

---

# Theoretische Mechanik

© Carsten Timm 2014–2025

---



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Ziele und Arbeitsweise der Theoretischen Mechanik . . . . .	1
1.2	Überblick . . . . .	2
1.3	Lehrbücher . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Kinematik</b>	<b>5</b>
2.1	Koordinatensysteme . . . . .	6
2.1.1	Kartesische Koordinaten . . . . .	10
2.1.2	Kugelkoordinaten . . . . .	10
2.1.3	Zylinderkoordinaten . . . . .	13
2.1.4	Natürliche Koordinaten . . . . .	14
2.2	Gleichmäßig beschleunigte Bewegung . . . . .	15
2.3	Kreisbewegung . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Newton-Mechanik</b>	<b>17</b>
3.1	Die Newtonschen Axiome . . . . .	17
3.1.1	Das Trägheitsgesetz . . . . .	17
3.1.2	Das Bewegungsgesetz . . . . .	18
3.1.3	Das Reaktionsprinzip . . . . .	18
3.1.4	Das Superpositionsprinzip . . . . .	19
3.1.5	Kraftfelder . . . . .	19
3.2	Beispiele für Kräfte . . . . .	19
3.2.1	Gewichtskraft . . . . .	19
3.2.2	Gravitationskraft . . . . .	20
3.2.3	Coulomb-Kraft . . . . .	20
3.2.4	Lorentz-Kraft . . . . .	20
3.2.5	Federkraft . . . . .	21
3.2.6	Reibungskräfte . . . . .	21
3.3	Wechsel des Bezugssystems und Scheinkräfte . . . . .	21
3.3.1	Translationen und Galilei-Transformation . . . . .	22
3.3.2	Rotationsmatrizen . . . . .	23
3.3.3	Rotationen von Bezugssystemen . . . . .	25
3.4	Newtons Bewegungsgleichung als gewöhnliche Differentialgleichung . . . . .	28
3.4.1	Lineare Differentialgleichungen . . . . .	28
3.4.2	Nichtlineare Differentialgleichungen . . . . .	31
3.5	Arbeit und Energie . . . . .	32
3.5.1	Arbeit . . . . .	32
3.5.2	Leistung . . . . .	34
3.5.3	Kinetische Energie und Energieerhaltung . . . . .	34
3.6	Drehimpuls und Drehmoment . . . . .	36
3.7	Zentralkräfte . . . . .	36

<b>4</b>	<b>Newton-Mechanik für Mehrteilchensysteme</b>	<b>39</b>
4.1	Impulssatz und Schwerpunktsatz	39
4.2	Reaktionsprinzip und Lorentz-Kraft	40
4.3	Drehimpulssatz	41
4.4	Energieerhaltung	43
4.5	Die zehn Erhaltungsgrößen	44
4.6	Der Virialsatz	45
4.7	Zwei-Teilchen-Systeme	47
<b>5</b>	<b>Lagrange-Mechanik I</b>	<b>51</b>
5.1	Zwangsbedingungen und Zwangskräfte	52
5.1.1	Holonome Zwangsbedingungen	52
5.1.2	Nicht-holonome Zwangsbedingungen	53
5.2	Generalisierte Koordinaten	54
5.3	Das d'Alembertsche Prinzip	55
5.3.1	Mechanisches Gleichgewicht	57
5.4	Lagrange-Funktion und Lagrange-Gleichungen 2. Art	57
5.4.1	Forminvarianz der Lagrange-Gleichungen	60
5.5	Verallgemeinerte Potentiale	61
5.6	Das Hamiltonsche Prinzip	62
5.6.1	Euler-Lagrange-Gleichungen	64
5.6.2	Eichinvarianz der Euler-Lagrange-Gleichungen	65
5.7	Zyklische Koordinaten und generalisierte Impulse	66
5.8	Das Noether-Theorem	67
5.9	Homogenität in der Zeit und Energieerhaltung	70
<b>6</b>	<b>Lagrange-Mechanik II</b>	<b>73</b>
6.1	Lagrange-Formalismus für Reibungskräfte	73
6.2	Die Lagrange-Gleichungen 1. Art	75
<b>7</b>	<b>Das Zentralkraftfeld</b>	<b>79</b>
7.1	Planetenbewegung und Keplersche Gesetze	79
7.1.1	Drehimpulserhaltung und Flächensatz	79
7.1.2	Energieerhaltung und Form der Bahn	80
7.1.3	Das 3. Keplersche Gesetz	82
7.2	Streuung an Zentralpotentialen	83
7.2.1	Der Wirkungsquerschnitt	86
<b>8</b>	<b>Kinematik des starren Körpers</b>	<b>89</b>
8.1	Translationen und Rotationen	90
8.2	Der Trägheitstensor	91
8.2.1	Der Steinersche Satz	93
8.3	Der Drehimpuls des starren Körpers	94
8.4	Die Euler-Winkel	94
<b>9</b>	<b>Dynamik des starren Körpers</b>	<b>99</b>
9.1	Die Euler-Gleichungen	99
9.2	Rotation im Laborsystem	100
9.3	Der kräftefreie Kreisel	101
9.3.1	Rotation um freie Achsen	102
9.3.2	Der symmetrische Kreisel	103
9.4	Der schwere Kreisel	106
9.4.1	Die Lagrange-Gleichungen für die Euler-Winkel	106

9.4.2	Der symmetrische schwere Kreisel . . . . .	107
<b>10</b>	<b>Lineare Schwingungen</b>	<b>109</b>
10.1	Der harmonische Oszillator . . . . .	110
10.1.1	Der freie gedämpfte Oszillator . . . . .	110
10.1.2	Der angetriebene harmonische Oszillator: Methode der Green-Funktionen . . . . .	113
10.2	Gekoppelte Schwingungen . . . . .	115
10.2.1	Transformation auf Hauptkoordinaten . . . . .	119
10.3	Die lineare Kette . . . . .	120
10.3.1	Übergang zum Kontinuum . . . . .	123
<b>11</b>	<b>Hamilton-Mechanik I</b>	<b>127</b>
11.1	Die Legendre-Transformation . . . . .	127
11.2	Hamilton-Funktion und kanonische Gleichungen . . . . .	128
11.2.1	Forminvarianz unter Punkttransformationen . . . . .	131
11.3	Der Phasenraum . . . . .	131
11.4	Zyklische Koordinaten . . . . .	134
11.5	Das modifizierte Hamiltonsche Prinzip . . . . .	135
<b>12</b>	<b>Hamilton-Mechanik II</b>	<b>137</b>
12.1	Die Poisson-Klammern . . . . .	137
12.1.1	Poissonscher Satz . . . . .	139
12.2	Kanonische Transformationen . . . . .	140
12.2.1	Verschiedene Formen der erzeugenden Funktion . . . . .	143
12.2.2	Kanonizität und Poisson-Klammern . . . . .	145
12.3	Infinitesimale kanonische Transformationen . . . . .	147
12.4	Phasenraumvolumen und Liouvillescher Satz . . . . .	147
<b>13</b>	<b>Relativistische Kinematik</b>	<b>153</b>
13.1	Die Einsteinschen Postulate . . . . .	154
13.1.1	Relativität der Gleichzeitigkeit und Zeitdilatation . . . . .	154
13.2	Die Lorentz-Transformation . . . . .	157
13.2.1	Längenkontraktion . . . . .	161
13.2.2	Additionstheorem für Geschwindigkeiten . . . . .	161
13.3	Lichtkegel und Minkowski-Raum . . . . .	162
13.4	Eigenzeit und Vierergeschwindigkeit . . . . .	164
<b>14</b>	<b>Relativistische Dynamik</b>	<b>167</b>
14.1	Newton-Mechanik . . . . .	167
14.2	Lagrange- und Hamilton-Mechanik . . . . .	169
14.2.1	Lagrange-Gleichung für das freie Teilchen . . . . .	170
14.2.2	Lagrange-Gleichung für ein Teilchen im elektromagnetischen Feld . . . . .	172
14.2.3	Übergang zur Hamilton-Mechanik . . . . .	174
<b>15</b>	<b>Hamilton-Jacobi-Theorie</b>	<b>175</b>
15.1	Die Hamilton-Jacobi-Gleichung . . . . .	175
15.2	Bedeutung der Wirkungsfunktion . . . . .	177
15.3	Die Hamiltonsche charakteristische Funktion . . . . .	179

