0, \end{aligned} \quad (7.75)$$

also

$$\alpha + 2x\alpha_x + 2y\alpha_y = 0. \quad (7.76)$$

In Polarkoordinaten ist dies einfach

$$\alpha + 2r\alpha_r = 0, \quad (7.77)$$

also de facto eine gewöhnliche Differentialgleichung. Nehmen wir an, die Amplitude  $\alpha$  sei auf dem Kreis mit dem Radius  $R$  vorgegeben. Dann ist die Lösung für  $\alpha$

$$\alpha(r, \phi) = \alpha(R, \phi) \sqrt{\frac{R}{r}} \quad (7.78)$$

und insgesamt lautet die WKB-Näherungslösung

$$u \cong \alpha(R, \phi) \sqrt{\frac{R}{r}} e^{ikr}. \quad (7.79)$$

Allgemeiner und formaler erhält man eine *WKB-Entwicklung* auf folgende Weise: Wir schreiben zunächst die Amplitude als  $\alpha = e^{\ln \alpha}$  und absorbieren sie als Imaginärteil in  $\beta$ :

$$u(x, y) = e^{ik\beta(x, y)}. \quad (7.80)$$

Die WKB-Näherung besteht nun darin,  $\beta$  für große  $k$ , d.h. kleine  $1/k$ , zu entwickeln und die Entwicklung an geeigneter Stelle abzubrechen. Wir schreiben daher

$$u(x, y) = \exp \left( ik \left[ \beta^{(0)} + \frac{1}{ik} \beta^{(1)} + \left( \frac{1}{ik} \right)^2 \beta^{(2)} + \dots \right] \right). \quad (7.81)$$

Einsetzen in die Helmholtz-Gleichung (7.66) und Sortieren nach Ordnungen in  $k$  ergibt die Hierarchie von Gleichungen

$$(\beta_x^{(0)})^2 + (\beta_y^{(0)})^2 = 1, \quad (7.82)$$

$$2\beta_x^{(0)} \beta_x^{(1)} + 2\beta_y^{(0)} \beta_y^{(1)} + \nabla^2 \beta^{(0)} = 0, \quad (7.83)$$

$$2\beta_x^{(0)} \beta_x^{(2)} + 2\beta_y^{(0)} \beta_y^{(2)} + (\beta_x^{(1)})^2 + (\beta_y^{(1)})^2 + \nabla^2 \beta^{(1)} = 0, \quad (7.84)$$

$$\dots \quad (7.85)$$

Diese Gleichungen können wieder iterativ gelöst werden.

## 8 Green-Funktionen

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, wie die Lösung von diversen linearen PDG's als Faltung einer die Randbedingungen/Anfangsbedingungen oder die Inhomogenität in der Gleichung beschreibenden Funktion und einer davon unabhängigen Funktion ausgedrückt werden kann. Die zweite Funktion nennt man dann *Green-Funktion* oder Green'sche Funktion. Wir beginnen mit einer Wiederholung der Green'schen Integralsätze.

### 8.1 Die Greenschen Sätze

Der Gauß'sche Satz lautet in  $n$  Dimensionen

$$\int_V d^n r \nabla \cdot \mathbf{A} = \int_{\partial V} ds \cdot \mathbf{A}. \quad (8.1)$$

Hier ist  $V$  ein  $n$ -dimensionales endliches Volumen mit dem Rand  $\partial V$ ,  $d^n r$  ein Volumenelement und  $ds = ds \hat{\mathbf{n}}$  ein Oberflächenelement;  $\hat{\mathbf{n}}$  ist der (auswärts gerichtete) Normaleneinheitsvektor.

Nun wählen wir im Gauß'schen Satz speziell

$$\mathbf{A} = \phi \nabla \psi \quad (8.2)$$

mit zwei skalaren Feldern  $\phi$  und  $\psi$ . Einsetzen ergibt die *Erste Green'sche Formel*

$$\int_V d^n r \phi \nabla^2 \psi + \int_V d^n r (\nabla \phi) \cdot \nabla \psi = \int_{\partial V} ds \phi \frac{\partial \psi}{\partial n}. \quad (8.3)$$

Schreiben wir dieselbe Gleichung auch für  $\mathbf{A} = \psi \nabla \phi$  auf und ziehen die beiden Gleichungen voneinander ab, so erhalten wir die *Zweite Green'sche Formel*

$$\int_V d^n r (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) = \int_{\partial V} ds \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right). \quad (8.4)$$

Diese Formel gilt natürlich für alle möglichen zweimal stetig differenzierbaren Funktionen  $\phi$  und  $\psi$ .

Eine nützliche Anwendung dieser Identität erhalten wir in  $n = 3$  Dimensionen für die spezielle Wahl

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| + \epsilon}, \quad (8.5)$$

wobei  $\mathbf{r}'$  ein *fester* Punkt in  $V$  ist und  $\epsilon > 0$ . Es sei

$$\Delta r := |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (8.6)$$

der Abstand der Punkte  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{r}'$ . Dann ist

$$\nabla^2 \frac{1}{\Delta r + \epsilon} = -\frac{2\epsilon}{\Delta r (\Delta r + \epsilon)^3}. \quad (8.7)$$

Diese Funktion hat eine besondere Form: Beachte, dass

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{-2\epsilon}{\Delta r (\Delta r + \epsilon)^3} = 0 \quad \text{für } \Delta r > 0 \quad (8.8)$$

und

$$\int_V d^3 r \frac{-2\epsilon}{\Delta r (\Delta r + \epsilon)^3} = 4\pi \int_0^\infty d\Delta r (\Delta r)^2 \frac{-2\epsilon}{\Delta r (\Delta r + \epsilon)^3} = -4\pi. \quad (8.9)$$

Man sieht, dass die Funktion für  $\epsilon \rightarrow 0$  bis auf den Faktor  $-4\pi$  die Delta-Funktion darstellt:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{-2\epsilon}{\Delta r (\Delta r + \epsilon)^3} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (8.10)$$

In diesem Sinne gilt

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (8.11)$$

wobei diese Identität formal nur unter einem Integral sinnvoll ist.

Die zweite Green'sche Formel lautet dann ( $n = 3$ )

$$\int_V d^3 r \left( -\frac{2\epsilon \phi}{\Delta r (\Delta r + \epsilon)^3} - \frac{\nabla^2 \phi}{\Delta r + \epsilon} \right) = \int_{\partial V} ds \left( \phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{\Delta r + \epsilon} - \frac{1}{\Delta r + \epsilon} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \quad (8.12)$$



und für  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$-4\pi\phi(\mathbf{r}') - \int_V d^3r \frac{\nabla^2\phi}{\Delta r} = \int_{\partial V} ds \left( \phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{\Delta r} - \frac{1}{\Delta r} \frac{\partial\phi}{\partial n} \right) \quad (8.13)$$

oder

$$4\pi\phi(\mathbf{r}') = \int_{\partial V} ds \left( \frac{1}{\Delta r} \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{\Delta r} \right) - \int_V d^3r \frac{\nabla^2\phi}{\Delta r}. \quad (8.14)$$

Dies ist die *Dritte Green'sche Formel*. Das Volumenintegral ist trotz des Pols  $1/\Delta r$  wohldefiniert, wie man erkennt, wenn man für  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  Polarkoordinaten einführt.

Wir wollen das Ergebnis interpretieren: Kennen wir  $\nabla^2\phi$  im Inneren und  $\phi$  selbst sowie die Normalenableitung  $\partial\phi/\partial n$  auf dem Rand, so können wir  $\phi$  im Prinzip *überall* im Inneren bestimmen. Insbesondere gilt für harmonische Funktionen

$$\nabla^2\phi = 0 \quad (8.15)$$

und daher

$$4\pi\phi(\mathbf{r}') = \int_{\partial V} ds \left( \frac{1}{\Delta r} \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{\Delta r} \right). \quad (8.16)$$

Also ist  $\phi$  *allein* durch Cauchy-Daten auf dem Rand überall bestimmt. Dies ist noch nicht ganz befriedigend, weil wir aus der Erfahrung vermuten, dass  $\phi$  schon durch Dirichlet- oder Neumann-Randbedingungen eindeutig bestimmt sein sollte.<sup>1</sup>

In  $n = 2$  Dimensionen erhält man analog für die Wahl

$$\psi(\mathbf{r}) = \ln(\Delta r + \epsilon) \quad (8.17)$$

die Identität

$$2\pi\phi(\mathbf{r}') = \int_{\partial A} dl \left[ \ln\left(\frac{1}{\Delta r}\right) \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \ln\left(\frac{1}{\Delta r}\right) \right] - \int_A d^2r \ln\left(\frac{1}{\Delta r}\right) \nabla^2\phi, \quad (8.18)$$

wobei  $A$  eine endliche Fläche und  $dl$  ein Linienelement ihrer Randkurve  $\partial A$  ist.

## 8.2 Green-Funktionen für die Poisson-Gleichung

Wir wollen nun eine bessere Wahl für  $\psi$  in den Green'schen Formeln treffen, so dass sich der Ausdruck für  $\phi(\mathbf{r}')$  vereinfacht. In  $n = 3$  Dimensionen sei  $p(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  eine harmonische Funktion von  $\mathbf{r}$ ,

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0. \quad (8.19)$$

Sei außerdem die *Green-Funktion*

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') := -\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + p(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (8.20)$$

Dann ist

$$\nabla^2 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (8.21)$$

Nun wählen wir  $\psi = g$  in der zweiten Green'schen Formel (8.4) und erhalten analog

$$4\pi\phi(\mathbf{r}') = \int_{\partial V} ds \left( \phi \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial\phi}{\partial n} \right) + \int_V d^3r g \nabla^2\phi \quad (8.22)$$

Bisher war  $p$  eine *beliebige* harmonische Funktion von  $\mathbf{r}$  mit Parametern  $\mathbf{r}'$ . Nun wählen wir  $p$  so, dass sich die Gleichung vereinfacht.

*1. Fall: Dirichlet-Randbedingungen.* Sei  $p$  die harmonische Funktion auf  $V$ , die die Randbedingungen

$$p(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad \text{für } \mathbf{r} \in \partial V \quad (8.23)$$

erfüllt. Wir hatten bereits gezeigt, dass die Lösung eindeutig ist. Dann folgt

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad \text{für } \mathbf{r} \in \partial V \quad (8.24)$$

und damit

$$4\pi\phi(\mathbf{r}') = \int_{\partial V} ds \phi \frac{\partial g}{\partial n} + \int_V d^3r g \nabla^2\phi. \quad (8.25)$$

<sup>1</sup>Im Fall von Neumann-Randbedingungen natürlich nur bis auf eine additive Konstante.

Haben wir *einmal*  $p$  bzw. die Green-Funktion  $g$  bestimmt, so können wir die Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 \phi = \rho(\mathbf{r}) \quad \text{auf } V, \quad (8.26)$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) \quad \text{auf } \partial V \quad (8.27)$$

für *beliebige* Funktionen  $\rho, \Phi$  lösen.

Die Green-Funktion  $g = -1/\Delta r + p$  läßt sich auch direkt als Lösung des folgenden Problems bestimmen:

$$\nabla^2 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \text{für } \mathbf{r} \in V, \quad (8.28)$$

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad \text{für } \mathbf{r} \in \partial V. \quad (8.29)$$

*Wichtig:*  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  ist die Lösung der ursprünglichen PDG mit der Inhomogenität ersetzt durch  $4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ . Das ist aber eine bekannte Art von Problem aus der Elektrostatik:  $g$  ist das Potential bei  $\mathbf{r}$  einer Punktladung bei  $\mathbf{r}'$  in Anwesenheit einer geerdeten Oberfläche  $\partial V$ . Für ein Volumen von komplizierter Form wird  $g$  i.A. nicht leicht zu bestimmen sein, aber für einfache Formen sind die Green-Funktionen nicht schwierig zu ermitteln.

**Beispiel 1:** Wir suchen die Green-Funktion  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  für den Außenraum einer Kugel mit Radius  $R$ . Nach der Analogie mit der Elektrostatik suchen wir das Potential einer Punktladung bei  $\mathbf{r}'$  vor einer geerdeten Kugel. Eine nützliche Lösungsmethode ist die *Methode der Spiegelladungen*:

Wir versuchen,  $g$  als Überlagerung von Coulomb-Potentialen von zwei Punktladungen zu schreiben. Die Beziehung  $g = -1/\Delta r + p$  legt den folgenden Ansatz nahe:

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|}. \quad (8.30)$$

Durch Probieren erhält man die Lösung

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{R}{r' |\mathbf{r} - R^2 \mathbf{r}' / (r')^2|}. \quad (8.31)$$

Die Spiegelladung liegt im Inneren der Kugel, was auch so sein muss, damit Gl. (8.28) überall im Außenraum erfüllt ist. Damit können wir nun die Lösung *jeder* Poisson-Gleichung im Außenraum einer Kugel mit beliebigen Dirichlet-Randbedingungen zumindest als explizites Integral hinschreiben. Für den Innenraum einer Kugel erhält man formal dieselbe Green-Funktion; jetzt liegt  $\mathbf{r}'$  im Inneren und die Spiegelladung im Außenraum. Weitere Beispiele dieser Art finden sich in Elektrodynamik-Lehrbüchern.

**Beispiel 2:** Poisson-Gleichung im freien Raum. Wir suchen die Lösung von

$$\nabla^2 u = \rho(\mathbf{r}) \quad \text{für } -\infty < x, y, z < \infty. \quad (8.32)$$

Diese Aufgabenstellung ist noch nicht eindeutig. Wir fordern zusätzlich, dass  $u$  für  $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$  verschwindet. Diese Forderung interpretieren wir wie folgt: Wir betrachten die Gleichung auf einer Kugel mit Radius  $R$  und mit der Randbedingung  $u(\mathbf{r}) = 0$  auf der Kugel, und lassen  $R \rightarrow \infty$  gehen. Die harmonische Funktion  $p$  muss die Randbedingung

$$p(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (8.33)$$

für  $\mathbf{r}$  auf der Kugel und  $\mathbf{r}'$  in ihrem Inneren erfüllen. Für einen festen Punkt  $\mathbf{r}'$  und  $R \rightarrow \infty$  geht die Randbedingung gegen

$$p(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0. \quad (8.34)$$

Wie wir gezeigt haben, ist die einzige harmonische Funktion, die dies erfüllt,  $p \equiv 0$ . Damit ist

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (8.35)$$

die Green-Funktion für die Poisson-Gleichung im freien Raum. Die Lösung für gegebene Inhomogenität  $\rho$  lautet daher

$$u(\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \int d^3 r \frac{\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (8.36)$$

Probe:

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r}), \quad (8.37)$$

wobei wir Gl. (8.11) verwendet haben.

Wir zeigen noch folgenden wichtigen **Satz**: Sei  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  die Green-Funktion für ein Dirichlet-Problem. Dann ist  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = g(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ .

Beweis: Setzen wir in der zweiten Green'schen Formel  $\phi(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  und  $\psi(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')$ , so folgt

$$4\pi \int_V d^3r [g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] = 0, \quad (8.38)$$

also

$$4\pi [g(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') - g(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')] = 0. \quad (8.39)$$

2. Fall: *Neumann-Randbedingungen*. Wir wählen  $p$  als die harmonische Funktion, die die Randbedingung

$$\frac{\partial p(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + K \quad (8.40)$$

erfüllt, wobei die Konstante  $K$  so zu wählen ist, dass die Konsistenzbedingung für Neumann-Randbedingungen erfüllt ist, d.h.

$$\int_{\partial V} ds \left( \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + K \right) = 0. \quad (8.41)$$

Die Green-Funktion sei wieder

$$h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') := -\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + p(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (8.42)$$

Einsetzen in die zweite Green'sche Formel (8.4) ergibt hier

$$4\pi\phi(\mathbf{r}') = K \int_{\partial V} ds \phi - \int_{\partial V} ds h \frac{\partial \phi}{\partial n} + \int_V d^3r h \nabla^2 \phi. \quad (8.43)$$

Beachte, dass der erste Term eine von  $\mathbf{r}'$  unabhängige Konstante ist. Lösungen einer Poisson-Gleichung mit Neumann-Randbedingungen sind immer nur bis auf eine Konstante bestimmt und wir können diesen Term daher in die beliebige Konstante absorbieren. Damit können wir mittels der Green-Funktion  $h$  auch das Neumann-Problem lösen. Beachte, dass  $h$  für den Neumann-Fall von der Green-Funktion  $g$  für den Dirichlet-Fall *verschieden* ist.

Bemerkung: Green-Funktionen lassen sich analog in  $n$  Dimensionen herleiten.