<b>16 Nichtlineare Dynamik</b>	<b>181</b>
16.1 Integrabilität	181
16.1.1 Der Involutionssatz von Liouville und Arnold	182
16.2 Tori und Poincaré-Schnitte	184
16.3 Deterministisches Chaos	186
16.3.1 Das Hénon-Heiles-Modell	186
16.3.2 Das KAM-Theorem	188
16.3.3 Ljapunow-Exponenten	189
16.3.4 Bahnenbüschel	192

# Kapitel 1

## Einführung

### 1.1 Ziele und Arbeitsweise der Theoretischen Mechanik

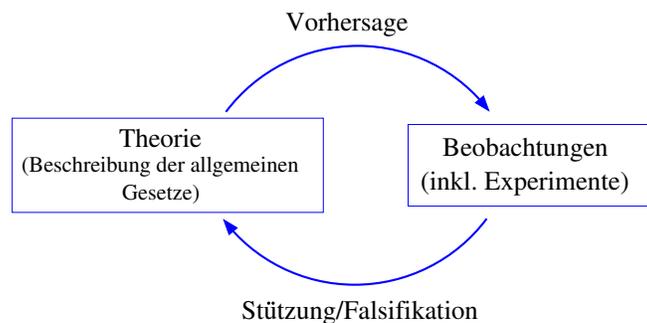
Die Theoretische Mechanik – und damit meinen wir hier die *klassische* Mechanik – hat zwei Ziele:

- das *Verständnis* der Bewegungen materieller Körper unter dem Einfluss von Kräften. Erkennen der zu Grunde liegenden Gesetzmäßigkeiten.
- die *Beschreibung* der Bewegungen materieller Körper unter dem Einfluss von Kräften. Vorhersage der Bewegungen.

Wir werden noch klären müssen, was die hier auftretenden Begriffe bedeuten, z.B. der Begriff der *Kraft*.

Die Theoretische Mechanik hat also, wie allgemein die Theoretische Physik, das zweifache Ziel des Verständnisses von allgemeinen Gesetzmäßigkeiten und der quantitativen Beschreibung von Vorgängen. Diese beiden Ziele hängen eng zusammen. Die Arbeitsweise der Theoretischen Physik besteht in der Formulierung von *Theorien*, d.h. Beschreibungen der allgemeinen Gesetzmäßigkeiten, auf der Basis *empirischer* Daten. Diese empirischen Daten werden aus *Beobachtungen* gewonnen, wobei wir speziell von *Experimenten* sprechen, wenn die Beobachtungen an absichtsvoll präparierten Systemen erfolgen. Zum Beispiel können wir die Planetenbewegungen beobachten, aber keine Experimente daran durchführen.

Aus einer brauchbaren Theorie lassen sich Voraussagen für Experimente herleiten, die dann gestatten, die Theorie zu überprüfen. Wie der Naturphilosoph Sir Karl Popper sagte, kann man eine Theorie niemals beweisen aber im Prinzip leicht widerlegen (falsifizieren). Beobachtungen, die mit den Vorhersagen einer Theorie übereinstimmen, *stützen* diese, beweisen sie aber nicht. Für die Widerlegung reicht dagegen *eine* Beobachtung aus, die der Theorie widerspricht. Die Beobachtung ist immer die letzte Instanz in der Physik – die Grundgleichungen der Theoretischen Mechanik lauten so und nicht anders, weil umfangreiche Beobachtungen *diese* und nicht andere Gleichungen stützen.



Einige Bemerkungen sind hier angebracht:

- Man muss sich klar machen, was Popper mit „beweisen“ meinte: Man kann eine Theorie nicht *in mathematischer Strenge* beweisen, aber viele physikalische Theorien sind im „juristischen“ Sinne bewiesen, sie sind „nach menschlichem Ermessen“ wahr. Die englische Formulierung „without reasonable doubt“ ist noch treffender.
- Die strikte Widerlegung einer Theorie durch eine Beobachtung im Sinne Poppers ist auch eine idealisierte Vorstellung, da man sich bei der Deutung der Beobachtung nie absolut sicher sein kann. Insbesondere hängt die Deutung i.A. von theoretischen Vorstellungen ab, die zwar allgemein akzeptiert sind, aber dennoch einer möglichen Falsifizierung zum Opfer fallen könnten.
- Viele Theorien sind im Sinne Poppers falsifiziert. Zum Beispiel wissen wir, dass die Theoretische Mechanik falsche Voraussagen macht, wenn wir sie auf mikroskopische Objekte wie Atome oder Elementarteilchen anwenden. Das bedeutet nicht, dass die Theoretische Mechanik nutzlos oder nur von historischem Interesse wäre. Wir wissen heute, dass sie den Grenzfall von allgemeineren Theorien darstellt, nämlich auf der einen Seite der Quantenmechanik und damit der Quantenfeldtheorie und des Standardmodells der Elementarteilchenphysik und auf der anderen der Allgemeinen Relativitätstheorie. Wir wissen noch nicht, wie eine noch allgemeinere Theorie aussieht, die die Quantenfeldtheorie und die Allgemeine Relativitätstheorie enthält.

Es ist gut verstanden, unter welchen Bedingungen die Theoretische Mechanik präzise Voraussagen macht. In diesen Fällen wäre es unsinnig, die viel komplizierteren allgemeineren Theorien zu verwenden: Niemand wird ernsthaft versuchen, die Frequenz eines Federpendels im Rahmen der Quantenfeldtheorie zu berechnen.

Die Theoretische Physik formuliert die zu Grunde liegenden Gesetzmäßigkeiten in der Sprache der Mathematik, weil das die für die Beschreibung quantitativer Zusammenhänge am besten geeignete Sprache ist. Daher werden wir zahlreiche mathematische Methoden verwenden. Aber Theoretische Physik ist nicht Mathematik, ähnlich wie ein literarisches Werk nicht mit der Sprache identisch ist, in der es verfasst ist. Die Formulierung verwendet meist Begriffe der Analysis und der Linearen Algebra, nicht selten aber auch solche der Gruppentheorie und Geometrie.

Die speziell in der Theoretischen Mechanik notwendigen mathematischen Hilfsmittel sind insbesondere, natürlich in unterschiedlichem Umfang,

- Lineare Algebra,
- Analysis (Differential- und Integralrechnung), einschließlich Vektoranalysis,
- Gewöhnliche Differentialgleichungen,
- Variationsrechnung,
- Partielle Differentialgleichungen (für die Kontinuumsmechanik und die Hamilton-Jacobi-Theorie).

Diese Hilfsmittel wurden überwiegend in der Vorlesung *Rechenmethoden der Physik* behandelt. Sie werden in der Vorlesung entwickelt bzw. wiederholt, soweit es notwendig erscheint.

## 1.2 Überblick

Wir werden in dieser Vorlesung folgende Kapitel behandeln:

- Kinematik des Massenpunktes: Modellvorstellung des Massenpunktes, Definition von Begriffen zur Beschreibung seiner Bewegung (noch ohne Frage nach den Ursachen)
- Newton-Mechanik: Newtons Axiome, Begriff der Kraft, Mehrteilchensysteme, Erhaltungssätze
- Lagrange-Mechanik: Zwangsbedingungen und Zwangskräfte, Lagrange-Gleichung, Variationsprinzipien; die Lagrange-Mechanik beschreibt i.W. dieselben Systeme wie die Newton-Mechanik, ist aber viel praktischer für viele Anwendungen
- Zentralkraftfeld, Planetenbewegung

- Starrer Körper: Kinematik und Bewegungsgleichungen des starren Körpers, Kreiseltheorie
- Lineare Schwingungen: harmonischer Oszillator, gekoppelte Schwingungen
- Hamilton-Mechanik: kanonische Gleichungen, Phasenraum, Poisson-Klammern, kanonische Transformationen; die Hamilton-Mechanik beschreibt ebenfalls i.W. dieselben Systeme wie Newton und Lagrange, enthüllt aber zugrunde liegende Strukturen und erleichtert den Übergang zur Quantenmechanik
- Relativistische Mechanik: Einsteins Postulate, Lorentz-Transformation, Zeitdilatation, Längenkontraktion, relativistische Dynamik
- Hamilton-Jacobi-Theorie: eine weitere formal interessante Umformulierung der Theorie, nützlich für den folgenden Abschnitt
- Nichtlineare Dynamik: Integrabilität, deterministisches Chaos

## 1.3 Lehrbücher

Aus dem Angebot von Lehrbüchern der Theoretischen Mechanik soll hier eine kleine und subjektive Auswahl erwähnt werden:

- W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik, Band 1: Klassische Mechanik*, 9. Aufl. (Springer-Verlag, Berlin, 2011), *Band 2: Analytische Mechanik*, 8. Aufl. (Springer-Verlag, Berlin, 2011), *Band 4/1: Spezielle Relativitätstheorie*, 9. Aufl. (Springer-Verlag, Berlin, 2016): Die gesamte Reihe von Lehrbüchern ist empfehlenswert. Nolting legt relativ großes Gewicht auf das Einüben der Formalismen und entsprechend weniger auf die ausführliche Diskussion des physikalischen Gehalts. Er führt Herleitungen oft im Detail vor, wo andere Autoren nur das Ergebnis angeben. Die Darstellung ist fast immer klar. Die Bücher enthalten viele gute Übungsaufgaben mit Lösungen und Kontrollfragen. Der 1. Band beginnt mit einer recht ausführlichen Wiederholung der relevanten mathematischen Methoden. Angenehmes Format und Layout. Leider ohne Literaturverzeichnis. Moderne Themen wie Integrabilität und Chaos fehlen. Relativistische Mechanik wird in Band 4 ziemlich ausführlich behandelt.
- F. Kuypers, *Klassische Mechanik*, 8. Aufl. (Wiley-VCH, Weinheim, 2008): Ein gutes deutsches Lehrbuch mit einem hohen Anteil von Beispielen und Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen. Zusammen mit den eingeschobenen Zusammenfassungen und Wiederholungen führt dies dazu, das relativ wenig Raum für die eigentliche Darstellung und vertiefte Diskussion der Theoretischen Mechanik bleibt. Es werden sogar wichtige Schritte und Aussagen nur in Übungsaufgaben behandelt (z.B. Transformation in rotierende Koordinatensysteme, Virialsatz). V.a. für Studierende gut geeignet, die die enthaltenen Übungsaufgaben tatsächlich zusätzlich zu den in der Vorlesung gegebenen lösen. Die Diskussion der Anwendungen ist etwas ausführlicher als in anderen Büchern. Enthält ein Kapitel zu relativistischer Mechanik und ein recht knappes zu nichtlinearer Dynamik.
- H. Goldstein, C. P. Poole und J. L. Safko, *Klassische Mechanik*, 3. Aufl. (Wiley-VCH, Weinheim, 2006): Der Klassiker in neuer Auflage, aus dem Generationen von Studierenden Mechanik gelernt haben. Legt mehr Gewicht auf Diskussion und weniger auf mathematische Zwischenschritte, verglichen mit Nolting. Der zusätzliche Text ist hilfreich beim Verständnis, aber dringt manchmal nicht zu den zugrunde liegenden Symmetrieargumenten vor. Enthält ein Kapitel über relativistische Mechanik. Die neue Auflage hat moderne Kapitel wie Chaos und numerische (computergestützte) Übungsaufgaben ergänzt, ohne den vorhandenen Text wesentlich zu verändern. Insgesamt ein geeignetes Erst- oder Zweitbuch.
- L. D. Landau und E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik, Band 1: Mechanik*, 14. Aufl. (Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1997/2004): Der andere Klassiker, Teil einer Reihe von russischen Lehrbüchern. Der Band zur Mechanik ist brutal knapp gehalten. Zwischenschritte werden selten angegeben und die Diskussionen sind kürzer als bei Goldstein. Modernere Themen fehlen. Enthält meist schwierige Übungsaufgaben ohne Lösungen. Die relativistische Mechanik bildet ein Kapitel des zweiten Bandes über Elektrodynamik und Allgemeine Relativitätstheorie.