### 8.3 Wellengleichung

Wir besprechen nun die Green-Funktion für die inhomogene Wellengleichung in drei Raumdimensionen,

$$u_{tt} - c^2 \nabla^2 u = f(\mathbf{r}, t) \quad (8.44)$$

auf  $V$  mit konstanter Geschwindigkeit  $c$ . Nach dem vorigen Abschnitt liegt es nahe, die Green-Funktion  $g(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$  als Lösung der PDG

$$g_{tt} - c^2 \nabla^2 g = 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \quad (8.45)$$

zu definieren. Wir kümmern uns zunächst wieder nicht um die Randbedingungen auf  $\partial V$ , sondern suchen eine möglichst einfache Lösung. Wir wollen jedoch erreichen, dass  $g$  eine *kausale* Entwicklung beschreibt, bei der die Wirkung ihrer Ursache folgt. Die Forderung der *Kausalität* lautet für  $g$ :

$$g = 0 \quad \text{für } t < t'. \quad (8.46)$$

Ein sehr ähnliches Problem haben wir bereits in Abschnitt 3.3 gelöst. Wir erhalten

$$g(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{c^2 \Delta r} \delta\left(t - t' - \frac{\Delta r}{c}\right), \quad (8.47)$$

wobei wieder  $\Delta r := |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  ist. Diese Green-Funktion hat die Symmetrie

$$g(\mathbf{r}', -t'; \mathbf{r}, -t) = g(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'). \quad (8.48)$$

Daher erfüllt  $g$  auch die PDG

$$g_{t't'} - c^2 (\nabla')^2 g = 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'). \quad (8.49)$$

Hier die  $\nabla'$  der Gradient nach  $\mathbf{r}'$ . Die gesuchte Funktion  $u$  erfüllt nach Voraussetzung die PDG

$$u_{t't'} - c^2 (\nabla')^2 u = f(\mathbf{r}', t') \quad \text{für } \mathbf{r}' \in V. \quad (8.50)$$

Multiplikation von Gl. (8.49) mit  $u$  und von Gl. (8.50) mit  $g$ , Subtraktion und Integration von  $\mathbf{r}'$  über  $V$  und von  $t'$  über das Zeitintervall<sup>2</sup>  $[0, t^+]$  ergibt

$$\begin{aligned} 4\pi u(\mathbf{r}, t) &= \int_0^{t^+} dt' \left[ \int_V d^3 r' g(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') f(\mathbf{r}', t') - c^2 \int_{\partial V} ds \left( u \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial u}{\partial n} \right) \right] \\ &\quad - \int_V d^3 r' \left( u \frac{\partial g}{\partial t'} - g \frac{\partial u}{\partial t'} \right) \Big|_{t'=0}, \end{aligned} \quad (8.51)$$

falls  $\mathbf{r} \in V$ . Hier gehen die Funktion und ihre Normalenableitung auf  $\partial V$  ein, sowie Anfangsbedingungen für  $u$  und  $u_t$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  (o.B.d.A.). Wir im vorigen Abschnitt können wir nun versuchen, geeignete Randbedingungen für  $g$  vorzugeben, damit nur eine der beiden Angaben, z.B. Dirichlet-Randbedingungen, tatsächlich eingeht. Wir führen dies hier nicht aus.

Im freien, dreidimensionalen Raum ist  $g$  bereits die geeignete Green-Funktion, da offensichtlich  $g \rightarrow 0$  für  $\Delta r \rightarrow \infty$  und feste Zeiten  $t, t'$ . In Gl. (8.51) fallen dann die Oberflächen-Terme weg.

**Beispiel:** Wir untersuchen den Fall der Erregung von Kugelwellen durch eine lokalisierte Störung. Die PDG lautet

$$u_{tt} - c^2 \nabla^2 u = f(t) \delta(\mathbf{r}) \quad \text{im freien Raum,} \quad (8.52)$$

$$u(\mathbf{r}, 0) = 0, \quad (8.53)$$

$$u_t(\mathbf{r}, 0) = 0. \quad (8.54)$$

Die Störung  $f(t)$  soll bei  $t = 0$  stetig eingeschaltet werden, also  $f(0) = 0$ . Nach Gl. (8.51) ist die Lösung

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{t^+} dt' \int_V d^3 r' g(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') f(t') \delta(\mathbf{r}') \\ &= \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^{t^+} dt' \frac{1}{r} \delta\left(t - t' - \frac{r}{c}\right) f(t') \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 r} \begin{cases} f(t - r/c) & \text{für } t > r/c \\ 0 & \text{für } t \leq r/c. \end{cases} \end{aligned} \quad (8.55)$$

Die Störung wird also einfach mit der Geschwindigkeit  $c$  in alle Raumrichtungen translatiert und dabei mit  $1/r$  abgeschwächt.

## 8.4 Green-Funktionen für weitere Gleichungstypen

Green-Funktionen und korrespondierende Lösungsformeln kann man auch für andere Typen von PDG's finden. Wir erläutern das Vorgehen bei der Herleitung der entsprechenden Ausdrücke anhand eines Beispiels und geben die Lösung für weitere Fälle nur an.

Zunächst betrachten wir eine verallgemeinerte Poisson-Gleichung mit Dämpfungsterm in einem  $n = 3$ -dimensionalen Volumen  $V$ ,

$$\nabla^2 u - \alpha^2 u = f(\mathbf{r}) \quad \text{auf } V \quad (8.56)$$

mit  $u$  auf  $\partial V$  vorgegeben. Für die Poisson-Gleichung ist die Green-Funktion die Lösung der Gleichung mit der Inhomogenität  $4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ . Analog probieren wir hier

$$\nabla^2 g - \alpha^2 g = 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \text{für } \mathbf{r} \in V, \quad (8.57)$$

$$g(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{für } \mathbf{r} \in \partial V. \quad (8.58)$$

Wir Multiplizieren Gl. (8.56) mit  $g$  und Gl. (8.57) mit  $u$  und subtrahieren die Ergebnisse:

$$g \nabla^2 u - u \nabla^2 g = fg - 4\pi u \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (8.59)$$

<sup>2</sup>Der Superskript „+“ bedeutet, dass die Delta-Funktion bei  $t' = t$  ganz im Integrationsintervall liegen soll.

Nun integrieren wir diese Gleichung über  $V$  und nutzen auf der linken Seite die zweite Green'sche Formel (8.4):

$$\int_{\partial V} ds \left( g \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial g}{\partial n} \right) = \int_V d^3r fg - 4\pi u(\mathbf{r}'). \quad (8.60)$$

Da  $g = 0$  auf  $\partial V$ , folgt

$$4\pi u(\mathbf{r}') = \int_V d^3r gf + \int_{\partial V} ds u \frac{\partial g}{\partial n}, \quad (8.61)$$

wodurch die Lösung formal gegeben ist.

Das Problem besteht nun darin, die Green-Funktion  $g$  zu bestimmen. Wir schreiben

$$g = g_0 + p, \quad (8.62)$$

wobei  $g_0$  eine einfache Lösung der PDG für  $g$  ist, die die Randbedingung i.A. nicht erfüllt, und  $p$  eine Lösung der *homogenen* Gleichung ist, die so gewählt wird, dass  $g$  insgesamt die Randbedingung erfüllt. Es ist vernünftig, ein  $g_0$  zu suchen, das nur vom Abstand  $\Delta r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  abhängt, dann können wir auch schreiben

$$\nabla^2 g_0 - \alpha^2 g_0 = \left( \frac{1}{(\Delta r)^2} \frac{\partial}{\partial \Delta r} (\Delta r)^2 \frac{\partial}{\partial \Delta r} - \alpha^2 \right) g_0 = 0 \quad \text{für } \Delta r > 0 \quad (8.63)$$

mit

$$\lim_{\Delta r \rightarrow \infty} g_0(\Delta r) = 0. \quad (8.64)$$

Die Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung ist

$$g_0(\Delta r) = A \frac{e^{-\alpha \Delta r}}{\Delta r} \quad (8.65)$$

( $\alpha > 0$ ). Der Koeffizient  $A$  wird dadurch festgelegt, dass  $g_0$  Gl. (8.57) erfüllen muss. Analog zur Herleitung von Gl. (8.11) erhalten wir  $A = -1$  und

$$g_0(\Delta r) = -\frac{e^{-\alpha \Delta r}}{\Delta r}. \quad (8.66)$$

Die Funktion  $p$  muss die homogene PDG

$$\nabla^2 p - \alpha^2 p = 0 \quad \text{für } \mathbf{r} \in V, \quad (8.67)$$

$$p(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-\alpha \Delta r}}{\Delta r} \quad \text{für } \mathbf{r} \in \partial V \quad (8.68)$$

erfüllen. Beide zusammen ergeben die Green-Funktion.

Aus der Wellengleichung in  $n = 3$  Dimensionen erhält man durch Fourier-Transformation nach der Zeit die Helmholtz-Gleichung

$$\nabla^2 u + \frac{\omega^2}{c^2} u = \frac{f}{c^2}, \quad (8.69)$$

wobei  $c$  konstant und  $f$  eine Funktion des Ortes ist (und der Frequenz  $\omega$ , was jedoch für die Lösung unerheblich ist, da  $\omega$  nur als Parameter auftritt). Beachte, dass sich die Helmholtz-Gleichung im Vorzeichen des Terms in  $u$  von der vorigen unterscheidet.

Es ist oft praktisch,  $u$  als komplex zu betrachten und am Ende den Realteil zu nehmen, um die tatsächliche physikalische Lösung zu erhalten. Die Green-Funktion für diesen Fall läßt sich aus der für den letzten erraten und wir geben sie ohne Beweis an:

$$g = -\frac{e^{-i\omega \Delta r/c}}{\Delta r} + p, \quad (8.70)$$

wobei  $p$  wieder die homogene Gleichung erfüllen muss und auf dem Rand so zu wählen ist, dass  $g$  dort verschwindet. Die Lösung ergibt sich dann als

$$4\pi u(\mathbf{r}') = \int_V d^3r g \frac{f}{c^2} + \int_{\partial V} ds u \frac{\partial g}{\partial n}, \quad (8.71)$$

bis auf einen trivialen Faktor identisch mit dem vorigen Fall.

In  $n = 2$  Dimensionen erhält man für die gedämpfte Poisson-Gleichung (8.56)

$$g = -K_0(\alpha \Delta r) + p, \quad (8.72)$$

mit der modifizierten Bessel-Funktion  $K_0(x)$ ,<sup>3</sup> und

$$2\pi u = \int_A d^2r g f + \int_{\partial A} dl u \frac{\partial g}{\partial n}. \quad (8.73)$$

Für  $\alpha \rightarrow 0$  erhalten wir die Poisson-Gleichung zurück und für die Green-Funktion einen Logarithmus wie in Gl. (8.18). Es ist jedoch manchmal einfacher, mit  $\alpha > 0$  zu rechnen, weil dann die Green-Funktion für  $\Delta r \rightarrow \infty$  beschränkt bleibt, und erst am Ende  $\alpha = 0$  zu setzen.

Für die  $n = 2$ -dimensionale Helmholtz-Gleichung (8.69) erhält man analog

$$g = \frac{i\pi}{2} H_0^{(2)} \left( \frac{\Delta r \omega}{c} \right) + p \quad (8.74)$$

mit der Hankel-Funktion zweiter Art  $H_0^{(2)}(x) = J_0(x) - iY_0(x)$ , und

$$2\pi u = \int_A d^2r g \frac{f}{c^2} + \int_{\partial A} dl u \frac{\partial g}{\partial n}. \quad (8.75)$$

Als letztes Beispiel führen wir noch die Green-Funktion für die Diffusionsgleichung im unbeschränkten eindimensionalen (Orts-) Raum an. Tatsächlich haben wir sie praktisch bereits in Abschnitt 2.4 bestimmt. Die PDG lautet

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad \text{für } -\infty < x < \infty, t > 0, \quad (8.76)$$

$$u(x, 0) = f(x). \quad (8.77)$$

Nun fordern wir, dass die Green-Funktion  $g$  die Gleichung

$$g_t = a^2 g_{xx}, \quad (8.78)$$

$$g(x, 0) = \delta(x - x') \quad (8.79)$$

erfüllt. Das ist offenbar eine andere Definition der Green-Funktion als für die anderen Typen! Wir werden gleich sehen, dass die hier definierte Green-Funktion aber gerade das typische Anfangswertproblem löst. Die Gleichung für  $g$  hatten wir aber in Abschnitt 2.4 für den Fall  $x' = 0$  gelöst. Die Lösung für allgemeine  $x'$  ergibt sich trivial durch Verschiebung des Ortsarguments,

$$g \equiv g(x, x', t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{(x - x')^2}{4a^2 t}\right). \quad (8.80)$$

Behauptung: Die Lösung der ursprünglichen Gleichung lautet

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' g(x, x', t) f(x'). \quad (8.81)$$

Beweis:

$$u_t - a^2 u_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \underbrace{[g_t(x, x', t) - a^2 g_{xx}(x, x', t)]}_0 f(x') = 0, \quad (8.82)$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' g_{x, x', 0} f(x') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \delta(x - x') f(x') = f(x). \end{aligned} \quad (8.83)$$

<sup>3</sup>Für Graphen und Eigenschaften von Bessel- und Hankel-Funktionen siehe das Buch von Abramowitz und Stegun.

## 9 Variationsrechnung

In diesem Kapitel besprechen wir kurz den Zusammenhang zwischen PDG's und der *Variationsrechnung*. Die typische Aufgabenstellung in der Variationsrechnung ist folgende: Gegeben ist eine eindeutige Abbildung  $\mathcal{S} : u \mapsto \mathcal{S}[u]$  aus einer Menge von *Funktionen*  $u(x_1, x_2, \dots)$  in die Menge der reellen Zahlen.  $\mathcal{S}$  nennt man ein *Funktional*. Gesucht ist eine Funktion  $u$ , so dass  $\mathcal{S}[u]$  extremal wird.

Beispiel: Eine beliebig geformte geschlossene Drahtschleife wird in Seifenlauge getaucht, so dass sich ein Seifenfilm bildet. Welche Form hat dieser Film? Aufgrund der Oberflächenspannung nimmt die Fläche des Films in einem stabilen Gleichgewichtszustand ein (lokales) Minimum an.

Im Zusammenhang mit PDG's sind Variationsprobleme aus folgenden Gründen von Interesse:

- Jede PDG lässt sich als Variationsproblem ausdrücken.
- Die Formulierung im Rahmen der Variationsrechnung erlaubt manchmal nützliche alternative – oft numerische – Lösungsmethoden.
- Variationsprobleme führen i.A. auf PDG's für die Lösungsfunktion.
- Extremalprinzipien, d.h. die Forderung, dass ein gewisses Funktional extremal werde, treten in eleganten Formulierungen physikalischer Gesetze auf. Beispiel: Hamilton'sches Prinzip der extremalen Wirkung.

### 9.1 Euler-Gleichungen

Gegeben sei ein Funktional  $\mathcal{S}[u]$ . Wir suchen eine Funktion  $u$ , die gewisse Randbedingungen erfüllt und  $\mathcal{S}$  extremal macht. Diese Forderung schreibt man symbolisch als

$$\delta\mathcal{S} = 0 \tag{9.1}$$

und bezeichnet sie, insbesondere in der Physik, als *Variationsprinzip*. Man fordert üblicherweise, dass  $u$  hinreichend oft stetig differenzierbar ist. Wir wollen aus  $\delta\mathcal{S} = 0$  eine PDG für  $u$  herleiten. Diese bezeichnet man als *Euler-Gleichung* zum gegebenen Variationsprinzip.

Das Funktional  $\mathcal{S}$  hat typischerweise die Form eines  $n$ -dimensionalen Volumenintegrals

$$\mathcal{S}[u] = \int_V d^n x \mathcal{L} \tag{9.2}$$

über einen gewissen Bereich  $V$ , wobei der Integrand  $\mathcal{L}$  (oft nichtlinear) von  $u$ , partiellen Ableitungen von  $u$  und den  $x_i$  abhängt. Wir werden uns auf diese Form des Funktionals beschränken.  $\mathcal{S}$  kann auch von *mehreren* Funktionen  $u_i$  abhängen, was den Formalismus nicht wesentlich ändert.

Wir betrachten den Fall, dass für  $u$  Dirichlet-Randbedingungen vorgegeben sind, d.h.  $u$  selbst ist auf dem Rand  $\partial V$  des Definitionsbereichs vorgegeben. Ist  $w$  eine (noch unbekannte) Lösung, so schreiben wir

$$u = w + \epsilon v, \tag{9.3}$$

wobei  $v$  eine *beliebig gewählte* zweimal stetig differenzierbare Funktion, die auf  $\partial V$  verschwindet, und  $\epsilon$  eine reelle Zahl sei.

Wir setzen  $u = w + \epsilon v$  in  $\mathcal{S}[u]$  ein. Für jede Wahl von  $v$  ist  $\mathcal{S}$  nun eine *gewöhnliche Funktion* von  $\epsilon$ . Die Forderung  $\delta\mathcal{S} = 0$  für  $u = w$  ergibt dann

$$\left. \frac{d\mathcal{S}}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_V d^n x \left. \frac{d\mathcal{L}}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0. \tag{9.4}$$

Wegen  $u = w + \epsilon v$  ist der Integrand linear in  $v$  und Ableitungen von  $v$ . Die allgemeine Strategie ist nun, durch Anwenden von Integralsätzen, insbesondere partieller Integration, und Ausnutzung von  $v = 0$  auf  $\partial V$  die Gleichung auf die Form

$$0 = \int_V d^n x \left. \frac{d\mathcal{L}}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_V d^n x \mathcal{F} v \tag{9.5}$$

zu bringen. Da diese Gleichung für *beliebige* Funktionen  $v$  (abgesehen von der Randbedingung) gelten muss, folgt, dass

$$\mathcal{F} = 0. \tag{9.6}$$

Dies ist i.A. eine PDG für die Lösung  $w$  des Variationsproblems, da  $\mathcal{F}$  von  $u$ , Ableitungen von  $u$  und den unabhängigen Variablen abhängt.

Falls  $\mathcal{S}$  von  $N$  Funktionen  $u_i$  abhängt, schreiben wir

$$u_i = w_i + \epsilon_i v_i \quad (9.7)$$

und führen das Verfahren für alle  $i$  durch. Wir erhalten dann  $N$  gekoppelte PDG's für die  $u_i$ .