- J. L. McCauley, *Classical Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997): Ein deutlich tiefergehendes Lehrbuch als die bisher genannten, das nicht in deutscher Übersetzung vorliegt. Legt das Hauptgewicht auf Diskussion (wie Goldstein), ist aber insgesamt klarer. Formalismen werden knapp und präzise eingeführt, die Schreibweise verleitet aber dazu, Vektoren und Skalare zu verwechseln. Die Standard-Methoden, die z.B. bei Nolting und Kuypers großen Raum einnehmen, werden hier deutlich kürzer behandelt, da es sich um ein reines *graduate* Lehrbuch handelt, das mindestens eine vorhergehende Theoretische-Mechanik-Vorlesung voraussetzt. Dafür werden sehr fortgeschrittene Themen wie Flüsse im Phasenraum und Integrabilität ausführlich besprochen. Relativ schwierige Übungsaufgaben ohne Lösungen. Ziemlich umfangreiches Literaturverzeichnis. Relativistische Mechanik wird sehr knapp in einem Kapitel über Elektrodynamik, Spezielle und Allgemeine Relativitätstheorie angerissen. Interessante historische Einführung. Als Zweitbuch für Interessierte zu empfehlen.

# Kapitel 2

## Kinematik

In diesem Kapitel ist unser Ziel die Definition von mathematischen Größen zur *Beschreibung* der Bewegung von Massenpunkten. Wir fragen noch nicht nach den *Ursachen* der Bewegung.

Was ist ein Massenpunkt? Der Massenpunkt ist ein Modell für einen physikalischen Körper in Problemstellungen, in denen es ausreicht, einen Punkt des Körpers zu betrachten, wenn also die Angabe seines *Ortes* ausreicht. Es kommt also darauf an, was wir beschreiben wollen. Bei der Planetenbewegung werden wir z.B. Sonne und Planeten als Massenpunkte beschreiben. Einen gleitenden Block können wir ebenfalls als Massenpunkt beschreiben. Die Körper müssen also nicht klein sein.

Die Bewegung eines Massenpunktes ist charakterisiert durch die *Vektoren*

- Ort  $\vec{r}(t)$ ,
- Geschwindigkeit  $\vec{v}(t) := \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ,
- Beschleunigung  $\vec{a}(t) := \ddot{\vec{r}}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ .

Aus  $\vec{r}(t)$  erhält man also sofort  $\vec{v}(t)$  und  $\vec{a}(t)$ , aber oft ist die Aufgabenstellung umgekehrt:  $\vec{a}(t)$  ist bekannt und  $\vec{r}(t)$  gesucht. Wir müssen  $\vec{a}(t)$  zweimal integrieren. Bei jeder der beiden Integrationen tritt eine Integrationskonstante auf. Um diese festzulegen, benötigen wir zusätzlich zwei Angaben, z.B. von Ort  $\vec{r}(t_0)$  und Geschwindigkeit  $\vec{v}(t_0)$  zu einem Zeitpunkt  $t_0$ . Dann ist

- $\vec{a}(t)$  gegeben.
- $\vec{v}(t) = \vec{C} + \int_{t_0}^t dt' \vec{a}(t')$ , wegen

$$\vec{v}(t_0) = \vec{C} + \underbrace{\int_{t_0}^{t_0} dt' \vec{a}(t')}_{=0} = \vec{C} \quad (2.1)$$

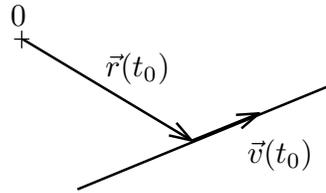
folgt dann

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t dt' \vec{a}(t'). \quad (2.2)$$

- $\vec{r}(t) = \vec{C}' + \int_{t_0}^t dt'' \vec{v}(t'') = \vec{C}' + \int_{t_0}^t dt'' \left[ \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t''} dt' \vec{a}(t') \right]$ , also

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^t dt'' \int_{t_0}^{t''} dt' \vec{a}(t'). \quad (2.3)$$

Beispiel: Unbeschleunigte Bewegung. Hier ist  $\vec{a}(t) = 0 \forall t$ . Es folgt  $\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0)$  und  $\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t_0)(t - t_0)$ .



Das ist die Parameterdarstellung einer Geraden. Die unbeschleunigte Bewegung verläuft also geradlinig.

## 2.1 Koordinatensysteme

Es ist oft sinnvoll, Größen in verschiedenen Koordinatensystemen darzustellen, da in geeigneten Koordinatensystemen die Lösung bestimmter Probleme sehr viel einfacher wird. Wir beschränken uns in der folgenden Diskussion meist auf dreidimensionale Räume, die Verallgemeinerung auf  $n$ -dimensionale Räume ist im Prinzip einfach.

Wir betrachten zunächst den Ortsvektor  $\vec{r}$ , der einen Raumpunkt beschreibt. Offenbar werden drei reelle Größen benötigt, um einen Punkt im dreidimensionalen Raum eindeutig zu charakterisieren. Verschiedene Arten der Charakterisierung entsprechen verschiedenen Koordinatensystemen. Zum Beispiel können wir  $\vec{r}$  durch *kartesische Koordinaten*  $(x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$  darstellen. Wir wissen, dass jeder Vektor  $\vec{r}$  für ein fest gewähltes kartesisches Koordinatensystem *eindeutig* durch ein Zahlentripel  $(x, y, z)$  dargestellt wird, d.h. zu jedem  $\vec{r}$  existiert genau ein Tripel  $(x, y, z)$ .

Sei  $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$  eine Darstellung *desselben* Ortsvektors  $\vec{r}$  in einem anderen Koordinatensystem. Es scheint sinnvoll zu verlangen, dass diese Darstellung ebenfalls *eindeutig* ist, d.h., dass zu jedem  $\vec{r}$  genau ein Tripel  $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ . Diese Forderung ist aber zu streng und schließt daher nützliche Koordinatensysteme aus. So ist in ebenen Polarkoordinaten der Winkel  $\phi$  für  $\vec{r} = 0$  offensichtlich nicht eindeutig bestimmt. Also verlangen wir nur, dass die Abbildung *fast überall* *eindeutig* sein soll. („Fast überall“ bedeutet überall bis auf eine Menge vom Maß Null, d.h. in drei Dimensionen bis auf eine Menge mit verschwindendem Volumen. Das kann z.B. eine Fläche, eine Kurve oder eine Menge von Punkten sein.) Für zwei Darstellungen  $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$  und  $(\chi_1, \chi_2, \chi_3)$  desselben Ortsvektors  $\vec{r}$  in unterschiedlichen Koordinatensystemen fordern wir entsprechend, dass die *Koordinatentransformation*

$$\chi_1 = \chi_1(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3), \quad (2.4)$$

$$\chi_2 = \chi_2(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3), \quad (2.5)$$

$$\chi_3 = \chi_3(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \quad (2.6)$$

fast überall umkehrbar sein soll.

Diese Transformation ist an einem gegebenen Punkt umkehrbar, wenn infinitesimale Änderungen  $d\zeta_i$  von  $\zeta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) dort *eindeutig* (bijektiv) auf infinitesimale Änderungen  $d\chi_j$  von  $\chi_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) abgebildet werden. Es gilt

$$d\chi_j = \chi_j(\zeta_1 + d\zeta_1, \zeta_2 + d\zeta_2, \zeta_3 + d\zeta_3) - \chi_j(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \frac{\partial \chi_j}{\partial \zeta_1} d\zeta_1 + \frac{\partial \chi_j}{\partial \zeta_2} d\zeta_2 + \frac{\partial \chi_j}{\partial \zeta_3} d\zeta_3 = \sum_i \frac{\partial \chi_j}{\partial \zeta_i} d\zeta_i. \quad (2.7)$$

Das können wir auch als Multiplikation mit einer Matrix schreiben,

$$\begin{pmatrix} d\chi_1 \\ d\chi_2 \\ d\chi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial \chi_1}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial \chi_1}{\partial \zeta_3} \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial \chi_2}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial \chi_2}{\partial \zeta_3} \\ \frac{\partial \chi_3}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial \chi_3}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial \chi_3}{\partial \zeta_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\zeta_1 \\ d\zeta_2 \\ d\zeta_3 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Die hier auftretende Matrix heißt *Funktionalmatrix*. Gleichung (2.8) ist eine lineare Abbildung. Wir wissen, dass sie *eindeutig* ist, wenn die Koeffizientenmatrix, also die Funktionalmatrix, invertierbar ist. Das ist genau dann

der Fall, wenn ihre Determinante nicht verschwindet, d.h. wenn

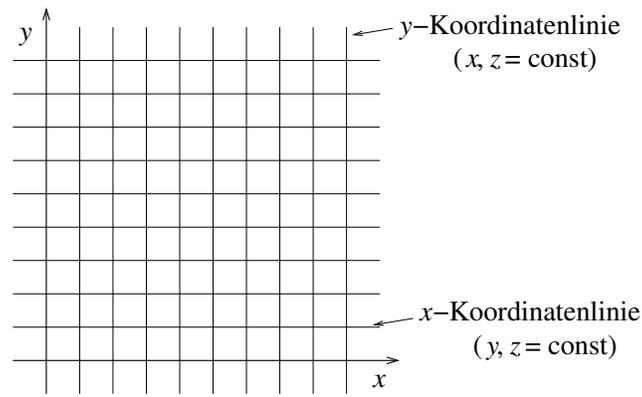
$$\frac{\partial(\chi_1, \chi_2, \chi_3)}{\partial(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)} := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial\chi_1}{\partial\zeta_1} & \frac{\partial\chi_1}{\partial\zeta_2} & \frac{\partial\chi_1}{\partial\zeta_3} \\ \frac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_1} & \frac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_2} & \frac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_3} \\ \frac{\partial\chi_3}{\partial\zeta_1} & \frac{\partial\chi_3}{\partial\zeta_2} & \frac{\partial\chi_3}{\partial\zeta_3} \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial\chi_1}{\partial\zeta_1} & \frac{\partial\chi_1}{\partial\zeta_2} & \frac{\partial\chi_1}{\partial\zeta_3} \\ \frac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_1} & \frac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_2} & \frac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_3} \\ \frac{\partial\chi_3}{\partial\zeta_1} & \frac{\partial\chi_3}{\partial\zeta_2} & \frac{\partial\chi_3}{\partial\zeta_3} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.9)$$

Diese Größe nennt man *Funktionaldeterminante* oder *Jacobi-Determinante*. Wir fordern also, dass diese Jacobi-Determinante fast überall von Null verschieden ist.

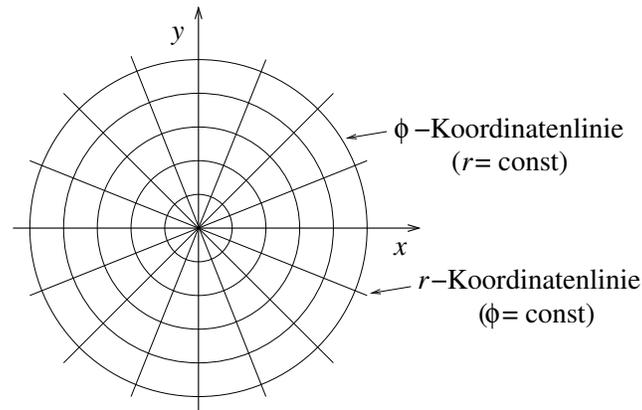
Die Koordinaten  $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$  überziehen den Raum mit einem Netz, das durch die *Koordinatenlinien* gebildet wird. Die Koordinatenlinien sind Raumkurven, die wir erhalten, indem wir alle bis auf eine Koordinate konstant lassen. Zum Beispiel erhalten wir für jede Wahl von Konstanten  $\zeta_2 = \zeta_2^{(0)}$  und  $\zeta_3 = \zeta_3^{(0)}$  eine  $\zeta_1$ -Koordinatenlinie

$$\zeta_1 \mapsto \vec{r}(\zeta_1, \zeta_2^{(0)}, \zeta_3^{(0)}). \quad (2.10)$$

Die Koordinatenlinien für kartesische Koordinaten sind Geraden, die ein rechtwinkliges Netz bilden:



Die  $r$ -Koordinatenlinien für ebene Polarkoordinaten sind am Nullpunkt beginnende Halbgeraden (Strahlen), die  $\phi$ -Koordinatenlinien sind konzentrische Kreise um den Nullpunkt:



Wir können nun an jedem Punkt *lokale Koordinatenachsen* einführen. Diese bezeichnen die Richtungen, in denen sich die Koordinaten  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  ändern. Diese Richtungen sind durch die *natürlichen Basisvektoren*

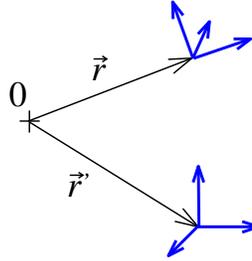
$$\vec{h}_i := \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_i} \quad (2.11)$$

gegeben. Da bei der partiellen Ableitung nach  $\zeta_i$  die anderen Koordinaten konstant zu halten sind, liegt der Basisvektor  $\vec{h}_i$  tangential zur  $\zeta_i$ -Koordinatenlinie. Es ist oft nützlich, normierte Basisvektoren zu verwenden,

diese erhält man einfach aus

$$\hat{e}_i := \frac{\vec{h}_i}{|\vec{h}_i|}. \quad (2.12)$$

Die Einheitsvektoren  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  existieren fast überall und bilden fast überall ein *Dreibein*. Das Dreibein muss nicht an jedem Raumpunkt gleich sein. Es muss auch nicht orthogonal sein. Wir werden allerdings im Folgenden nur solche Koordinatensysteme verwenden, deren Einheitsvektoren (fast überall) orthogonal sind.



Wir ordnen dann die Einheitsvektoren  $\hat{e}_i$  o. B. d. A. so, dass sie ein Rechtssystem bilden. Damit gilt  $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$  und  $\hat{e}_1 \cdot (\hat{e}_2 \times \hat{e}_3) = 1$  (das ist äquivalent zu  $(\hat{e}_1 \times \hat{e}_2) \cdot \hat{e}_3 = 1$ , man muss sich also nicht merken, wo welches Multiplikationszeichen steht).