Das Vorgehen soll an einem Beispiel vorgeführt werden: Sei

$$\mathcal{S}[u] = \int_F d^2r \left[ \frac{1}{2} (u_x^2 + u_y^2) - pu \right], \quad (9.8)$$

wobei  $u$  und  $p$  Funktionen auf dem zweidimensionalen Gebiet  $F$  seien. Auf dem Rand  $\partial F$  sei

$$u = g \quad (9.9)$$

mit einer vorgegebenen Funktion  $g$ . Gesucht ist das Minimum von  $\mathcal{S}$  unter dieser Randbedingung. Wir schreiben  $u = w + \epsilon v$  mit einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion  $v$ , die auf  $\partial F$  verschwindet, aber ansonsten beliebig ist. Einsetzen ergibt

$$\mathcal{S} = \int_F d^2r \left[ \frac{1}{2} (w_x + \epsilon v_x)^2 + \frac{1}{2} (w_y + \epsilon v_y)^2 - p(w + \epsilon v) \right]. \quad (9.10)$$

$d\mathcal{S}/d\epsilon = 0$  für  $\epsilon = 0$  ergibt dann

$$\frac{d\mathcal{S}}{d\epsilon} = \int_F d^2r [w_x v_x + w_y v_y - px] = 0. \quad (9.11)$$

Anwendung des Gauß'schen Satzes auf die ersten beiden Terme im Integranden ergibt

$$\int_{\partial F} dl \frac{\partial w}{\partial n} v - \int_F d^2r [w_{xx} + w_{yy} + p] v = 0. \quad (9.12)$$

Der erste Term verschwindet wegen  $v = 0$  auf  $\partial F$ . Da  $v$  ansonsten beliebig ist, folgt

$$w_{xx} + w_{yy} + p = \nabla^2 w + p = 0. \quad (9.13)$$

Das ist die gesuchte *Euler-Gleichung*.

### Anwendung in der Theoretischen Mechanik

Wir wollen noch an die Anwendung der Euler-Gleichungen in der Theoretischen Mechanik erinnern, auch wenn dies streng genommen nicht in diese Vorlesung gehört, da wir *gewöhnliche* Differentialgleichungen erhalten. In der Mechanik postuliert man das Hamilton'sche Prinzip

$$\delta\mathcal{S} = 0 \quad (9.14)$$

mit der Wirkung

$$\mathcal{S} = \int_{t_0}^{t_1} dt L = \int_{t_0}^{t_1} dt (T - V). \quad (9.15)$$

Hier sind  $L$  die Lagrange-Funktion,  $T$  die kinetische Energie und  $V$  die potentielle Energie des Systems. Wir betrachten die Entwicklung zwischen den festen Zeitpunkten  $t_0$  und  $t_1 > t_0$ . Dies ist also der Spezialfall *einer* Dimension in Gl. (9.2).

Nehmen wir an, das System hat  $N$  verallgemeinerte (also i.A. krummlinige) Koordinaten  $q_i$ , die von der Zeit  $t$  abhängen. Die Lagrange-Funktion

$$L = L(q_1, \dots, \dot{q}_1, \dots, t) \quad (9.16)$$

hänge von den verallgemeinerten Koordinaten, Geschwindigkeiten und von der Zeit ab und das zeitliche Integral bezieht sich auf die explizite *und implizite* Zeitabhängigkeit von  $L$ :

$$\mathcal{S} = \int_{t_0}^{t_1} dt L[q_1(t), \dots, \dot{q}_1(t), \dots, t]. \quad (9.17)$$

Mit dem eben beschriebenen Verfahren leitet man die Euler-Gleichung des Hamilton'schen Prinzips ab, die hier *Euler-Lagrange-Gleichung* heißt: Sei

$$q_i(t) = Q_i(t) + \epsilon_i \eta_i(t) \quad (9.18)$$



mit  $\eta_i(t_0) = \eta_i(t_1) = 0$  für alle  $i$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathcal{S}}{d\epsilon_i} \right|_0 &= \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d}{d\epsilon_i} L(Q_1 + \epsilon_1 \eta_1, \dots, \dot{Q}_1 + \epsilon_1 \dot{\eta}_1, \dots, t)_0 \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt [L_{q_i} \eta_i + L_{\dot{q}_i} \dot{\eta}_i]. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Partielle Integration im zweiten Term ergibt

$$\left. \frac{d\mathcal{S}}{d\epsilon_i} \right|_0 = \int_{t_0}^{t_1} dt [L_{q_i} \eta_i - \frac{d}{dt} L_{\dot{q}_i} \eta_i] = \int_{t_0}^{t_1} dt [L_{q_i} - \frac{d}{dt} L_{\dot{q}_i}] \eta_i. \quad (9.20)$$

Wegen der Randbedingungen an  $\eta_i$  verschwindet der Randterm der partiellen Integration. Wegen  $\delta\mathcal{S} = 0$  muss der gesamte Ausdruck verschwinden. Da  $\eta_i$  für  $t_0 < t < t_1$  im Wesentlichen beliebig ist, erfordert dies

$$L_{q_i} - \frac{d}{dt} L_{\dot{q}_i} = 0. \quad (9.21)$$

Diese  $N$  Gleichungen ( $i = 1, \dots, N$ ) sind die bekannten *Euler-Lagrange-Gleichungen*. Es handelt sich um ein System von gekoppelten *gewöhnlichen* Differentialgleichungen für die Funktionen  $q_i(t)$ . In der Kontinuumsmechanik (Elastizitätstheorie, Hydrodynamik...) erhält man hingegen Euler-Lagrange-Gleichungen, die gekoppelte PDG's für Funktionen von Ort und Zeit sind.

## 9.2 Variationsprinzip zu gegebener Differentialgleichung

Wir untersuchen nun die umgekehrte Richtung – die Herleitung eines Variationsprinzips für die Lösung einer gegebenen PDG. Oben wurde behauptet, dass dies immer möglich ist. Das entsprechende „triviale“ Variationsprinzip erhalten wir wie folgt:  $u$  sei die Lösung der PDG

$$F(x_1, x_2, \dots, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_1 x_1}, \dots) = 0 \quad (9.22)$$

beliebiger Ordnung auf  $V$  mit geeigneten Randbedingungen auf  $\partial V$ . Definiere dann das Funktional

$$\mathcal{S}[u] := \int_V d^n x F^2. \quad (9.23)$$

Offenbar ist der Integrand nicht-negativ und identisch Null genau dann, wenn  $u$  die PDG erfüllt. Also wird  $\mathcal{S}[u]$  dann Null und ist größer als Null, wenn  $u$  keine Lösung ist.

Damit ist die gesuchte Funktion  $u$  eine Lösung des Variationsprinzips

$$\delta\mathcal{S}[u] = 0 \quad (9.24)$$

für Funktionen  $u$  beschränkt auf  $V$  mit denselben Randbedingungen auf  $\partial V$ . Kann  $\mathcal{S}$  noch weitere *lokale* Minima haben, an denen nicht  $\mathcal{S} = 0$  gilt und die nicht Lösungen der PDG entsprechen? Um dies zu beantworten, leiten wir die Euler-Gleichung her. Mit  $u = w + \epsilon v$ ,  $v$  verschwindend auf  $\partial V$ , ist

$$0 = \frac{d\mathcal{S}}{d\epsilon} = \int_V d^n x 2F (F_u v + F_{u_{x_1}} v_{x_1} + \dots + F_{u_{x_1 x_1}} v_{x_1 x_1} + \dots) \quad (9.25)$$

und mehrfacher mit partieller Integration

$$0 = \int_V d^n x F \left( F_u - \frac{\partial}{\partial x_1} F_{u_{x_1}} - \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} F_{u_{x_1 x_1}} + \dots \right) v. \quad (9.26)$$

Da  $v$  beliebig ist, folgt

$$F = 0 \quad \text{oder} \quad F_u - \frac{\partial}{\partial x_1} F_{u_{x_1}} - \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} F_{u_{x_1 x_1}} + \dots = 0. \quad (9.27)$$

Die Extrema der ersten Art ( $F = 0$ ) entsprechen gerade Lösungen der PDG, die der zweiten Art jedoch i.A. nicht.

Es sei darauf hingewiesen, dass dieses „triviale“ Variationsprinzip i.A. keine Hilfe bei der Lösung einer PDG ist. Dazu sind nichttriviale Variationsprinzipien nützlicher, für die es kein allgemeines Konstruktionsverfahren gibt.

Als Beispiel betrachten wir das Variationsprinzip

$$\delta \int_V d^3r (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) = 0 \quad (9.28)$$

mit  $u$  auf  $\partial V$  vorgegeben. Welcher PDG entspricht es? Wir leiten die Euler-Gleichung her:

$$0 = \int_V d^3r (2u_x v_x + 2u_y v_y + 2u_z v_z) = -2 \int_V d^3r (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) v. \quad (9.29)$$

Also erhalten wir als Euler-Gleichung eine *Laplace-Gleichung*

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0. \quad (9.30)$$

Ebenso erhalten wir aus

$$\delta \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_V d^3r (u_t^2 - c^2 u_x^2 - c^2 u_y^2 - c^2 u_z^2) = 0 \quad (9.31)$$

die *Wellen-Gleichung*

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - c^2 u_{yy} - c^2 u_{zz}. \quad (9.32)$$

Damit haben wir Variationsprinzipien für die Lösungen der einfachen Laplace- und Wellengleichung gefunden.

Ein Beispiel als Warnung gegen naive Verallgemeinerung: Aus

$$\delta \int_V d^3r x^2 (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) = 0 \quad (9.33)$$

folgt

$$0 = \int_V d^3r x^2 (2u_x v_x + 2u_y v_y + 2u_z v_z) = - \int_V d^3r (4x u_x + 2x^2 u_{xx} + 2x^2 u_{yy} + 2x^2 u_{zz}) \quad (9.34)$$

und damit die Euler-Gleichung

$$\nabla^2 u + \frac{2}{x} u_x = 0, \quad (9.35)$$

was man kaum geraten hätte.

Wir betrachten schließlich noch eine Anwendung für die Lösung einer PDG: Gegeben sei die Gleichung

$$\nabla^2 u = 1 \quad \text{für } 0 < x < 1, 0 < y < 1, \quad (9.36)$$

$$u = 0 \quad \text{auf dem Rand.} \quad (9.37)$$

Nach dem Beispiel aus Abschnitt 9.1 erfüllt die Lösung  $u$  das Variationsprinzip  $\delta \mathcal{S} = 0$  mit

$$\mathcal{S} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left[ \frac{1}{2} (u_x^2 + u_y^2) + u \right]. \quad (9.38)$$

Wir entwickeln  $u$  in ein vollständiges Funktionensystem, das die Randbedingungen respektiert,

$$u(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin m\pi x \sin n\pi y, \quad (9.39)$$

und setzen dies ein:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left[ \frac{\pi^2}{2} \sum_{mm'nn'} a_{mn} a_{m'n'} (mm' \cos m\pi x \sin n\pi y \cos m'\pi x \sin n'\pi y \right. \\ &\quad \left. + nn' \sin m\pi x \cos n\pi y \sin m'\pi x \cos n'\pi y) + \sum_{mn} a_{mn} \sin m\pi x \sin n\pi y \right] \\ &= \frac{\pi^2}{2} \sum_{mn} a_{mn}^2 \frac{m^2 + n^2}{4} + \sum_{m,n \text{ ungerade}} a_{mn} \frac{4}{\pi^2 mn} \\ &= \frac{\pi^2}{8} \sum_{mn} (m^2 + n^2) a_{mn}^2 + \frac{4}{\pi^2} \sum_{m,n \text{ ungerade}} \frac{a_{mn}}{mn}. \end{aligned} \quad (9.40)$$

Wir müssen jetzt die  $a_{mn}$  so bestimmen, dass  $\mathcal{S}$  extremal wird. Dazu bilden wir die Ableitungen

$$\frac{d\mathcal{S}}{da_{mn}} = \frac{\pi^2}{4} (m^2 + n^2) a_{mn} + \left\{ \begin{array}{ll} \frac{4}{\pi^2 mn} & \text{für } m, n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\} \stackrel{!}{=} 0. \quad (9.41)$$

Es folgt

$$a_{mn} = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{16}{\pi^4 mn (m^2 + n^2)} & \text{für } m, n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst.} \end{array} \right. \quad (9.42)$$

Damit ist die gesuchte Lösung

$$u(x, y) = -\frac{16}{\pi^4} \sum_{m, n \text{ ungerade}} \frac{1}{mn (m^2 + n^2)} \sin m\pi x \sin n\pi y, \quad (9.43)$$

sie ist in Fig. 20 gezeigt.

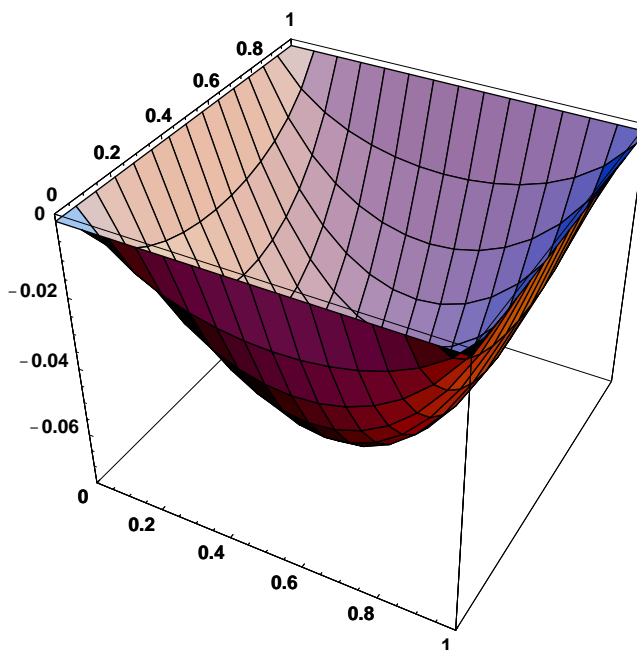


Abbildung 20: Lösung der Poisson-Gleichung  $\nabla^2 u = 1$  auf dem Einheitsquadrat mit  $u = 0$  auf dem Rand. Es wurden nur Terme mit  $m, n \leq 21$  berücksichtigt.

## 10 Näherungsmethoden

In diesem Abschnitt wollen wir weitere Näherungsmethoden für die Lösung von PDG's besprechen. Von praktisch verwendbaren Näherungsmethoden erwarten wir, dass

- sie sich leicht auf dem Computer implementieren lassen,
- ohne unverhältnismäßigen Aufwand im Prinzip beliebig gute Näherungen gefunden werden, nur begrenzt durch die Rechenzeit,
- ohne grundsätzliche Änderungen viele verschiedenen Gleichungen behandelt werden können.

Die oben besprochene Störungstheorie erfüllt diese Kriterien i.A. *nicht*; wir hatte z.B. gesehen, dass die höheren Ordnungen in der Störungsentwicklung oft immer komplizierter werden.

### 10.1 Rayleigh-Ritz'sches Variationsverfahren

Für PDG's, deren Lösung einem Variationsprinzip gehorcht, kann man das Variationsverfahren nach *Rayleigh* und *Ritz* anwenden. Dies ist z.B. für die Laplace-Gleichung der Fall, wie wir oben gesehen haben. Wir betrachten es hier für den Fall von Dirichlet-Randbedingungen.

Wir gehen von einem Variationsprinzip

$$\delta\mathcal{S}[u] = 0, \quad (10.1)$$

$u$  definiert auf  $V$ , mit der Randbedingung

$$u(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \quad \text{für } \mathbf{r} \in \partial V, \quad (10.2)$$

wobei  $f$  eine vorgegebene Funktion ist. Das Verfahren funktioniert nun folgendermaßen:

1. Wähle  $n + 1$  linear unabhängige Funktionen  $\psi^{(i)}$  auf  $V$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , mit

$$\psi^{(0)} = f \quad \text{für } \mathbf{r} \in \partial V, \quad (10.3)$$

$$\psi^{(i)} = 0 \quad \text{für } i \geq 1 \text{ und } \mathbf{r} \in \partial V. \quad (10.4)$$

2. Bilde die Linearkombination

$$\psi = \psi^{(0)} + \sum_{i=1}^n c_i \psi^{(i)} \quad (10.5)$$

mit konstanten, noch unbekanntem  $c_i$ .  $\psi$  erfüllt offenbar die Randbedingung.

3. Wähle die  $c_i$  so, dass die wahre Lösung möglichst gut angenähert wird. Damit meinen wir folgendes: Für die wahre Lösung nimmt das Funktional  $\mathcal{S}$  ein Extremum an. Also fordern wir von der Näherungslösung, dass sie bezüglich der Variation der  $c_i$  ebenfalls extremal wird, oder

$$\frac{d\mathcal{S}}{dc_i} = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n. \quad (10.6)$$

Dies ist ein System von  $n$  *algebraischen* Gleichungen für die  $n$  Unbekannten  $c_i$ . Um praktikabel zu sein, sollten die  $\psi^{(i)}$  so gewählt werden, dass die Integrale in  $\mathcal{S}$  analytisch ausgeführt werden können.