An einem Ort  $\vec{r}$  drücken wir einen *beliebigen* Vektor  $\vec{b}$ , der also nicht der Ortsvektor  $\vec{r}$  sein muss, durch die Einheitsvektoren  $\hat{e}_i(\vec{r})$  am Ort  $\vec{r}$  aus:

$$\vec{b} = b_1 \hat{e}_1(\vec{r}) + b_2 \hat{e}_2(\vec{r}) + b_3 \hat{e}_3(\vec{r}). \quad (2.13)$$

$\vec{b}$  kann z.B. die Geschwindigkeit oder die Beschleunigung eines Massenpunktes am Ort  $\vec{r}$  sein. Wenn die Einheitsvektoren  $\hat{e}_i$  orthogonal sind, erhalten wir durch skalare Multiplikation mit  $\hat{e}_i$  für die Komponenten

$$b_i = \hat{e}_i \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \hat{e}_i. \quad (2.14)$$

Speziell für den Ortsvektor haben wir natürlich

$$r_i = \hat{e}_i \cdot \vec{r} = \vec{r} \cdot \hat{e}_i. \quad (2.15)$$

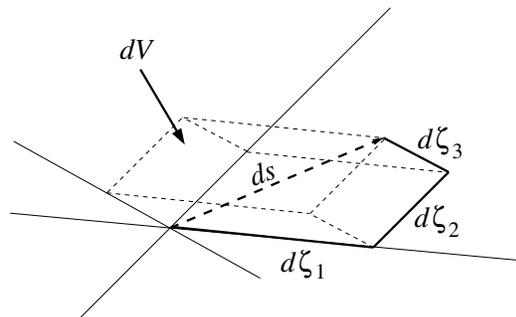
Es ist zu beachten, dass die *Komponenten*  $r_i$  des Ortsvektors in  $\zeta$ -Koordinaten nicht mit den *Koordinaten*  $\zeta_i$  übereinstimmen. Das Beispiel der Kugelkoordinaten wird dies gleich zeigen.

Infinitesimale Änderungen  $d\zeta_i$  der Koordinaten  $\zeta_i$  führen auf zwei weitere wichtige Größen: Zum einen können wir nach dem Abstand des neuen Punktes vom alten fragen. Der *Abstandsvektor* ist

$$d\vec{r} := \vec{r}(\zeta_1 + d\zeta_1, \zeta_2 + d\zeta_2, \zeta_3 + d\zeta_3) - \vec{r}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_i} d\zeta_i = \sum_i \vec{h}_i d\zeta_i. \quad (2.16)$$

Damit ist der *Abstand*, genauer das *Linielement*,

$$ds := |d\vec{r}| = \left| \sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_i} d\zeta_i \right| = \left| \sum_i \vec{h}_i d\zeta_i \right|. \quad (2.17)$$



Sind die Basisvektoren  $\vec{h}_i$  orthogonal, so vereinfacht sich dies zu (Satz von Pythagoras!)

$$ds = \sqrt{\sum_i |\vec{h}_i|^2 (d\zeta_i)^2} \quad (2.18)$$

oder

$$ds^2 = \sum_i |\vec{h}_i|^2 (d\zeta_i)^2 \quad (2.19)$$

(Satz des Pythagoras in drei Dimensionen). Das Linienelement ist wichtig für die Berechnung von Kurvenintegralen.

Zum anderen spannen die drei Verschiebungen  $d\zeta_i$  entlang der Koordinatenlinien ein Parallelepiped auf. Sein Volumen ist das *Volumenelement*

$$dV := \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_1} d\zeta_1 \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_2} d\zeta_2 \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_3} d\zeta_3 \right) = \vec{h}_1 \cdot (\vec{h}_2 \times \vec{h}_3) d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3. \quad (2.20)$$

Sind die  $\vec{h}_i$  orthogonal und bilden sie ein Rechtssystem, so wird dies zu

$$dV = |\vec{h}_1| |\vec{h}_2| |\vec{h}_3| d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3. \quad (2.21)$$

Allgemein lässt sich das Spatprodukt mit der Jacobi-Determinante in Verbindung bringen: Sind  $(x_1, x_2, x_3)$  die kartesischen Komponenten von  $\vec{r}$ , so ist

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_1} \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_2} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_3} \right) = \sum_{i,j,k=1,2,3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial \zeta_1} \frac{\partial x_j}{\partial \zeta_2} \frac{\partial x_k}{\partial \zeta_3} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \zeta_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \zeta_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \zeta_3} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)} \quad (2.22)$$

mit dem Levi-Civita-Symbol  $\epsilon_{ijk}$ . Zur Erinnerung: Es gilt

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{wenn } i, j, k \text{ zyklische Vertauschung von } 1, 2, 3, \\ -1 & \text{wenn } i, j, k \text{ antizyklische Vertauschung von } 1, 2, 3, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.23)$$

Damit erhalten wir

$$dV = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)} d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3. \quad (2.24)$$

Diese Darstellung ist wichtig, wenn wir Volumenintegrale in beliebigen Koordinatensystemen ausrechnen wollen.

Den *Gradienten-* oder *Nabla-*Operator  $\vec{\nabla}$  definieren wir durch die Forderung, dass für das totale Differential  $df$  einer skalaren Funktion  $f(\vec{r})$  gelten soll

$$df(\vec{r}) \stackrel{!}{=} d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r}) = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_1} d\zeta_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_2} d\zeta_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_3} d\zeta_3 \right) \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r}) = \left( \sum_i \vec{h}_i d\zeta_i \right) \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r}) = \sum_i (\vec{h}_i \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r})) d\zeta_i. \quad (2.25)$$

Nach der Kettenregel gilt andererseits

$$df(\vec{r}) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \zeta_i} d\zeta_i. \quad (2.26)$$

Da die  $d\zeta_i$  (fast überall) linear unabhängig und beliebig sind, folgt

$$\vec{h}_i \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r}) = \frac{\partial f}{\partial \zeta_i}, \quad (2.27)$$

für  $i = 1, 2, 3$ , also

$$\hat{e}_i \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{h}_i|} \frac{\partial f}{\partial \zeta_i}. \quad (2.28)$$

Da dies für alle differenzierbaren Funktionen  $f(\vec{r})$  gelten soll, können wir für die  $\zeta$ -Komponenten von  $\vec{\nabla}$  schreiben

$$\hat{e}_i \cdot \vec{\nabla} = \frac{1}{|\vec{h}_i|} \frac{\partial}{\partial \zeta_i}. \quad (2.29)$$

Wenn die  $\hat{e}_i$  orthonormal sind, können wir nun den Nabla-Operator schreiben als

$$\vec{\nabla} \equiv \sum_i \hat{e}_i (\hat{e}_i \cdot \vec{\nabla}) = \sum_i \frac{\hat{e}_i}{|\vec{h}_i|} \frac{\partial}{\partial \zeta_i} \equiv \sum_i \frac{\vec{h}_i}{|\vec{h}_i|^2} \frac{\partial}{\partial \zeta_i}. \quad (2.30)$$

Die Reihenfolge der Faktoren ist hier wesentlich.  $\hat{e}_i$  und  $\vec{h}_i$  hängen i.A. von den Koordinaten  $\zeta_i$  ab, so dass wir sie nicht einfach an der Ableitung  $\partial/\partial \zeta_i$  vorbei ziehen dürfen.