Beispiel: Wir suchen Lösungen  $u$  der *Laplace-Gleichung* auf einem zweidimensionalen Gebiet  $F$  mit  $u = f$  auf  $\partial V$ . Aus Abschnitt 9.2 wissen wir, dass die Lösung das Funktional

$$\mathcal{S}[u] = \int_F d^2r (u_x^2 + u_y^2) \quad (10.7)$$

unter der Randbedingung  $u = f$  auf  $\partial V$  extremal macht. Mit

$$\psi = \psi^{(0)} + \sum_{i=1}^n c_i \psi^{(i)} \quad (10.8)$$

für  $u$  eingesetzt, erhalten wir

$$\mathcal{S}[\psi] = \int_F d^2r \left[ \left( \psi_x^{(0)} + c_1 \psi_x^{(1)} + \dots \right)^2 + \left( \psi_y^{(0)} + c_1 \psi_y^{(1)} + \dots \right)^2 \right]. \quad (10.9)$$

Variation von  $c_i$  ergibt die Gleichung

$$\int_F d^2r \left[ \left( \psi_x^{(0)} + c_1 \psi_x^{(1)} + \dots \right) \psi_x^{(i)} + \left( \psi_y^{(0)} + c_1 \psi_y^{(1)} + \dots \right)^2 \psi_y^{(i)} \right] = 0. \quad (10.10)$$

Nach partieller Integration können wir dies auch schreiben als

$$\int_F d^2r \nabla^2 \left( \psi^{(0)} + c_1 \psi^{(1)} + \dots \right) \psi^{(i)} = 0. \quad (10.11)$$

Die  $n$  resultierenden Gleichungen bilden hier sogar ein *lineares*, aber inhomogenes Gleichungssystem für die  $c_i$ .

Bemerkung: Das Rayleigh-Ritz'sche Verfahren ist immer nur so gut wie die gewählten Funktionen  $\psi^{(i)}$ ! Die Wahl von Funktionen, die  $u$  nicht gut approximieren können führt zu einer schlechten Näherung. Das bedeutet, dass man schon eine gewisse Vorstellung von der Lösung haben sollte, wenn man die  $\psi^{(i)}$  wählt. Eine Möglichkeit ist, für  $\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(n)}$  die ersten  $n$  Elemente eines vollständigen Funktionensystems zu wählen.

## 10.2 Galerkin-Methode

Gleichung (10.11) sagt aus, dass die  $c_i$  in der Näherungslösung für die Laplace-Gleichung so gewählt werden müssen, dass  $\nabla^2 \psi$  zu allen  $\psi^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , *orthogonal* ist. Die Orthogonalität ist bezüglich des Skalarprodukts

$$\psi \cdot \phi := \int_F d^2r \psi(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) \quad (10.12)$$

zu verstehen. Diese Interpretation ist sinnvoll, denn die wahre Lösung  $u$  erfüllt

$$\nabla^2 u = 0, \quad (10.13)$$

so dass das Skalarprodukt von  $\nabla^2 u$  mit *jeder* Funktion verschwindet. Bei der Näherungslösung ist das nur mit einem ausgewählten Satz von Funktionen  $\psi^{(i)}$  der Fall.

Diese Idee kann man zur *Galerkin-Methode* verallgemeinern: Gegeben sei die PDG

$$F[u] = 0 \quad \text{auf } V, \quad (10.14)$$

wobei  $F$  ein beliebig komplizierter Differentialoperator ist, mit Dirichlet-Randbedingungen

$$u = f \quad \text{auf } \partial V. \quad (10.15)$$

Eine Näherungslösung wird wie in Gl. (10.5) gebildet,

$$\psi = \psi^{(0)} + \sum_{i=1}^n c_i \psi^{(i)}. \quad (10.16)$$

Bestimme die  $c_i$  nun so, dass

$$\int_V d^n r F[\psi] \psi^{(i)} = 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n. \quad (10.17)$$

Bemerkungen:

- Für  $F = \nabla^2$  (Laplace-Gleichung) ist das Galerkin-Verfahren zu dem von Rayleigh und Ritz äquivalent.
- Das Galerkin-Verfahren ist auch anwendbar, wenn sich kein Variationsprinzip für die Lösung finden lässt.
- Wie bei Rayleigh-Ritz erhalten wir eine gute Näherung nur für geeignet gewählte  $\psi^{(i)}$ .

Wir können die Galerkin-Methode noch verallgemeinern: Nichts zwingt uns, *dieselben* Funktionen in der Näherungslösung (10.16) und in der Orthogonalitätsbedingung (10.17) zu verwenden. Wir können daher auch *zwei* Sätze von je  $n$  Funktionen,  $\psi^{(i)}$  und  $\beta^{(i)}$  einführen und die  $c_i$  so bestimmen, dass

$$\int_V d^n r F[\psi] \beta^{(i)} = 0 \quad (10.18)$$

gilt. Die Anzahl der Funktionen in den beiden Sätzen muss gleich sein, um  $n$  Gleichungen für  $n$  Unbekannte  $c_i$  zu erhalten.

Eine weitere Verallgemeinerung ergibt sich aus der Erkenntnis, dass  $\psi$  keine lineare Funktion der  $c_i$  sein muss. Wir können eine beliebige geeignete Funktion

$$\psi = \psi(\mathbf{r}; c_1, \dots, c_n) \quad (10.19)$$

ansetzen.

Ein interessanter Spezialfall ergibt sich für die Wahl

$$\beta^{(i)}(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (10.20)$$

wobei die  $\mathbf{r}_i$  Punkte in  $V$  sind. Dann bedeutet die Orthogonalitätsbedingung, dass

$$F[\psi] = 0 \quad (10.21)$$

an den Punkten  $\mathbf{r}_i$ .

### 10.3 Finite Elemente

Die sehr wichtige Methode der *Finiten Elemente* läßt sich als Spezialfall der Galerkin- und (verallgemeinerten) Rayleigh-Ritz-Verfahren verstehen. Wir bilden wieder eine Näherungslösung, die von  $n$  Parametern abhängt, und zwar hier auf folgende Weise: Wir wählen  $m$  Punkte auf dem Rand von des (Hyper-) Volumens  $V$  und  $n$  Punkte im Inneren. Dann teilen wir das Volumen in *Simplexe* mit diesen Punkten als Ecken (*Vertizes*) auf. Die Gesamtheit der Vertizes und Simplexe nennen wir hier ein *Netz*. Die Funktionswerte

$$\psi(\mathbf{r}_i) =: \psi_i \quad (10.22)$$

an diesen Vertizes bilden  $m + n$  Parameter. Die  $\psi_i$  auf dem Rand nehmen wir als durch die Randbedingungen vorgegeben an. Innerhalb jedes Simplex nähern wir die Funktion durch eine *lineare* Funktion an.

In  $N$  Dimensionen ist ein *Simplex* ein (Hyper-) Polyeder mit  $N + 1$  Vertizes (d.h. Ecken). In zwei Dimensionen ist ein Simplex ein Dreieck, in drei Dimensionen ein Tetraeder.

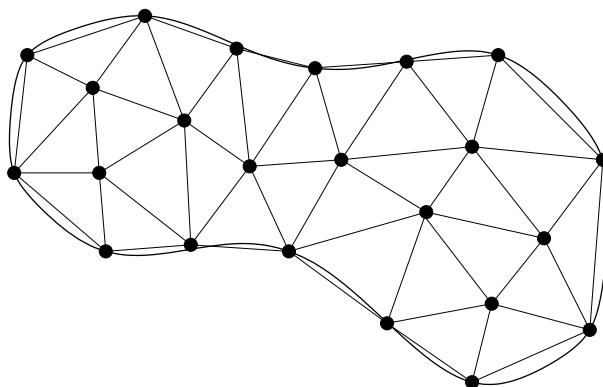


Abbildung 21: Eine Fläche  $A$  und eine mögliche Wahl von Punkten und Dreiecken für die Methode der finiten Elemente.

Wir beschränken uns zur Erläuterung auf zwei Dimensionen und den Fall von Dirichlet-Randbedingungen. Die Abbildung zeigt die näherungsweise Einteilung einer Fläche  $A$  in Dreiecke. Innerhalb jedes Dreiecks soll die Näherungslösung linear sein, d.h.

$$\psi = a + bx + cy. \quad (10.23)$$

Die Koeffizienten sind durch die Werte von  $\psi$  an den drei Ecken  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$  bestimmt:

$$\psi_1 = a + bx_1 + cy_1, \quad (10.24)$$

$$\psi_2 = a + bx_2 + cy_2, \quad (10.25)$$

$$\psi_3 = a + bx_3 + cy_3. \quad (10.26)$$

Dies können wir auch schreiben als

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \quad (10.27)$$

Durch Matrix-Inversion erhalten wir die Lösung

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3} \times \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}. \quad (10.28)$$

Im Inneren des Dreiecks lauten die ersten Ableitungen, die wir später benötigen, offensichtlich

$$\psi_x = b, \quad \psi_y = c. \quad (10.29)$$

$\psi$  ist stetig über die Dreieckskanten hinweg, da  $\psi$  auf den Kanten einfach zwischen ihren Endpunkten interpoliert.

Die Funktionswerte an den  $m$  Randpunkten sind durch die Randbedingungen vorgegeben. Die Werte an den  $n$  inneren Punkten sind die zu bestimmenden Parameter. Dies geschieht, je nach betrachteter PDG, durch

- das Rayleigh-Ritz-Verfahren oder
- die Galerkin-Methode.

Es ergibt sich ein algebraisches Gleichungssystem für die  $\psi_i$  im Inneren.

Als Beispiel betrachten wir die Laplace-Gleichung auf einem komplizierten zweidimensionalen Gebiet  $A$  (auf dem wir die Green-Funktion nicht bestimmen können). Wir haben gesehen, dass die Lösung das Variationsprinzip

$$\delta\mathcal{S}[u] \equiv \delta \int_A d^2r (u_x^2 + u_y^2) = 0 \quad (10.30)$$

erfüllt.

- Setze für  $u$  die Näherung  $\psi$  ein,

$$\delta\mathcal{S}[\psi] \equiv \int_A d^2r (\psi_x^2 + \psi_y^2) = 0. \quad (10.31)$$

- $\psi$  ist per Konstruktion stetig und stückweise, auf den Dreiecken, linear. Auf jedem Dreieck sind  $\psi_x$  und  $\psi_y$  somit konstant und durch die  $\psi_i$  bestimmt. Der Beitrag zum Integral ist dann einfach

$$\Delta\mathcal{S} = A_\Delta (\psi_x^2 + \psi_y^2) = A_\Delta (b^2 + c^2), \quad (10.32)$$

wobei  $A_\Delta$  die Fläche des Dreiecks ist.  $b, c$  sind linear in den  $\psi_i$ , daher ist  $\mathcal{S}$  von zweiter Ordnung in den  $\psi_i$ .

- Setze

$$\frac{d\mathcal{S}[\psi]}{d\psi_i} = 0. \quad (10.33)$$

Diese  $n$  Gleichungen sind *linear* in den Unbekannten  $\psi_i$  und somit im Prinzip leicht numerisch zu lösen. Die Gleichung (10.33) enthält nur Beiträge von denjenigen Dreiecken, deren eine Ecke  $\mathbf{r}_i$  ist. Daher enthält jede der Gleichungen nur *wenige* der Variablen. Das Gleichungssystem ist damit *sparse*.

Es soll noch ohne Beweis die Schnelligkeit der Konvergenz der Näherungslösung angegeben werden. Wir stellen uns dazu vor, dass wir das Netz der Punkte  $\mathbf{r}_i$  immer feiner machen. Ist  $l$  die *längste Kante* im Dreiecksnetz, so konvergiert die Näherung  $\psi$  *punktweise* gegen die exakte Lösung  $u$  und

$$|\psi - u| = \mathcal{O}(l^2) \quad (10.34)$$

im zweidimensionalen Fall. Da die Anzahl der Punkte bei gleichmäßig großen Dreiecken proportional zu  $1/l^2$  ist, führt eine Verdoppelung der Anzahl  $n$  der Punkte zu einer Halbierung des geschätzten Fehlers. Bachte aber, dass der Aufwand für die Lösung der  $n$  linearen Gleichungen mit  $n^3$  anwächst.

Die Abschätzung legt nahe, dass i.A. alle Kantenlängen ähnlich sein sollte, da die *längste Kante* den Fehler dominiert, der Rechenaufwand aber von einem Mittelwert der Kantenlängen bestimmt wird. Dies ist jedoch nicht immer der Fall; es ist im Gegenteil vorteilhaft, die Vertizes in den Bereichen enger zu legen, in denen größere *Krümmungen* (zweite Ableitungen) der Lösung zu erwarten sind, z.B. in der Nähe von Ecken und in schmalen Brücken, vgl. die Abbildung.

In der Praxis trifft man oft auf Verallgemeinerungen der Finite-Elemente-Methode. Die folgenden Verallgemeinerungen kommen häufiger vor:

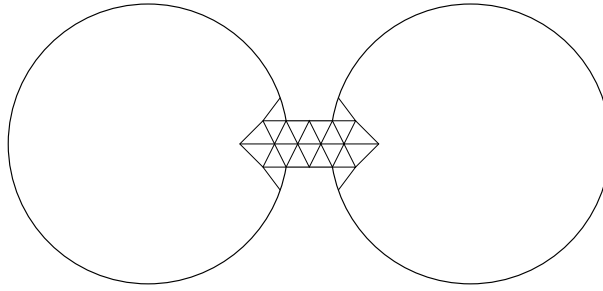


Abbildung 22: Wenn die Lösung der Laplace-Gleichung auf einer unregelmäßigen Fläche wie dieser mit der Finite-Elemente-Methode gesucht wird, sollten die Vertizes in Gebieten großer zweiter Ableitungen enger gewählt werden.

- Die Teile, in die der Definitionsbereich zerlegt wird, können eine kompliziertere Form haben.
- Es können jeweils mehr als drei Punkte vorgegeben sein.
- Die Näherungsfunktion in ihrem Inneren muss nicht linear sein. Insbesondere für Variationsprinzipien, die Ableitungen der Ordnung  $\nu$  enthalten, sollten die  $(\nu - 1)$ -ten Ableitungen überall stetig sein.

Diese Verallgemeinerungen hängen eng zusammen, wie ein Beispiel zeigt: Soll  $\psi$  auf Dreiecken von quadratischer Ordnung sein,

$$\psi = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2, \quad (10.35)$$

so benötigt man offenbar sechs Funktionswerte  $\psi_i$ , um die sechs Parameter  $a, \dots, f$  festzulegen. Man kann dafür z.B. je einen weiteren Punkt in der Mitte jeder Kante einführen.

## 10.4 Differenzgleichungen

Die konzeptionell wohl einfachste Näherungslösung für eine PDG besteht darin, die partiellen Ableitungen durch *Differenzenquotienten* zu ersetzen. Dazu konstruiert man wieder ein diskretes Netz im Definitionsbereich, praktischerweise ein regelmäßiges Gitter in einem geeigneten Koordinatensystem. Dann ersetzt man Ableitungen durch Differenzenquotienten zwischen Vertizes dieses Gitters.

Wir erläutern die Methode zunächst an Hand eines Beispiels für ein *Anfangswertproblem*. Sie läßt sich mit geeigneten Verallgemeinerungen auf parabolische und hyperbolische PDG's anwenden.  $u$  sei eine Lösung der eindimensionalen Diffusionsgleichung

$$u_t = a^2(x) u_{xx} \quad \text{für } 0 < x < 1, t > 0, \quad (10.36)$$

$$u(0, t) = 0, \quad (10.37)$$

$$u(1, t) = 0, \quad (10.38)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad (10.39)$$

mit  $f(x)$  und  $a(x)$  vorgegeben. Wir führen ein Gitter von Punkten mit Abständen  $\Delta x$  in  $x$ -Richtung und  $\Delta t$  in  $t$ -Richtung ein. Die Anzahl der Punkte in  $x$ -Richtung ist dann

$$J := \frac{1}{\Delta x}. \quad (10.40)$$

Die Funktion wird durch ihre Werte an den Gitterpunkten angenähert,

$$u(j \Delta x, n \Delta t) =: u_{jn}, \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad n = 0, 1, \dots \quad (10.41)$$

Ebenso schreiben wir

$$a(j \Delta x) =: a_j, \quad f(j \Delta x) =: f_j. \quad (10.42)$$

Die Ableitungen werden durch Differenzenquotienten angenähert:

$$u_t \cong \frac{u_{j,n+1} - u_{jn}}{\Delta t}, \quad (10.43)$$

$$u_{xx} \cong \frac{u_{j+1,n} - 2u_{jn} + u_{j-1,n}}{\Delta x^2}. \quad (10.44)$$



Damit erhalten wir die *Differenzgleichung*

$$\frac{u_{j,n+1} - u_{jn}}{\Delta t} - a_j^2 \frac{u_{j+1,n} - 2u_{jn} + u_{j-1,n}}{\Delta x^2} = 0 \quad (10.45)$$

für  $j = 1, 2, \dots, J - 1$  und  $n = 0, 1, \dots$ . Die Randpunkte sind

$$u_{0n} = u_{Jn} = 0, \quad (10.46)$$

$$u_{j0} = a_j. \quad (10.47)$$

Nun sehen wir, dass Gl. (10.45) eine Rekursionsgleichung für die  $u_{jn}$  darstellt:  $u_{j,n+1}$  ist durch  $u$  zur früheren „Zeit“  $n$  bestimmt. Wir können jetzt also leicht iterativ  $u_{jn}$  bis zu beliebig großen  $n$  berechnen.

Um Einsicht in die Güte der Näherung zu gewinnen, ist es nützlich einen Fall zu betrachten, in dem die exakte Lösung bekannt ist und auch die genäherten  $u_{jn}$  einfach zu berechnen sind. Dies ist der Fall, wenn wir im obigen Beispiel  $a = \text{const}$  setzen und

$$f(x) = \sin K\pi x \quad (10.48)$$

mit ganzzahligem  $K$ . Diese Anfangsbedingung kann sich z.B. aus einer Fourier-Entwicklung ergeben. Die exakte Lösung ergibt sich durch Separation zu

$$u(x, t) = e^{-a^2 K^2 \pi^2 t} \sin K\pi x. \quad (10.49)$$

Die Lösung der Differenzgleichung läßt sich ebenfalls in geschlossener Form angeben,

$$\begin{aligned} u_{jn} &= \left(1 - \frac{4a^2 \Delta t}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{K\pi \Delta x}{2}\right)^n \sin K\pi j \Delta x \\ &= \left(1 - \frac{4a^2 \Delta t}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{K\pi \Delta x}{2}\right)^{t/\Delta t} \sin K\pi x. \end{aligned} \quad (10.50)$$

Die exakte Lösung fällt also für alle  $K$  exponentiell ab, nur die Rate hängt von  $K$  ab, weil, wie wir schon gesehen hatten, Komponenten mit kleiner Wellenlänge schneller abklingen.