### 2.1.1 Kartesische Koordinaten

Für kartesische Koordinaten  $(x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$  sind die Koordinatenlinien wie erwähnt Geraden, die ein rechtwinkliges Netz bilden. Die natürlichen Basisvektoren sind orthogonal und bereits normiert,  $\vec{h}_i = \hat{e}_i$ . Das Dreibein ist im gesamten Raum gleich. Wir schreiben die Einheitsvektoren auch als  $\hat{e}_1 = \hat{x}$ ,  $\hat{e}_2 = \hat{y}$ ,  $\hat{e}_3 = \hat{z}$ . Die Komponentendarstellung  $\vec{b} = b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z}$  schreiben wir auch als  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ . Wenn nichts anderes gesagt ist, meinen wir damit die Komponenten in kartesischen Koordinaten. Wir schreiben  $\vec{b}$  in kartesischen Koordinaten auch als Spaltenvektor,

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Manchmal ist es nützlich, zwischen Zeilen- und Spaltenvektoren zu unterscheiden. Sie hängen durch eine *Transposition* – die Vertauschung von Zeilen und Spalten – zusammen und man schreibt

$$(b_x, b_y, b_z) = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}^T \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = (b_x, b_y, b_z)^T. \quad (2.32)$$

Wir treffen diese Unterscheidung in dieser Vorlesung meist nicht.

Das Linienelement  $ds$  erfüllt die einfache Beziehung

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.33)$$

und das Volumenelement ist

$$dV = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x, y, z)} dx dy dz = dx dy dz. \quad (2.34)$$

Der Nabla-Operator lautet

$$\vec{\nabla} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (2.35)$$

### 2.1.2 Kugelkoordinaten

Es bietet sich an, krummlinige Koordinatensysteme mittels der bereits bekannten kartesischen Koordinaten zu definieren. Für Kugelkoordinaten (sphärische Polarkoordinaten) haben wir die Abbildung

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad (2.36)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi, \quad (2.37)$$

$$z = r \cos \theta. \quad (2.38)$$

Damit lauten die natürlichen Basisvektoren, ausgedrückt in kartesischen Koordinaten,

$$\vec{h}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

$$\vec{h}_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

$$\vec{h}_\phi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = r \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Die Normierung ist einfach, wir erhalten

$$\hat{r} = \frac{\vec{h}_r}{r} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

$$\hat{\theta} = \frac{\vec{h}_\theta}{r} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

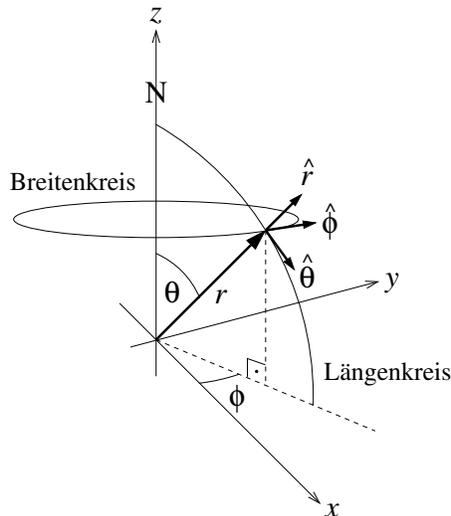
$$\hat{\phi} = \frac{\vec{h}_\phi}{r \sin \theta} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese Einheitsvektoren orthogonal sind und ein Rechtssystem bilden. Offenbar ist das Dreibein hier vom Ort  $\vec{r}$  abhängig. Eine kompaktere (und koordinatenfreie) Darstellung ist

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}, \quad (2.45)$$

$$\hat{\theta} = \hat{\phi} \times \hat{r}, \quad (2.46)$$

$$\hat{\phi} = \frac{\hat{z} \times \hat{r}}{|\hat{z} \times \hat{r}|} = \frac{\hat{z} \times \hat{r}}{\sin \theta}. \quad (2.47)$$



Für den Ortsvektor können wir offensichtlich schreiben  $\vec{r} = r \hat{r}$ . Wir sehen explizit, dass die  $\theta$ - und  $\phi$ -Komponenten von  $\vec{r}$  verschwinden. Sie stimmen also nicht mit den Kugelkoordinaten  $\theta, \phi$  des durch  $\vec{r}$  dargestellten Raumpunktes überein. Hier ist keine Information verloren gegangen, da  $\hat{r}$  von  $\theta$  und  $\phi$  abhängt.

Die Änderung  $d\vec{r}$  von  $\vec{r}$  können wir ebenfalls nach den Einheitsvektoren zerlegen,

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} d\phi \\ &= \vec{h}_r dr + \vec{h}_\theta d\theta + \vec{h}_\phi d\phi \\ &= dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

wobei wir Glg. (2.42)–(2.44) verwendet haben (siehe auch die Skizze). Daraus folgt sofort für die Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \hat{r} + r\dot{\theta} \hat{\theta} + r \sin \theta \dot{\phi} \hat{\phi}. \quad (2.49)$$

Während sich  $\vec{v}$  unmittelbar aus  $d\vec{r}$  ergibt, ist die Beschleunigung  $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$  deutlich komplizierter, da die Einheitsvektoren  $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$  von  $\vec{r}$  und damit von  $t$  abhängen. Wir finden (Produktregel)

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{r} \hat{r} + \dot{r} \dot{\hat{r}} + \dot{r} \dot{\theta} \hat{\theta} + r \ddot{\theta} \hat{\theta} + r \dot{\theta} \dot{\hat{\theta}} + \dot{r} \sin \theta \dot{\phi} \hat{\phi} + r \dot{\theta} \cos \theta \dot{\phi} \hat{\phi} + r \sin \theta \ddot{\phi} \hat{\phi} + r \sin \theta \dot{\phi} \dot{\hat{\phi}}. \quad (2.50)$$