Die Näherungslösung zeigt dagegen ein anderes Verhalten: Wenn

$$\frac{4a^2 \Delta t}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{K\pi \Delta x}{2} > 2, \quad (10.51)$$

dann *wächst* die Näherung exponentiell mit  $n = t/\Delta t$ , wird also mit wachsender Zeit schnell beliebig schlecht. Eine notwendige Voraussetzung hierfür ist

$$\frac{a^2 \Delta t}{\Delta x^2} > \frac{1}{2}. \quad (10.52)$$

Ist diese Ungleichung erfüllt, aber Ungleichung (10.51) nicht, so ist das Verfahren *numerisch instabil*:

- Rundungsfehler in jedem Iterationsschritt erzeugen Rauschen in den Daten.
- Dieses Rauschen enthält sicherlich eine Fourier-Komponente mit einer Wellenzahl die Ungleichung (10.51) erfüllt.
- Solche Komponenten werden exponentiell verstärkt und dominieren schließlich.

Wie können wir den Fehler der Diskretisierung abschätzen? Eine Möglichkeit ist, die (unbekannte) exakte Lösung formal in die Differenzgleichung einzusetzen und zu prüfen in welchem Maß diese verletzt ist. Im obigen Beispiel erhalten wir auf der linken Seite

$$\frac{u(j\Delta x, (n+1)\Delta t) - u(j\Delta x, n\Delta t)}{\Delta t} - a_j^2 \frac{u((j+1)\Delta x, n\Delta t) - 2u(j\Delta x, n\Delta t) + u((j-1)\Delta x, n\Delta t)}{\Delta x^2}. \quad (10.53)$$

Taylor-Entwicklung bis zur *ersten* nichttrivialen Ordnung ergibt die ursprüngliche PDG und hilft uns dementsprechend nicht weiter. Entwicklung bis zur *zweiten* nichttrivialen Ordnung ergibt dagegen die führenden Fehler-Terme,

$$\begin{aligned} u_t + \frac{\Delta t}{2} \Delta t u_{tt} - a_j^2 \left[ u_{xx} + \frac{\Delta x^2}{12} u_{xxxx} \right] \\ = \frac{\Delta t}{2} u_{tt} - \frac{a^2 \Delta x^2}{12} u_{xxxx}, \end{aligned} \quad (10.54)$$

wobei wir die benutzt haben, dass  $u$  die PDG erfüllt. Wir sehen, dass der Fehler für  $\Delta t \rightarrow 0$  und zugleich  $\Delta x \rightarrow 0$  verschwindet.<sup>1</sup> In diesem Fall nennt man die Differenzgleichung *konsistent* mit der ursprünglichen PDG.

Für *konstantes*  $a^2$  folgt aus  $u_t = a^2 u_{xx}$  durch Ableiten nach  $t$ :

$$u_{tt} = a^2 u_{xxt} = a^2 u_{ttx} = a^4 u_{xxxx}. \quad (10.55)$$

Für  $a^2 = \text{const}$  verschwindet daher der Fehler in der führenden Ordnung, wenn wir die Diskretisierungsschritte so wählen, dass

$$\Delta t = \frac{\Delta x^2}{6a^2} \quad (10.56)$$

gilt. Es ist immer sinnvoll, den Fehler in dieser Art abzuschätzen, bevor man die Numerik implementiert. Man beachte, dass für diese spezielle Wahl offensichtlich

$$\frac{a^2 \Delta t}{\Delta x^2} = \frac{1}{6} < \frac{1}{2} \quad (10.57)$$

gilt, so dass das Stabilitätskriterium auch erfüllt ist.

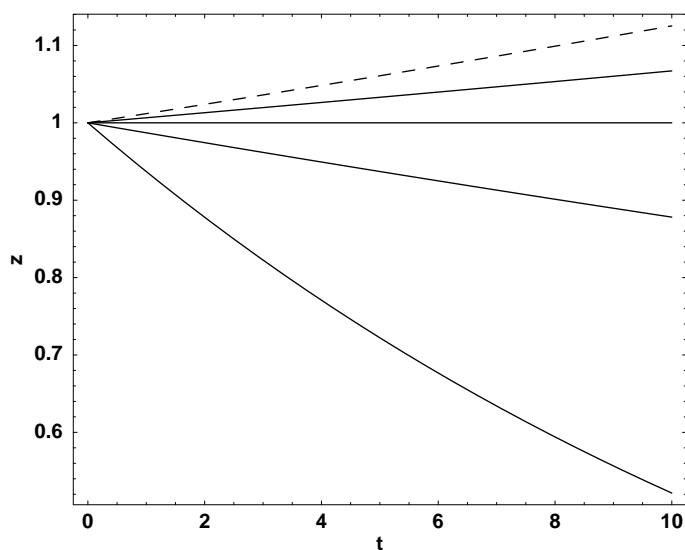


Abbildung 23: Das Verhältnis  $z = u_{jn}/u(x,t)$  von Näherungslösung und exakter Lösung für das Beispiel aus dem Text mit  $a = 1$  und  $K = 2$ .  $z$  ist unabhängig von  $x$ . Durchgezogene Kurven:  $\Delta x = 1/100$ ,  $a^2 \Delta t / \Delta x^2 = 1/12, 1/6$  (optimal),  $1/3, 1/2$  (von oben nach unten). Gestrichelte Kurve:  $\Delta x = 1/10$ ,  $a^2 \Delta t / \Delta x^2 = 1/6$  (optimal). Man erkennt, dass die optimale Wahl von  $\Delta t$  im Fall von  $\Delta x = 1/100$  (hundert Punkte in  $x$ -Richtung) zu einem sehr kleinen Fehler führt.

In der Differenzgleichung (10.45) wird die Zeitableitung eigentlich nicht für  $t = n\Delta t$ , sondern für  $t = (n + 1/2)\Delta t$  angehäert. Diese Beobachtung legt es nahe, auch die räumliche Ableitung für diese Zwischenzeit anzunähern. Diese Idee führt auf die *Crank-Nicholson-Methode*,

$$\frac{u_{j,n+1} - u_{jn}}{\Delta t} - a_j^2 \frac{u_{j+1,n} - 2u_{jn} + u_{j-1,n}}{2\Delta x^2} - a_j^2 \frac{u_{j+1,n+1} - 2u_{jn+1} + u_{j-1,n+1}}{2\Delta x^2} = 0. \quad (10.58)$$

Dies ist eine implizite Gleichung für die  $u_{j,n+1}$  als Funktionen der  $u_{j,n}$ .

Zum Schluss besprechen wir noch ein Beispiel der Methode der Differenzgleichungen für ein *Randwertproblem* für eine elliptische PDG. Die PDG (hier die Poisson-Gleichung) laute

$$u_{xx} + u_{yy} = g \quad \text{auf } F, \quad (10.59)$$

$$u = f \quad \text{auf } \partial F, \quad (10.60)$$

wobei  $f$  and  $g$  i.A. Funktionen sind.  $F$  wird in geeigneten Koordinaten in ein regelmäßiges Gitter eingeteilt, einschließlich von Randpunkten. Wir betrachten hier den Fall eines Quadrats  $F$  mit der Seitenlänge  $L$ . Dann sind kartesische Koordinaten und ein Quadratgitter angemessen, also

$$x = i \Delta x, \quad y = j \Delta y = j \Delta x, \quad (10.61)$$

<sup>1</sup>Höhere Ordnungen der Taylor-Entwicklung erhalten höhere Potenzen von  $\Delta t$  und  $\Delta x$  und verschwinden daher noch schneller.

mit  $i, j = 0, 1, \dots, N$ , wobei

$$N = \frac{L}{\Delta x}. \quad (10.62)$$

Weiter sei

$$u_{ij} := u(i\Delta x, j\Delta x) \quad (10.63)$$

und entsprechend für  $f, g$ . Die  $4N$  Randwerte  $u_{0j}, u_{Nj}, u_{i0}, u_{iN}$  sind vorgegeben, zu bestimmen sind die  $(N+1)^2 - 4N = (N-1)^2$  Werte  $u_{ij}$  an inneren Punkten. Das geschieht näherungsweise mit Hilfe der Differenzgleichungen

$$\frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 4u_{ij}}{\Delta x^2} = g_{ij}. \quad (10.64)$$

Die linke Seite ist die einfachste diskrete Näherung für den Laplace-Operator  $\nabla^2$ .<sup>2</sup> Im Falle der Laplace-Gleichung,  $g_{ij} = 0$ , bedeutet die Differenzgleichung, dass  $u_{ij}$  an jedem Gitterplatz der *Mittelwert* der Werte an den vier Nachbarplätzen ist. Das ist die diskrete Näherung an den Mittelwertsatz für harmonische Funktionen.

Gleichung (10.64) enthält eine Gleichung pro innen liegendem Gitterpunkt, also  $(N-1)^2$  lineare Gleichungen. Diese reichen also aus, um die  $(N-1)^2$  unbekanntes  $u_{ij}$  im Inneren zu bestimmen. Eine Möglichkeit ist, das Gleichungssystem direkt zu lösen, dies entspricht der Inversion einer  $(N-1)^2 \times (N-1)^2$ -Matrix [oder einer  $(N-1)^3 \times (N-1)^3$ -Matrix in drei Dimensionen], was schnell numerisch aufwendig wird.

Direkter Lösung oft überlegen ist die *Relaxations-Methode*: Wir lösen die Differenzgleichung (10.64) nach  $u_{ij}$  auf (hierfür existieren natürlich mehrere Möglichkeiten, eventuell mit Umbenennung der Indizes),

$$u_{ij} = \frac{1}{4} (u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - \Delta x^2 g_{ij}). \quad (10.65)$$

Der aus den  $u_{ij}$ , die diese Gleichung erfüllen, gebildete Lösungsvektor ist offenbar ein *Fixpunkt* der Rekursionsgleichung

$$u_{ij}^{(n+1)} = \frac{1}{4} (u_{i,j+1}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n)} + u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i-1,j}^{(n)} - \Delta x^2 g_{ij}), \quad (10.66)$$

wobei der Superskript die Nummer des Iterationsschrittes bezeichnet. Daraus ergibt sich das folgende Verfahren der *Jacobi-Relaxation*:

1. Starte mit groben Schätzwerten für die  $u_{ij}^{(0)}$ ,
2. berechne neue Werte mittels Gl. (10.66),
3. ist noch keine Konvergenz erreicht [etwa weil  $|u_{ij}^{(n+1)} - u_{ij}^{(n)}| > \epsilon$  mit einem vorgegebenen absoluten Fehler  $\epsilon$  für alle  $i, j$ ], gehe zurück zu Schritt 2.

Eine Variante, die besser konvergiert und Speicherplatz spart, besteht darin, nicht alle  $u_{ij}^{(n)}$  aufzuwahren, bis der Iterationsschritt zu Ende ist. Anstelle von Gl. (10.66) verwendet man

$$u_{ij}^{(n+1)} = \frac{1}{4} (u_{i,j+1}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n+1)} + u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i-1,j}^{(n+1)} - \Delta x^2 g_{ij}). \quad (10.67)$$

Hier werden die  $u_{ij}$  mit anwachsenden  $i$  und  $j$  iteriert; die Werte links und unterhalb eines gegebenen Gitterpunktes sind daher schon „neu“. Dieses Vorgehen heißt *Gauß-Seidel-Verfahren*.

In praktischen Rechnungen stellt sich oft heraus, dass es die Konvergenz beschleunigt, wenn man nicht den vollen Wert der rechten Seite von z.B. Gl. (10.67) verwendet, sondern ein gewichtetes Mittel zwischen dem neuen und dem alten Wert von  $u_{ij}$ , also hier

$$u_{ij}^{(n+1)} = (1 - \alpha) u_{ij}^{(n)} + \frac{\alpha}{4} (u_{i,j+1}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n+1)} + u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i-1,j}^{(n+1)} - \Delta x^2 g_{ij}), \quad (10.68)$$

wobei  $\alpha$  eine geeignet gewählte reelle Zahl ist. Für  $\alpha < 1$  ( $\alpha > 1$ ) spricht man von Unterrelaxation (Überrelaxation). Wir diskutieren hier nicht die Theorie hinter der optimalen Wahl von  $\alpha$ , sondern geben nur an, dass

- $\alpha = 1$  für Jacobi-Relaxation,
- $\alpha = 2 - 2 \sin(\pi/N)$  für Gauß-Seidel-Relaxation

---

<sup>2</sup>Weitere solche Näherungen, auch für andere Differentialoperatoren finden sich im Buch von Abramowitz und Stegun.

die optimalen Werte darstellen. In dieser Theorie wird zunächst eine Rekursionsgleichung für die *Abweichung* von  $u_{ij}^{(n)}$  vom Fixpunkt hergeleitet. Dann wird gezeigt, dass die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix dieser Gleichung betragsmäßig möglichst klein sein müssen, um schnelle Konvergenz zu erreichen. Tatsächlich hängt die Geschwindigkeit der Konvergenz vom betragsmäßig größten Eigenwert ab. Dann wird  $\alpha$  so gewählt, dass dieser Eigenwert betragsmäßig minimal ist. Es zeigt sich, dass das Gauß-Seidel-Verfahren mit optimalem  $\alpha$  *sehr viel schneller* konvergiert, als die Jacobi-Relaxation.

## 10.5 Monte-Carlo-Verfahren

In *Monte-Carlo-Verfahren* verwendet man Zufallszahlen, um ein deterministisches Problem zu lösen. Wir wollen eine Monte-Carlo-Methode zur Lösung der Laplace-Gleichung mit Dirichlet-Randbedingungen besprechen, die sich auch für andere Gleichungstypen verallgemeinern läßt.

Wir suchen die Lösung der PDG

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{auf } V, \tag{10.69}$$

$$u = f \quad \text{auf } \partial V \tag{10.70}$$

mit einer vorgegebenen Funktion  $f$ .  $V$  sei ein  $n$ -dimensionales Volumen, wobei  $n$  insbesondere *groß* sein kann – in *hochdimensionalen* Räumen sind Monte-Carlo-Verfahren typischerweise anderen Methoden überlegen. Wir teilen  $V$  in geeigneten Koordinaten in ein regelmäßiges *hyperkubisches* Gitter ein (d.h. die Gitterkonstanten sind in allen  $n$  Richtungen gleich).

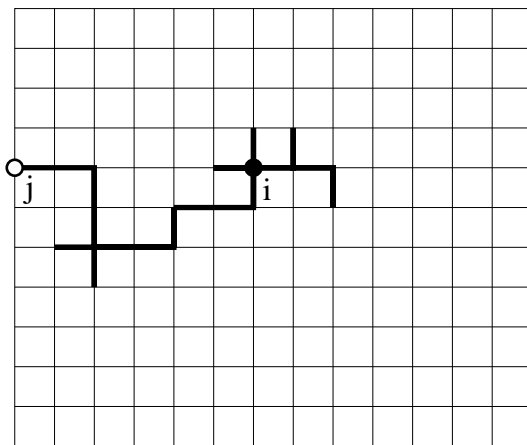


Abbildung 24: Ein *random walk* auf einem Quadratgitter, ausgehend von einem Punkt  $\mathbf{R}_i$  und endend bei einem Randpunkt  $\mathbf{R}_j$ .

Um eine Näherungslösung für  $u$  an einem Gitterpunkt  $\mathbf{R}_i$  zu erhalten, verwenden wir folgenden Algorithmus:

1. Führe eine große Anzahl von *random walks* in der folgenden Weise aus, beginnend vom Punkt  $\mathbf{R}_i$ :
  - (a) gehe vom gegebenen Punkt mit gleicher Wahrscheinlichkeit  $1/2^n$  zu einem zufälligen Nachbarpunkt,
  - (b) wiederhole dies so lange, bis ein Randpunkt erreicht ist.

Der Randpunkt  $\mathbf{R}_j$  werde bei insgesamt  $N$  *random walks*  $N_j$ -mal erreicht. Dann sind

$$P_j^{(i)} = \frac{N_j}{N} \tag{10.71}$$

Schätzwerte für die *Wahrscheinlichkeiten* die Randpunkte  $\mathbf{R}_j$  zu erreichen. Offenbar ist

$$\sum_j P_j^{(i)} = 1 \tag{10.72}$$

(Summe über alle Randpunkte), da jeder *random walk* irgendwann am Rand endet.

2. Die Näherungslösung ist dann

$$u_i \equiv u(\mathbf{R}_i) \approx \sum_j P_j^{(i)} f_j, \tag{10.73}$$

wobei

$$f_j := f(\mathbf{R}_j). \tag{10.74}$$

Warum funktioniert dieses Verfahren? Wenn der Startpunkt schon am Rand liegt, so endet der *random walk* sofort mit

$$P_j^{(j)} = 1 \quad (10.75)$$

und

$$u_j = f_j, \quad (10.76)$$

die Randbedingung ist also exakt erfüllt.

Für einen Startpunkt im Inneren machen wir uns klar, dass der *random walk* kein „Gedächtnis“ hat: Passiert der *random walk* einen Punkt  $\mathbf{R}_k$ , so sind die Wahrscheinlichkeiten, von dort schließlich den Randpunkt  $\mathbf{R}_j$  zu erreichen wieder  $P_j^{(k)}$ . Der *erste* Schritt geht mit derselben Wahrscheinlichkeit  $1/2^n$  in jede Richtung, also gilt

$$P_j^{(i)} = \sum_{k: \text{Nachbarn von } i} \frac{1}{2^n} P_j^{(k)}. \quad (10.77)$$

Damit folgt für die Näherungslösung

$$u_i = \frac{1}{2^n} \sum_j \sum_{k: \text{Nachbarn von } i} P_j^{(k)} f_j = \frac{1}{2^n} \sum_{k: \text{Nachbarn von } i} u_k. \quad (10.78)$$

Das ist aber gerade die diskrete Näherung an den Mittelwertsatz, die wir im letzten Abschnitt besprochen hatten!  $u_i$  ist also tatsächlich die diskrete Näherung einer harmonischen Funktion.

Bemerkungen:

- Die Wahrscheinlichkeiten  $P_j^{(i)}$  sind unabhängig von den  $f_i$  auf dem Rand. Die  $P_j^{(i)}$  müssen also nur *einmal* berechnet werden und sind somit verwandt mit einer Green-Funktion.
- Dieses Verfahren funktioniert auch für sehr kompliziert geformte Gebiete  $V$  (die aber evtl. viele Gitterpunkte erfordern) und, wie erwähnt, besonders in hohen Dimensionen.

Wir betrachten noch kurz die Verallgemeinerung auf den Gleichungstyp

$$\sum_{\nu=1}^n a(\mathbf{r}) u_{x_\nu x_\nu} = 0 \quad \text{auf } V. \quad (10.79)$$

Wir besprechen das Monte-Carlo-Verfahren für den zweidimensionalen Fall, um die Notation einfach zu halten:

$$a(x, y) u_{xx} + b(x, y) u_{yy} = 0. \quad (10.80)$$

Zunächst schreiben wir  $u_{ij} = u(i\Delta x, j\Delta y)$  und entsprechend für  $a$  und  $b$  und ersetzen die zweiten Ableitungen durch diskrete Näherungen,

$$u_{xx} \cong \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2}, \quad (10.81)$$

$$u_{yy} \cong \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{\Delta x^2}. \quad (10.82)$$

Dann lautet die genäherte Gleichung, aufgelöst nach  $u_{ij}$ ,

$$u_{ij} = \frac{a_{ij}u_{i+1,j} + a_{ij}u_{i-1,j} + b_{ij}u_{i,j+1} + b_{ij}u_{i,j-1}}{2(a_{ij} + b_{ij})}. \quad (10.83)$$

Also wird die Mittelwertformel (10.78) durch ein *gewichtetes Mittel* ersetzt. Im Monte-Carlo-Verfahren müssen wir jetzt nur die Wahrscheinlichkeiten der Einzelschritte nicht alle gleich wählen, sondern als

$$w_{i \rightarrow j} = \begin{cases} \frac{a_{ij}}{2(a_{ij} + b_{ij})} & \text{für Schritte in } x\text{-Richtung} \\ \frac{b_{ij}}{2(a_{ij} + b_{ij})} & \text{für Schritte in } y\text{-Richtung.} \end{cases} \quad (10.84)$$

Ähnliche Verallgemeinerungen lassen wir für andere Gleichungstypen finden.

## A Literatur

Es gibt sehr viele Bücher über PDG's. Eine ganze Reihe davon richtet sich an Anwender, insbesondere in der Physik, und weniger an reine Mathematiker. Eine kleine Auswahl:

- G.F. Carrier und C.E. Pearson, *Partial Differential Equations* (Academic Press, New York, 1976). Gutes Buch, leider nicht mehr im Druck, teilweise etwas unklar geschrieben, hohes Gewicht auf Aufgaben, Integraltransformationen kommen zu kurz.
- R. Courant und D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Band 2, Nachdruck (Wiley, 1989). Der Klassiker von 1924. Sehr umfangreiche Diskussion von Lösungsmethoden, zugeschnitten auf die Anwendung in der Physik, geht weit über den Stoff hinaus, der in dieser Vorlesung behandelt werden kann. Teuer (80 Euro für Band 2).
- S.J. Farlow, *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers* (Dover, New York, 1993). Weniger umfangreich, deckt aber den überwiegenden Teil der Vorlesung ab, zu knapp bei Gleichungen erster Ordnung und bei Green-Funktionen, umständliche Notation bei Green-Funktionen ohne  $\delta(x)$ . Erhältlich und ziemlich preiswert (15 Euro).
- H.F. Weinberger, *A First Course in Partial Differential Equations* (Dover, New York, 1995). Neuausgabe eines guten Buches von 1965, Betonung auf Methoden aus der Funktionentheorie (Kontourintegration), daher überwiegend für zwei Variablen, relativ viele Gleichungen und wenig Text, rechnet viele Beispiele durch, Green-Funktionen ohne  $\delta(x)$ . Aufgaben mit Lösungen. Erhältlich und ziemlich preiswert (18 Euro).
- T. Myint-U, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics* (American Elsevier, New York, 1973). Umfangreicher als Carrier/Pearson, mehr Formeln, weniger Text, nicht mehr im Druck.
- E. Infeld und G. Rowlands, *Nonlinear waves, solitons and chaos* (Cambridge University Press, Cambridge, 1990). Spezialbuch über nichtlineare PDG's.

Ein sehr gutes Buch für die Wiederholung der hier benötigten Elemente der Funktionentheorie ist W. Fischer und I. Lieb, *Funktionentheorie* (Vieweg, Braunschweig, 1988). Eigenschaften spezieller Funktionen und Formeln für die Diskretisierung von partiellen Ableitungen finden sich in M. Abramowitz und I. A. Stegun, *Pocketbook of Mathematical Functions* (Harri Deutsch, Thun, 1984).

## B Aufgaben

### B.1 Klassifikation von Partiellen Differentialgleichungen

Diskutieren Sie, in welchen Fällen die folgenden linearen Gleichungen hyperbolisch, parabolisch bzw. elliptisch sind.

(a) 
$$x(u_{xx} - u_{yy}) + x^2(u_x - u_y) = c$$

(b) 
$$u_t + \epsilon u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

(c) 
$$y u_{xx} + u_{yy} = 0$$

**Lösung:** (a)  $B^2 - 4AC = 4x^2 > 0$ , hyperbolisch. (b)  $B^2 - 4AC = 4\epsilon a^2$ , hyperbolisch für  $\epsilon > 0$ , parabolisch für  $\epsilon = 0$  (Diffusionsgleichung) und elliptisch für  $\epsilon < 0$ . Parabolische Gleichungen liegen auf der Grenze zwischen hyperbolischen und elliptischen. (c)  $B^2 - 4AC = -4y$ , hyperbolisch für  $y < 0$ , parabolisch für  $y = 0$  und elliptisch für  $y > 0$ . Hier ändert sich der Charakter im Definitionsgebiet, falls es  $y = 0$  enthält.

### B.2 Wärmeleitungsgleichung mit Neumann-Randbedingungen

Gegeben sei die PDG

$$u_t = k u_{xx}$$

für  $0 < x < 1$ ,  $0 < t < \infty$ , mit einer Konstanten  $k > 0$  und den Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \cos \pi x, \\ u_x(0, t) &= 0, \\ u_x(1, t) &= 0. \end{aligned}$$

(a) Welche physikalische Situation könnte durch diese Gleichung beschrieben werden?

(b) Lösen Sie die Gleichung mit Hilfe des Separationsansatzes. Zeigen Sie, dass, wenn  $u(x, t)$  eine Ladungsdichte darstellt, die Gesamtladung erhalten ist.

**Lösung:** Temperaturverteilung in einem dünnen Stab mit präparierter Anfangsverteilung und isolierten Enden (kein Wärmestrom).

Mit  $u(x, t) = X(x)T(t)$  ist:

$$\begin{aligned} XT' &= kX''T, \\ \frac{T'}{kT} &= \frac{X''}{X} \equiv C, \\ T' &= kCT, \\ X'' &= CX, \\ T(t) &= Ae^{kCt}, \\ X(x) &= B_+ e^{\sqrt{C}x} + B_- e^{-\sqrt{C}x}, \\ u(x, t) &= B_+ e^{kCt} e^{\sqrt{C}x} + B_- e^{kCt} e^{-\sqrt{C}x}. \end{aligned}$$

Anfangsbedingung:

$$\cos \pi x = \frac{e^{i\pi x} + e^{-i\pi x}}{2} = B_+ e^{\sqrt{C}x} + B_- e^{-\sqrt{C}x}$$

werden erfüllt für

$$B_+ = B_- = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad C = -\pi^2.$$

Daher

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e^{-k\pi^2 t} \cos \pi x, \\ u_x(x, t) &= -\pi e^{-k\pi^2 t} \sin \pi x, \end{aligned}$$

erfüllt auch die Randbedingungen  $u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$ .

Gesamtladung:

$$Q(t) = \int_0^1 dx u(x, t) = 0$$

für alle Zeiten  $t$ , also  $Q' = 0$ .

### B.3 Wärmeleitungsgleichung mit Relaxation

Betrachten Sie die PDG

$$u_t = a^2 u_{xx} - \frac{u}{\tau}$$

für  $0 < x < L$ ,  $0 < t < \infty$ , mit Konstanten  $a > 0$ ,  $\tau > 0$  und den Randbedingungen

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= u_1 \sin \frac{\pi x}{L}, \\u(0, t) &= 0, \\u(L, t) &= 0.\end{aligned}$$

Wir können  $u$  als Temperatur relativ zu einem Referenzwert, naheliegender ist die Umgebungstemperatur, interpretieren. Der Zusatzterm in der PDG beschreibt dann eine Temperaturabnahme (-zunahme), wenn die lokale Temperatur höher (niedriger) ist als der Referenzwert. Lösen Sie diese Gleichung.

**Lösung:** Separationsansatz

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

ergibt

$$\begin{aligned}XT' &= a^2 X''T - \frac{XT}{\tau}, \\ \frac{T'}{a^2 T} &= \frac{X''}{X} - \frac{1}{a^2 \tau} \equiv C, \\ T' &= a^2 CT, \\ X'' &= (C + 1/\tau)X.\end{aligned}$$

Weiter wie in der Vorlesung.

### B.4 Diffusions-Konvektions-Gleichung

Betrachten Sie die PDG

$$u_t = au_{xx} - bu_x \quad (a > 0, b > 0)$$

für  $0 < x < \infty$  (!),  $0 < t < \infty$  mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= 0, \\u(0, t) &= 1\end{aligned}$$

und  $u$  sei beschränkt.

Dieser Gleichungstyp tritt auf, wenn Energie, Teilchen usw. durch Diffusion *und* durch Konvektion transportiert werden. Konvektion bedeutet im einfachsten Fall eine gleichförmige Bewegung des gesamten Mediums, z.B. des stromführenden Stabes. Ein realistischerer Fall ist die Bewegung von Staubpartikeln in der Luft. Ist die Dichte  $u$  räumlich konstant, führt Konvektion nicht zu einer lokalen Änderung von  $u$ . Ist  $u$  dagegen nicht homogen, verschieben sich Bereiche hoher oder niedriger Dichte mit der Zeit. Es ist daher plausibel, den Konvektionsterm als linear in  $u_x$  anzusetzen.

(a) Interpretieren Sie die angegebenen Randbedingungen.

(b) Lösen Sie die Gleichung (Separationsansatz).

(c) Diskutieren Sie die Geschwindigkeit mit der sich die zum Zeitpunkt  $t = 0$  eingeschaltete Störung ausbreitet.

**Lösung:** Separationsansatz  $u(x, t) = X(x)T(t)$  ergibt

$$\begin{aligned}XT' &= aX''T - bX'T, \\ \frac{T'}{T} &= \frac{aX''}{X} - \frac{bX'}{X} \equiv C, \\ T' &= CT, \\ aX'' - bX' - CX &= 0.\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung für  $T$  ist offenbar  $T(t) = T_0 e^{Ct}$ . Die Forderung nach Beschränktheit von  $u$  erfordert  $C \leq 0$ .



Für die Gleichung für  $X$  machen wir den Ansatz  $X = X_0 e^{\lambda x}$  und erhalten

$$\begin{aligned} X_0(a\lambda^2 - b\lambda - C)e^{\lambda x} &= 0, \\ \lambda^2 - \frac{b}{a}\lambda - \frac{C}{a} &= 0, \\ \lambda &= \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} + \frac{C}{a}} = \frac{1}{2a} \left( b \pm \sqrt{b^2 + 4aC} \right). \end{aligned}$$

Beschränkt sind nur Lösungen mit  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  also  $\lambda = (1/2a)(b - \sqrt{b^2 + 4aC})$  und  $b^2 + 4aC \geq 0$  (für  $b^2 + 4aC < 0$  ist  $\lambda$  komplex mit positivem Realteil), also  $C \geq -b^2/4a$ .

Man sieht sofort, dass eine einzelne Lösung die Randbedingungen nicht erfüllen kann.

## B.5 Wärmeleitungsgleichung und Separation in zwei Dimensionen

Eine dünne, quadratische, thermisch isolierte Platte befinde sich zunächst im thermischen Gleichgewicht. Zur Zeit  $t = 0$  wird ihr durch einen kurzen Laserpuls in ihrem Mittelpunkt eine endliche Energie zugeführt. Pulsdauer und räumliche Ausdehnung des Laserstrahls seien vernachlässigbar. Wir benutzen die Kantenlänge als räumliche Einheit und die zugeführte Energie als Energieeinheit. Sei  $u(x, y, t)$  die Abweichung der inneren Energiedichte (oder Temperatur) vom Gleichgewicht.

Dann wird das System durch die folgende Wärmeleitungsgleichung beschrieben:

$$\begin{aligned} u_t &= a^2(u_{xx} + u_{yy}) \quad \text{für } 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ u_x(0, y, t) &= u_x(1, y, t) = 0, \\ u_y(x, 0, t) &= u_y(x, 1, t) = 0, \\ u(x, y, 0) &= \delta(x - 1/2) \delta(y - 1/2). \end{aligned}$$

(a) Lösen Sie diese Wärmeleitungsgleichung im Sinne einer Reihenentwicklung mittels des Separationsansatzes  $u = X(x)Y(y)T(t)$ . Sie benötigen *zwei* Separationskonstanten. Wählen Sie deren Vorzeichen so, dass sich in der Zeit abfallende und im Raum oszillierende Lösungen ergeben. Zeigen Sie zunächst, dass die Lösung für beliebige Anfangsbedingung

$$u(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn} e^{-\pi^2(m^2+n^2)a^2t} \cos m\pi x \cos n\pi y$$

lautet.

(b) Bestimmen Sie die Koeffizienten  $c_{mn}$  für die angegebene Anfangsbedingung.

(c) Wie sieht der *stationäre Zustand* aus, d.h.  $u(x, y, t)$  für  $t \rightarrow \infty$ ? Ist das Ergebnis vernünftig?

**Lösung:** (a) Separation  $u = XYT$ ,

$$\begin{aligned} XYT' &= a^2(X''Y + XY''), \\ \frac{T'}{a^2T} &= \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} \equiv -\lambda^2, \\ T' &= -\lambda^2 a^2 T, \\ T(t) &= e^{-\lambda^2 a^2 t}. \end{aligned}$$

Die räumliche Gleichung bringen wir wieder auf eine Form, in der die eine Variable nur auf der einen Seite und die andere auf der anderen auftritt:

$$\begin{aligned} \frac{X''}{X} &= -\lambda^2 - \frac{Y''}{Y} \equiv -\mu^2, \\ \frac{Y''}{Y} &= -\lambda^2 + \mu^2, \\ X(x) &= A_1 \sin \mu x + A_2 \cos \mu x, \\ Y(y) &= B_1 \sin \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} y + B_2 \cos \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} y. \end{aligned}$$

Mit den Randbedingungen eingesetzt:

$$\begin{aligned} X(x) &= \cos m\pi x \quad \text{mit } \mu = m\pi, \\ Y(y) &= \sin n\pi y \quad \text{mit } \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} = n\pi, \end{aligned}$$

mit  $m, n = 0, 1, 2, \dots$ . Dies führt auf die gesuchte Reihendarstellung

$$u(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn} e^{-\pi^2(m^2+n^2)a^2t} \cos m\pi x \cos n\pi y.$$

(b) Multipliziere beide Seiten der Anfangsbedingung mit einer allgemeinen Eigenfunktion und integriere über  $x, y$ . Die linke Seite ist

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \delta(x-1/2) \delta(y-1/2) \cos m'\pi x \cos n'\pi y &= \cos \frac{m'\pi}{2} \cos \frac{n'\pi}{2} \\ &= \begin{cases} (-1)^{m'/2+n'/2} & \text{für } m, n \text{ gerade,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \sum_{mn} c_{mn} \cos m'\pi x \cos m\pi x \cos n'\pi y \cos n\pi y \\ = \begin{cases} c_{m'n'} & \text{für } m' = n' = 0, \\ c_{m'n'}/2 & \text{für } m' = 0 \text{ und } n' > 0 \text{ oder } m' > 0 \text{ und } n' = 0, \\ c_{m'n'}/4 & \text{für } m', n' > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Also gilt

$$c_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{für } m = n = 0, \\ 2(-1)^{(m+n)/2} & \text{für } m, n \text{ gerade, } m+n > 0, mn = 0, \\ 4(-1)^{(m+n)/2} & \text{für } m, n \text{ gerade, } mn > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(c) Für  $t \rightarrow \infty$  überlebt nur der Term mit  $m = n = 0$ :

$$u(x, y, t \rightarrow \infty) = c_{00} \cos 0\pi x \cos 0\pi y = 1.$$

Dieses Ergebnis folgt auch sofort aus einem Erhaltungssatz.

## B.6 Diffusionsgleichung und Separation in drei Dimensionen

Betrachten Sie ein würfelförmiges Wasserbecken mit der Kantenlänge und Tiefe  $b$ . Das Wasser befinde sich in Ruhe. In der Mitte des Beckens werde an der Wasseroberfläche ein hoch konzentrierter Farbstoff eingebracht. Berechnen Sie die Verteilung des Farbstoffes für beliebige Zeiten unter der Annahme, dass der Transport nur durch Diffusion erfolgt.

(a) Stellen Sie dazu zunächst die Diffusionsgleichung und die Randbedingungen auf. Beachten Sie, dass kein Fluss durch die Oberfläche erfolgt. Die Anfangsbedingung ist eine Delta-Funktion, da der Farbstoff lokal eingebracht wird.

(b) Lösen Sie die Gleichung dann mittels des Separationsansatzes  $u(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t)$ . Wenden Sie das Argument, das zur Einführung einer Separationskonstanten führt, mehrmals an, um das Problem auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurück zu führen. Machen Sie ggf. plausible Annahmen über das Vorzeichen der Separationskonstanten. Leiten Sie so die Reihendarstellung

$$u(x, y, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} c_{mnp} e^{-\pi^2 \sqrt{m^2+n^2+p^2} a^2 t / b^2} \cos \left( m\pi \frac{x}{b} \right) \cos \left( n\pi \frac{y}{b} \right) \cos \left( p\pi \frac{z}{b} \right)$$

her.

(c) Entwickeln Sie die Anfangsbedingung in die gefundenen orthogonalen Funktionen und bestimmen Sie so die Koeffizienten  $c_{mnp}$ .

**Lösung:** (a) Formulierung des Problems:

$$\begin{aligned} u_t &= a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) && \text{für } 0 < x < l, 0 < y < l, 0 < z < h, \\ u_x(0, y, z, t) &= u_x(b, y, z, t) = 0, \\ u_y(x, 0, z, t) &= u_y(x, b, z, t) = 0, \\ u_z(x, y, 0, t) &= u_z(x, y, b, t) = 0, \\ u(x, y, z, 0) &= \delta(x-b/2) \delta(y-b/2) \delta(z-b^-). \end{aligned}$$

Die Notation  $b^-$  soll andeuten, dass die Delta-Funktion ganz im Inneren des Definitionsbereiches liegt.

(b) Separation:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= X(x)Y(y)Z(z)T(t), \\ XYZT' &= a^2(X''YZ + XY''Z + XYZ''), \\ \frac{T'}{a^2T} &= \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} \equiv -\lambda^2, \\ T' &= -\lambda^2 a^2 T \end{aligned}$$

mit der Lösung  $T(t) = e^{-\lambda^2 a^2 t}$ . Weiter gilt

$$\begin{aligned} \frac{X''}{X} &= -\lambda^2 - \frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z} \equiv -\mu^2, \\ \frac{Y''}{Y} &= -\lambda^2 + \mu^2 - \frac{Z''}{Z} \equiv -\nu^2, \\ X(x) &= A_1 \sin \mu x + A_2 \cos \mu x, \\ Y(y) &= B_1 \sin \nu y + B_2 \sin \nu y, \\ Z(z) &= C_1 \sin \sqrt{\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2} z + C_2 \cos \sqrt{\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2} z. \end{aligned}$$

Mit den Randbedingungen eingesetzt:

$$\begin{aligned} X(x) &= \cos\left(m\pi \frac{x}{b}\right) & \mu &= m\pi/b, \\ Y(y) &= \cos\left(n\pi \frac{y}{b}\right) & \nu &= n\pi/b, \\ Z(z) &= \cos\left(p\pi \frac{z}{b}\right) & \sqrt{\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2} &= p\pi/b. \end{aligned}$$

Dies führt auf die gesuchte Reihendarstellung

$$u(x, y, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} c_{mnp} e^{-\pi^2 \sqrt{m^2+n^2+p^2} a^2 t / b^2} \cos\left(m\pi \frac{x}{b}\right) \cos\left(n\pi \frac{y}{b}\right) \cos\left(p\pi \frac{z}{b}\right).$$

(c) Entwicklung der Anfangsbedingung:

$$\delta(x - b/2) \delta(y - b/2) \delta(z - b) \equiv \sum_{mnp} c_{mnp} \cos\left(m\pi \frac{x}{b}\right) \cos\left(n\pi \frac{y}{b}\right) \cos\left(p\pi \frac{z}{b}\right).$$

Multiplikation mit Basisfunktion und Integration:

$$\begin{aligned} &\int dx dy dz \delta(x - b/2) \delta(y - b/2) \delta(z - b) \cos\left(m'\pi \frac{x}{b}\right) \cos\left(n'\pi \frac{y}{b}\right) \cos\left(p'\pi \frac{z}{b}\right) \\ &= \cos \frac{m'\pi}{2} \cos \frac{n'\pi}{2} \cos p'\pi \\ &= \int dx dy dz \sum_{mnp} c_{mnp} \cos\left(m'\pi \frac{x}{b}\right) \cos\left(m\pi \frac{x}{b}\right) \cos\left(n'\pi \frac{y}{b}\right) \cos\left(n\pi \frac{y}{b}\right) \cos\left(p'\pi \frac{z}{b}\right) \cos\left(p\pi \frac{z}{b}\right) \\ &= c_{m'n'p'} \frac{b^3}{8}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} c_{mnp} &= \frac{8}{b^3} \cos \frac{m\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2} \cos p\pi \\ &= \begin{cases} \frac{8}{b^2} (-1)^{m/2+n/2+p} & \text{für } m \text{ und } n \text{ gerade,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Damit ist die Lösung bestimmt.

## B.7 Laplace-Transformation 1

Gegeben sei ein thermisch isolierter Stab mit konstantem Querschnitt, der als unendlich lang betrachtet werden kann. Der Stab befinde sich im thermischen Gleichgewicht. Zur Zeit  $t = 0$  wird ein Ende des

Stabs plötzlich aufgeheizt und bei konstanter Temperatur gehalten. Die Abweichung der inneren Energiedichte (oder Temperatur) vom Gleichgewicht sei  $u(x, t)$ . Mit geeigneter Wahl der Einheiten lautet die entsprechende Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} && \text{für } 0 < x < \infty, 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) &= 0, \\ u(0, t) &= 1. \end{aligned}$$

Weiter soll  $u$  für  $x \rightarrow \infty$  beschränkt bleiben. Beachten Sie die Unstetigkeit der Randbedingungen.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe einer Laplace-Transformation nach der Zeit  $t$ , dass die Lösung dieser Wärmeleitungsgleichung lautet

$$u(x, t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

Beachten Sie dabei die in der Vorlesung angegebene (oder in der Literatur zu findende) Tabelle von Laplace-Transformationen. Die komplementäre Fehlerfunktion ist definiert als

$$\operatorname{erfc}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty dy e^{-y^2}.$$

Skizzieren Sie die Lösung  $u(x, t)$  für einige Werte von  $a^2 t$ . Diskutieren Sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit des von  $x = 0, t = 0$  ausgehenden Signals.

(b) Man könnte auch auf die Idee kommen, das angegebene Problem mit Hilfe einer Laplace-Transformation nach dem Ort  $x$  zu lösen. Führen Sie die ersten Schritte der Methode aus, bis Sie sehen, wieso dieser Versuch hier scheitert.

**Lösung:** (a) Siehe Skript. (b) Man erhält eine gewöhnliche Differentialgleichung für  $U(s, t)$ , in der, wegen der zweiten Ableitung nach  $x$ , die Größe  $u_x(0, t)$  auftaucht. Diese Größe ist aber nicht gegeben.

## B.8 Laplace-Transformation 2

Betrachten Sie die Diffusionsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} && \text{für } 0 < x < \infty, 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) &= 0, \\ u(0, t) &= f(t). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Lösung für die Laplace-Transformierte

$$U(x, s) = \int_0^\infty dt e^{-st} u(x, t).$$

Benutzen Sie dann den Faltungssatz für Laplace-Transformierte um zu zeigen, dass die Lösung

$$u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \frac{f(t-\tau)}{\tau^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2\tau}\right)$$

lautet.

## B.9 Wellengleichung in der Elektrodynamik

In einem Isolator ohne freie Ladungen und Ströme lauten die Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \end{aligned}$$

zusammen mit den Materiegleichungen  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ . Wir nehmen  $\epsilon$  und  $\mu$  als konstant an. Leiten Sie die Wellengleichung für  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  her.

## B.10 Quadratische Membran

(a) Betrachten Sie eine quadratische Membran mit der Seitenlänge  $a$ , die an allen Rändern bei  $x, y = 0$  und  $x, y = a$  befestigt ist. Bestimmen Sie die Eigenmoden und dazugehörigen Eigenfrequenzen. Kommen Eigenfrequenzen mehrfach vor? Wenn ja, welche und wie oft?

(b) Zeigen Sie, dass

$$u(x, y, t) = \sin \omega t \left( \cos \frac{2\pi x}{a} - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}$$

eine Eigenmode ist, d.h. die räumliche Gleichung erfüllt. Welche Eigenfrequenz gehört zu dieser Mode? Wie sehen ihre Knotenlinien aus? In welcher Beziehung steht sie zu den in (a) gefundenen Eigenmoden?

(c) Diskutieren Sie entsprechend die Lösung

$$u(x, y, t) = \sin \omega' t \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a} + \cos \omega' t \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}.$$

## B.11 Zusammenhang der Lösungen von Poisson- und Laplace-Gleichung

Mit dieser Aufgabe soll erläutert werden, wie eine allgemeine Poisson-Gleichung auf einfachere Probleme zurückgeführt werden kann.

(a) Wir suchen die Lösung  $u(\mathbf{r})$  der Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 u = f$$

auf einem  $n$ -dimensionalen Gebiet  $D$  mit der Dirichlet-Randbedingung

$$u = g$$

auf  $\partial D$ .  $f$  und  $g$  sind geeignete Funktionen. Sei  $v(\mathbf{r})$  eine *beliebige* spezielle Lösung derselben Poisson-Gleichung auf  $D$  ohne Rücksicht auf die Randbedingung. Sei  $w(\mathbf{r})$  die Lösung der *Laplace*-Gleichung

$$\nabla^2 w = 0$$

auf  $D$  mit der Randbedingung

$$w = g - v$$

auf  $\partial D$ . Zeigen Sie, dass

$$u = v + w$$

die Lösung der ursprünglichen Gleichung ist. (Dieses Verfahren ist eine Verallgemeinerung der für lineare inhomogene gewöhnliche Differentialgleichungen geltenden Regel „spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung plus allgemeine Lösung der homogenen Gleichung“.)

(b) Bestimmen Sie die Lösung der Poisson-Gleichung

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\phi\phi} = a = \text{const}$$

auf dem Kreis  $r < R$ , wobei  $u(r = R, \phi)$  vorgegeben sei. Sie können die Poisson-Integralformel benutzen.

(c) Für welche möglichst große Klasse von partiellen Differentialgleichungen läßt sich das Verfahren aus (a) verallgemeinern? Wie müssen dazu die Randbedingungen beschaffen sein? Geben Sie ein Beispiel an, in dem die *Randbedingungen* die Anwendung des Verfahrens verhindern.

**Lösung:** (a) Die Poisson-Gleichung ist erfüllt:

$$\nabla^2 u = \nabla^2 v + \nabla^2 w = f + 0 = f.$$

Die Randbedingungen sind ebenfalls erfüllt: Auf  $\partial D$  ist

$$u = v + w = v + g - v = g.$$

(b) Ansatz für eine spezielle Lösung:

$$\begin{aligned} v(r, \phi) &= Ar^n, \\ \Rightarrow v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} u_{\phi\phi} &= An(n-1)r^{n-2} + Anr^{n-2} = An^2r^{n-2}. \end{aligned}$$

Dies erfordert  $n = 2$ ,  $A = a/4$ , also ist eine spezielle Lösung

$$v(r, \phi) = \frac{a}{4} r^2.$$

Da die Funktion selbst in der PDG nicht auftritt, können wir noch eine Konstante addieren. Diese wählen wir so, dass  $v$  auf dem Rand verschwindet – das ist zwar nicht notwendig, vereinfacht aber die Rechnung. Also haben wir

$$v(r, \phi) = \frac{a}{4} (r^2 - R^2).$$

Die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung muss die Randbedingung

$$w(R, \phi) = u(R, \phi) - v(R, \phi) = u(R, \phi)$$

erfüllen. Nach der Poisson-Integralformel erhalten wir

$$u(r, \phi) = \frac{a}{4} (r^2 - R^2) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \phi)} u(R, \alpha).$$

(c) Lineare Gleichungen mit linearen (additiven) Randbedingungen. Beispiel, bei dem es nicht funktioniert:  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  auf dem Einheitskreis mit  $u^2 + (\partial u / \partial n)^2 = 1$  auf dem Rand.

## B.12 Zusammenhang zwischen holomorphen und harmonischen Funktionen

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der Real- und Imaginärteil einer Funktion  $f$ , die in einer Teilmenge  $G$  der Menge der komplexen Zahlen holomorph ist, in  $G$  harmonisch sind. Ebenso wurde gezeigt, dass jede harmonische Funktion Realteil (und Imaginärteil) einer holomorphen Funktion ist.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe dieses Zusammenhangs, also *nicht* durch Einsetzen in die Laplace-Gleichung, dass die folgenden Funktionen harmonisch sind [( $x, y$ ) sind kartesische und ( $r, \phi$ ) Polarkoordinaten]:

$$\begin{aligned} u_1 &= x = r \cos \phi, \\ u_2 &= r^2 \sin 2\phi, \\ u_3 &= \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0). \end{aligned}$$

(b) Lösen Sie die Laplace-Gleichung

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{für } -\infty < x < \infty, 0 < y < \infty$$

für die reelle Funktion  $u(x, y)$  mit der Randbedingung

$$u(x, 0) = e^x.$$

Ist die Lösung auf diesem unbeschränkten Gebiet eindeutig?

(c) Betrachten Sie die Funktion

$$f(z) = f(x + iy) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{z-1}{z+1}$$

Steht  $\ln$  für den Hauptwert des Logarithmus,<sup>1</sup> so hat diese Funktion einen Schnitt, d.h. ist unstetig, entlang des Intervalls  $[-1, 1]$  auf der reellen Achse. Ansonsten ist  $f$  holomorph. Bestimmen Sie die Funktion

$$u(x, y) = \text{Im } f(x + iy),$$

<sup>1</sup>Zur Erinnerung: Für  $z = re^{i\phi}$ ,  $-\pi < \phi \leq \pi$ , ist der Hauptwert des komplexen Logarithmus definiert durch

$$\ln z = \ln(re^{i\phi}) := \ln r + i\phi = \ln |z| + i \arg z.$$

z.B. in Polarkoordinaten (wer Zugang zu einem geeigneten Programm hat, sollte die Funktion einmal plotten), und insbesondere den Grenzwert von  $u$  bei Annäherung an das Intervall  $[-1, 1]$  von positiven bzw. negativen  $y$ . Formulieren Sie ein Randwertproblem, das  $u(x, y)$  erfüllt.

**Lösung:** (a)

$$\begin{aligned} u_1 &= \operatorname{Re} z, \\ u_2 &= \operatorname{Im} z^2, \\ u_3 &= \operatorname{Re} \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

(b) Auf dem Rand ist

$$u(x, 0) = e^x \cos 0 = e^x \cos y|_{y=0} = \operatorname{Re} e^z|_{y=0}.$$

Eine Lösung ist damit

$$u(x, y) = \operatorname{Re} e^z = e^x \cos y.$$

Die Lösung ist nicht eindeutig, da z.B.

$$v(x, y) = e^x \cos y + ay$$

ebenfalls eine Lösung ist.

(c) Wir haben

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \frac{1}{\pi} \ln \frac{z-1}{z+1} &= \frac{1}{\pi} \arg \frac{re^{i\phi} - 1}{re^{i\phi} + 1} = \frac{1}{\pi} \arg \frac{(re^{i\phi} - 1)(re^{-i\phi} + 1)}{(re^{i\phi} + 1)(re^{-i\phi} + 1)} \\ &= \frac{1}{\pi} \arg \frac{r^2 + 2ir \sin \phi - 1}{r^2 + 2r \cos \phi + 1} = \frac{1}{\pi} \arctan(r^2 - 1, 2r \sin \phi) \end{aligned}$$

(die Funktion  $\arctan(x, y)$  ist der Arcustangens von  $y/x$  unter Berücksichtigung des Quadranten, in dem  $(x, y)$  liegt) und

$$\lim_{y \rightarrow 0^\pm} \operatorname{Im} \frac{1}{\pi} \ln \frac{x + iy - 1}{x + iy + 1} = \frac{1}{\pi} \lim_{y \rightarrow 0^\pm} [\arg(x - 1 + iy) - \arg(x + 1 + iy)] = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1, \\ \pm 1 & \text{für } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Die Funktion  $u$  erfüllt die Laplace-Gleichung  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  für alle reellen  $x$  und  $y$  außer bei  $(x, 0)$  mit  $-1 \leq x \leq 1$ , mit der Dirichlet-Randbedingung

$$\lim_{y \rightarrow 0^\pm} u(x, y) = \pm 1 \quad \text{für } -1 < x < 1.$$

## B.13 Charakteristiken in mehr als zwei Dimensionen

Betrachten Sie die Wellengleichung in zwei Raumdimensionen,

$$c^2 (u_{xx} + u_{yy}) - u_{tt} = 0.$$

Auf einer Fläche  $S$  definiert durch  $\xi(x, y, t) = 0$  seien Cauchy-Daten vorgegeben. Wir führen drei Scharen von Flächen  $\xi = \text{const}$ ,  $\eta = \text{const}$ ,  $\zeta = \text{const}$  ein, so dass  $(\xi, \eta, \zeta)$  ein lokales Koordinatensystem bilden.

(a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung in den neuen Koordinaten  $(\xi, \eta, \zeta)$  lautet:

$$\begin{aligned} &(c^2 \xi_x^2 + c^2 \xi_y^2 - \xi_t^2) u_{\xi\xi} + (c^2 \eta_x^2 + c^2 \eta_y^2 - \eta_t^2) u_{\eta\eta} + (c^2 \zeta_x^2 + c^2 \zeta_y^2 - \zeta_t^2) u_{\zeta\zeta} \\ &+ 2(c^2 \xi_x \eta_x + c^2 \xi_y \eta_y - \xi_t \eta_t) u_{\xi\eta} + 2(c^2 \xi_x \zeta_x + c^2 \xi_y \zeta_y - \xi_t \zeta_t) u_{\xi\zeta} + 2(c^2 \eta_x \zeta_x + c^2 \eta_y \zeta_y - \eta_t \zeta_t) u_{\eta\zeta} \\ &+ (c^2 \xi_{xx} + c^2 \xi_{yy} - \xi_{tt}) u_\xi + (c^2 \eta_{xx} + c^2 \eta_{yy} - \eta_{tt}) u_\eta + (c^2 \zeta_{xx} + c^2 \zeta_{yy} - \zeta_{tt}) u_\zeta = 0. \end{aligned}$$

(b) Die Vorgabe der Funktion  $u$  auf  $S$  bestimmt  $u_\eta$ ,  $u_\zeta$ ,  $u_{\eta\eta}$ ,  $u_{\eta\zeta}$ ,  $u_{\zeta\zeta}$  usw. Die zusätzliche Vorgabe der Normalenableitung (Cauchy-Daten) legt zusätzlich  $u_\xi$  fest. Welche Gleichung muss auf  $S$  erfüllt sein, damit man aus diesen Angaben *nicht* auch alle anderen Ableitungen bestimmen kann? ( $S$  nennt man dann eine *Charakteristik* in Verallgemeinerung des für zwei Variablen eingeführten Begriffs.)

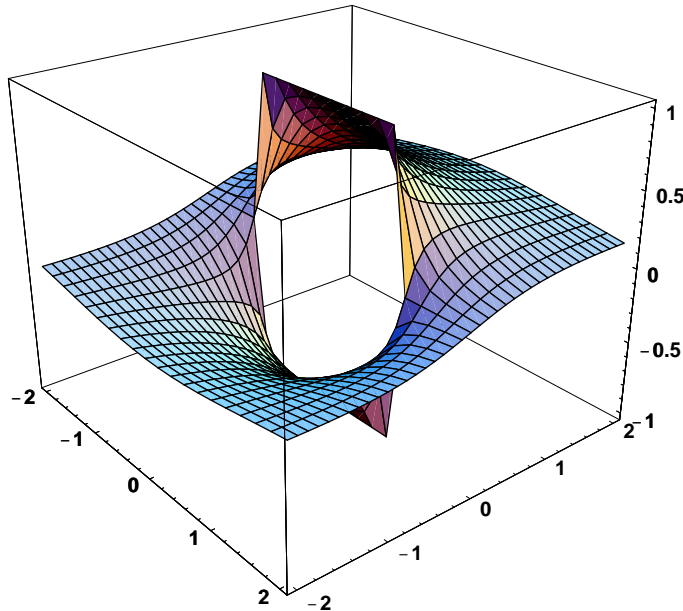


Abbildung 25: Lösungsfunktion  $u(x, y)$  für Aufgabe B.12.

(c) Lösen Sie die in (b) gefundene charakteristische Gleichung mittels eines Ansatzes der Form  $k_1x + k_2y - \omega t + a$ . In welcher Beziehung müssen  $k_1$ ,  $k_2$  und  $\omega$  stehen? Beschreiben Sie die Lösung geometrisch (in Worten). Wieviele Charakteristiken schneiden sich in einem gegebenen Punkt?

(d) Zeigen Sie, dass auch die Gleichung

$$\xi = k\sqrt{x^2 + y^2} - kct = 0$$

eine Charakteristik beschreibt. Welche geometrische Form hat diese Charakteristik? *Zusatzfrage:* In welcher geometrischen Beziehung steht diese Charakteristik zu den Charakteristiken vom in (c) gefundenen Typ, die ebenfalls durch den Ursprung gehen?

**Lösung:** (a) durch direktes Ausrechnen (Kettenregel).

(b) Koeffizient vor  $u_{\xi\xi}$  muss verschwinden:

$$c^2\xi_x^2 + c^2\xi_y^2 - \xi_t^2 = 0.$$

(c) Einsetzen ergibt:

$$c^2k_1^2 + c^2k_2^2 - \omega^2 = 0,$$

also

$$\omega = c|\mathbf{k}|,$$

wobei  $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ . Die Lösungen sind Ebenen senkrecht zu den Vektoren  $(k_1, k_2, -\omega)$ , die alle die Ebenen  $t = \text{const}$  unter demselben Winkel schneiden. Jeder Punkt gehört zumindest zu einer *ein*-parametrischen Schar von Charakteristiken, parametrisiert durch den Polarwinkel von  $\mathbf{k}$ . [Eine Änderung des Betrages von  $\mathbf{k}$  multipliziert den Vektor  $(k_1, k_2, -\omega)$  mit einem Skalar, was nicht zu einer neuen Ebene führt.  $a$  ist beliebig, wird aber durch die Vorgabe eines Punktes festgelegt.]

(d) Einsetzen und Division durch  $k$  ergibt:

$$c^2 \frac{x^2}{x^2 + y^2} + c^2 \frac{y^2}{x^2 + y^2} - c^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0.$$

Die Charakteristik ist ein Kegel mit Spitze im Ursprung und damit die Einhüllende der ebenen Charakteristiken durch den Ursprung.



## B.14 Quasilineare Gleichung

Gegeben sei die quasilineare partielle Differentialgleichung

$$x^2 u_x + uu_y = 1.$$

Auf der Geraden  $x + y = 1$  sei für  $x > 0$  die Funktion als  $u(x, y) = 0$  vorgegeben. Die charakteristischen Gleichungen für  $x$ ,  $y$  und  $u$  als Funktionen eines Parameters  $\lambda$  lauten gemäß der Vorlesung

$$\frac{dx}{d\lambda} = x^2, \quad \frac{dy}{d\lambda} = u, \quad \frac{du}{d\lambda} = 1$$

(prüfen Sie dies nach).

(a) Zeigen Sie, dass die Lösung dieses Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Charakteristiken lautet:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_0}{1 - x_0 \lambda}, \\ y &= \frac{1}{2} \lambda^2 + 1 - x_0, \\ u &= \lambda \end{aligned}$$

(Hinweis: Trennung der Variablen). Dabei ist  $(x_0, 1 - x_0)$  der Schnittpunkt der Charakteristik mit der vorgegebenen Kurve und der Parameter  $\lambda$  nimmt an diesem Schnittpunkt den Wert  $\lambda = 0$  an. Skizzieren Sie einige der Charakteristiken  $(x(\lambda), y(\lambda))$ , die die vorgegebene Kurve schneiden. In welchem Bereich erhält man eine stetige Lösung?

(b) Eliminieren Sie aus den in (a) gefundenen Gleichungen  $x_0$  und  $\lambda$ , um eine Gleichung allein für die gesuchte Funktion  $u(x, y)$  zu erhalten. (Es ist ausreichend, eine implizite Gleichung für  $u$  anzugeben; sie muss nicht nach  $u$  aufgelöst werden. Dies ist möglich, führt aber zu einem unübersichtlichen Ausdruck.)

(c) In der Vorlesung wurde erläutert, dass man bei einer quasilinearen Gleichung für  $u(x, y)$  auch  $u$  und  $x$  oder  $u$  und  $y$  als unabhängige Variablen betrachten kann. Verwenden Sie die Beziehungen

$$u_y = \frac{1}{y_u} \quad \text{und} \quad u_x = -\frac{y_x}{y_u},$$

um die ursprüngliche Gleichung in eine Gleichung für  $y(x, u)$  umzuformen. Schreiben Sie diese in Standardform. Zeigen Sie, dass die in (b) gefundene Lösung, nach  $y$  aufgelöst, diese neue Gleichung erfüllt.

**Lösung:** (a) Die dritte Gleichung ergibt

$$u = \lambda + c_1,$$

dann ergibt die zweite

$$y = \frac{1}{2} \lambda^2 + c_1 \lambda + c_2.$$

Unabhängig davon ergibt die erste Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x^2} &= d\lambda \\ \Rightarrow -\frac{1}{x} + c_3 &= \lambda \\ \Rightarrow x &= \frac{1}{c_3 - \lambda}. \end{aligned}$$

Am Schnittpunkt mit der vorgegebenen Kurve ist

$$\lambda = 0, \quad x = x_0, \quad y = 1 - x_0, \quad u = 0,$$

also

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{c_3}, \\ 1 - x_0 &= c_2, \\ 0 &= c_1. \end{aligned}$$

Damit ist schließlich

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{1/x_0 - \lambda} = \frac{x_0}{1 - x_0\lambda}, \\y &= \frac{1}{2}\lambda^2 + 1 - x_0, \\u &= \lambda.\end{aligned}$$

Die Charakteristiken schneiden die vorgegebene Kurve *zweimal* mit dem geschlossenen Abschnitt der Charakteristik links-unten von der Kurve. Rechts-oben erhält man stetige Lösungen.

(b) Die Elimination von  $\lambda$  ist trivial, da  $\lambda = u$  ist. Aus der Gleichung für  $y(\lambda)$  erhalten wir

$$x_0 = \frac{1}{2}u^2 + 1 - y$$

für den Schnittpunkt. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt

$$x = \frac{u^2/2 + 1 - y}{1 - (u^2/2 + 1 - y)u},$$

also

$$\begin{aligned}x - \left(\frac{u^2}{2} + 1 - y\right) xu &= \frac{u^2}{2} + 1 - y \\ \Rightarrow \frac{x}{1 + xu} &= \frac{u^2}{2} + 1 - y.\end{aligned}$$

(c) Die umgeformte Gleichung lautet

$$-x^2 \frac{y_x}{y_u} + u \frac{1}{y_u} = 1,$$

also

$$x^2 y_x + y_u = u.$$

Nach (b) sollte die Lösung lauten

$$y = \frac{u^2}{2} + 1 - \frac{x}{1 + xu}.$$

Es ist

$$\begin{aligned}y_x &= -\frac{1 + xu - xu}{(1 + xu)^2} = -\frac{1}{(1 + xu)^2}, \\y_u &= u + \frac{x}{(1 + xu)^2} x = u + \frac{x^2}{(1 + xu)^2}.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$x^2 y_x + y_u = -\frac{x^2}{(1 + xu)^2} + u + \frac{x^2}{(1 + xu)^2} = u.$$

Also erfüllt die Lösung aus (b) die transformierte Gleichung.

## B.15 Störungstheorie

Betrachten Sie die Gleichung

$$\nabla^2 u + \frac{1}{4}u^2 = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\phi\phi} + \frac{1}{4}u^2 = 0$$

auf dem Einheitskreis mit der Randbedingung, in Polarkoordinaten,

$$u(r = 1, \phi) = 1.$$

Bestimmen Sie eine Näherungslösung, indem Sie  $u^2/4$  als Störung betrachten. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Stellen Sie die Gleichungen mit dazugehörigen Randbedingungen bis zur zweiten Ordnung in der Störung auf.

(b) Lösen Sie die Gleichungen iterativ und zeigen Sie so, dass die Näherungslösung bis zur zweiten Ordnung lautet

$$u \cong 1 + \frac{1-r^2}{16} + \frac{3-4r^2+r^4}{512}.$$

Hinweise: Dabei ist die Methode aus Aufgabe B.11 nützlich. Erinnern Sie sich auch an die in der Vorlesung bewiesenen Sätze über harmonische Funktionen.

(c) Setzen Sie die Näherungslösung in die ursprüngliche Gleichung ein und prüfen Sie, dass der resultierende Fehler tatsächlich von dritter Ordnung in der Störung ist. Wo ist die Näherungslösung am schlechtesten?

**Lösung:** Wir schreiben die Gleichung als

$$\nabla^2 u + \epsilon u^2 = 0.$$

Sei

$$u = u^{(0)} + \epsilon u^{(1)} + \epsilon^2 u^{(2)} + \dots$$

Einsetzen in die Gleichung und Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned} \nabla^2 u^{(0)} &= 0, \\ \nabla^2 u^{(1)} + (u^{(0)})^2 &= 0, \\ \nabla^2 u^{(2)} + 2u^{(0)}u^{(1)} &= 0, \\ \nabla^2 u^{(3)} + 2u^{(0)}u^{(2)} + (u^{(1)})^2 &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} u^{(0)}(1, \phi) &= 1, \\ u^{(n)}(1, \phi) &= 0 \quad \text{für } n \geq 1. \end{aligned}$$

Die Lösung in nullter Ordnung ist (konstante harmonische Funktion!)

$$u^{(0)}(r, \phi) = 1.$$

Damit ergibt sich die Gleichung für die erste Ordnung zu

$$\nabla^2 u^{(1)} = -1$$

Diese lösen wir mit Hilfe der Methode aus Aufgabe B.11. Für die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz

$$v^{(1)} = A r^2.$$

Einsetzen ergibt

$$2A + 2A = 4A \stackrel{!}{=} -1,$$

also

$$A = -\frac{1}{4}.$$

Die Lösung  $w^{(1)}$  der homogenen (d.h. Laplace-) Gleichung muss die Randbedingung

$$w^{(1)}(1, \phi) = -v^{(1)}(1, \phi) = +\frac{1}{4}$$

erfüllen. Das ist wieder eine konstante harmonische Funktion,

$$w^{(1)}(r, \phi) = \frac{1}{4}.$$

Damit ist der gesamte Term erster Ordnung

$$u^{(1)}(r, \phi) = \frac{1-r^2}{4}.$$

In der zweiten Ordnung haben wir die Gleichung

$$\nabla^2 u^{(2)} = -2 \frac{1-r^2}{4} = \frac{r^2-1}{2}.$$

Ansatz für die spezielle Lösung:

$$v^{(2)} = B r^4 - \frac{1}{8} r^2$$

ergibt

$$12B r^2 - \frac{1}{4} + 4B r^2 - \frac{1}{4} = 16B r^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{2},$$

also  $B = 1/32$  und damit

$$v^{(2)} = \frac{r^4}{32} - \frac{r^2}{8}.$$

$w^{(2)}$  muss die Randbedingung

$$w^{(2)}(1, \phi) = -v^{(2)}(1, \phi) = +\frac{3}{32}$$

erfüllen, also ist

$$w^{(2)}(r, \phi) = \frac{3}{32}$$

und damit

$$u^{(2)}(r, \phi) = \frac{3 - 4r^2 + r^4}{32}.$$

Die Näherungslösung bis zur zweiten Ordnung lautet also

$$u(r, \phi) \cong 1 + \epsilon \frac{1 - r^2}{4} + \epsilon^2 \frac{3 - 4r^2 + r^4}{32} = \frac{547 - 36r^2 + r^4}{512}$$

für  $\epsilon = 1/4$ . Der Fehler in der Gleichung ist

$$\nabla^2 u + \epsilon u^2 \cong \epsilon^3 \frac{(1 - r^2)(2 - r^2)}{8} + \epsilon^4 \frac{(1 - r^2)(3 - 4r^2 + r^4)}{64} + \epsilon^5 \frac{(1 - r^2)^2(3 - r^2)^2}{1024},$$

also tatsächlich von der Ordnung  $\epsilon^3$ , wie wir erwarten. Da in unserem Fall  $\epsilon = 1/4$  gilt, ist die rechte Seite

$$\frac{4297 - 6616r^2 + 2390r^4 - 72r^6 + r^8}{1048576}.$$

Dieser Fehler ist für  $r = 0$  maximal, er ist dann 0.0041, die Lösung selbst ist dort  $u(0) \cong 1.068$ .

## B.16 Green-Funktion für die Poisson-Gleichung auf einem Quadrat

Bestimmen Sie die Green-Funktion  $g$  für die Poisson-Gleichung auf dem Quadrat  $0 < x < L$ ,  $0 < y < L$  mit Dirichlet-Randbedingungen. Diese Green-Funktion erfüllt die Gleichung

$$\begin{aligned} \nabla^2 g &= 4\pi \delta(x - x') \delta(y - y'), \\ g &= 0 \quad \text{auf dem Rand.} \end{aligned}$$

(a) Entwickeln Sie dazu  $u$  in eine Fourier-Sinus-Reihe nach  $x$  und  $y$ ,

$$G_{mn} = \frac{4}{L^2} \int_0^L dx \int_0^L dy \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{L} g(x, y).$$

Transformieren Sie die gesamte Gleichung entsprechend. Lösen Sie die transformierte (algebraische) Gleichung für  $G_{mn}$  und geben Sie das rücktransformierte Ergebnis in Form einer doppelten unendlichen Reihe an.

(b) Benutzen Sie die Green-Funktion aus Teil (a), um die folgende Gleichung zu lösen:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= -\sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{L} \quad \text{für } 0 < x < L, 0 < y < L, \\ u &= 0 \quad \text{auf dem Rand.} \end{aligned}$$