Hier ist

$$\dot{\hat{r}} = \frac{d}{dt} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{v} r - \vec{r} \dot{r}}{r^2} = \frac{\dot{r}}{r} \hat{r} + \dot{\theta} \hat{\theta} + \sin \theta \dot{\phi} \hat{\phi} - \frac{\dot{r}}{r} \hat{r} \quad (2.51)$$

und

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\phi}} &= \frac{d}{dt} \frac{\hat{z} \times \hat{r}}{\sin \theta} = \frac{\hat{z} \times \dot{\hat{r}} \sin \theta - \hat{z} \times \hat{r} \dot{\theta} \cos \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{\hat{z} \times (\dot{\theta} \hat{\theta} + \sin \theta \dot{\phi} \hat{\phi})}{\sin \theta} - \hat{\phi} \frac{\dot{\theta} \cos \theta}{\sin \theta} = \hat{\phi} \frac{\dot{\theta} \cos \theta}{\sin \theta} + \dot{\phi} \hat{z} \times \hat{\phi} - \hat{\phi} \frac{\dot{\theta} \cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \dot{\phi} (-\sin \theta \hat{r} - \cos \theta \hat{\theta}) = -\sin \theta \dot{\phi} \hat{r} - \cos \theta \dot{\phi} \hat{\theta} \end{aligned} \quad (2.52)$$

und schließlich

$$\dot{\hat{\theta}} = \frac{d}{dt} (\hat{\phi} \times \hat{r}) = \dot{\hat{\phi}} \times \hat{r} + \hat{\phi} \times \dot{\hat{r}} = -\cos \theta \dot{\phi} \hat{\theta} \times \hat{r} + \dot{\theta} \hat{\phi} \times \hat{\theta} = \cos \theta \dot{\phi} \hat{\phi} - \dot{\theta} \hat{r}. \quad (2.53)$$

Also ergibt sich für die Beschleunigung in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \hat{r} + (\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2) \hat{\theta} \\ &\quad + (\dot{r} \sin \theta \dot{\phi} + r \dot{\theta} \cos \theta \dot{\phi} + \dot{r} \sin \theta \dot{\phi} + r \dot{\theta} \cos \theta \dot{\phi} + r \sin \theta \ddot{\phi}) \hat{\phi} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \hat{r} + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2) \hat{\theta} + (2\dot{r} \sin \theta \dot{\phi} + 2r \dot{\theta} \cos \theta \dot{\phi} + r \sin \theta \ddot{\phi}) \hat{\phi}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Das ist erstaunlich kompliziert.

Das Linienelement  $ds$  erfüllt

$$ds^2 = |\vec{h}_r|^2 dr^2 + |\vec{h}_\theta|^2 d\theta^2 + |\vec{h}_\phi|^2 d\phi^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.55)$$

und das Volumenelement ist

$$dV = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} dr d\theta d\phi = |\vec{h}_r| |\vec{h}_\theta| |\vec{h}_\phi| dr d\theta d\phi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi. \quad (2.56)$$

Für den Nabla-Operator erhalten wir

$$\vec{\nabla} = \sum_i \frac{\hat{e}_i}{|\vec{h}_i|} \frac{\partial}{\partial \zeta_i} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (2.57)$$

Es ist erhellend, die Gradienten der Koordinaten  $r$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  zu bestimmen. Wir finden

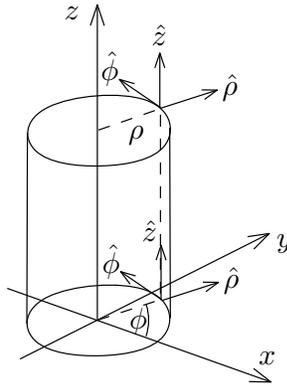
$$\vec{\nabla} r = \hat{r} \frac{\partial r}{\partial r} = \hat{r}. \quad (2.58)$$

Das ist plausibel:  $\hat{r}$  ist *definiert* als Einheitsvektor in der Richtung, in der sich  $r$  ändert, daher muss  $\vec{\nabla} r$  zumindest parallel zu  $\hat{r}$  sein. Ebenso sollten  $\vec{\nabla} \theta \parallel \hat{\theta}$  und  $\vec{\nabla} \phi \parallel \hat{\phi}$  gelten. Das finden wir auch explizit:

$$\vec{\nabla} \theta = \frac{1}{r} \hat{\theta}, \quad (2.59)$$

$$\vec{\nabla} \phi = \frac{1}{r \sin \theta} \hat{\phi}. \quad (2.60)$$

### 2.1.3 Zylinderkoordinaten



Für Zylinderkoordinaten  $\rho$ ,  $\phi$ ,  $z$  fassen wir hier nur die Ergebnisse zusammen, die Herleitungen sind analog. Die kartesischen Koordinaten hängen mit den Zylinderkoordinaten gemäß

$$x = \rho \cos \phi, \quad (2.61)$$

$$y = \rho \sin \phi, \quad (2.62)$$

$$z = z \quad (2.63)$$

zusammen. Es ist  $\vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}$  und  $d\vec{r} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$ , also

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi} + \dot{z} \hat{z}. \quad (2.64)$$

Man erhält auch

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{\rho} + (\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi}) \hat{\phi} + \ddot{z} \hat{z}. \quad (2.65)$$

Das Linienelement erfüllt

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2 \quad (2.66)$$

und das Volumenelement ist

$$dV = \rho d\rho d\phi dz. \quad (2.67)$$

Der Nabla-Operator lautet

$$\vec{\nabla} = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\phi}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.68)$$

Ebene Polarkoordinaten erhalten wir natürlich einfach durch die Setzung  $z = 0$ , wobei man dann oft  $r$  statt  $\rho$  schreibt.

### 2.1.4 Natürliche Koordinaten

Wenn wir die Bewegung eines Massenpunktes beschreiben wollen, bietet es sich manchmal an, an jedem Punkt der Bahnkurve ein der Bahn angepasstes Dreibein zu wählen. Wir definieren zunächst die *Bogenlänge*  $s$  als die vom Massenpunkt zwischen den Zeiten  $t_0$  und  $t$  zurückgelegte Strecke.  $s$  ist der Skalar

$$s(t) = \underbrace{\int_{t_0}^t ds(t') \equiv \int_{t_0}^t |d\vec{r}(t')|}_{\text{nicht sehr nützlich für Berechnungen}} = \int_{t_0}^t dt' \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{t=t'} \equiv \int_{t_0}^t dt' |\vec{v}(t')|. \quad (2.69)$$

$s$  parametrisiert die Bahnkurve, d.h. jeder Punkt  $\vec{r}$  auf der Bahnkurve wird durch einen Wert von  $s$  charakterisiert. Dieser Wert von  $s$  ist der Abstand des Punktes  $\vec{r}$  vom Ausgangspunkt  $\vec{r}(t_0)$  entlang der Bahnkurve.

Es gibt nun die folgenden drei ausgezeichneten Richtungen bzw. Einheitsvektoren am Punkt  $\vec{r}$ :

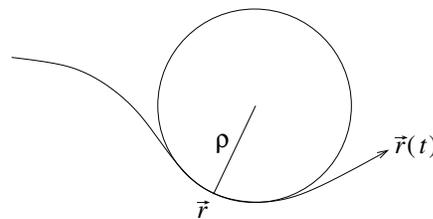
- Den *Tangenteneinheitsvektor*  $\hat{t}$ , dieser ist tangential zur Bahn, also parallel zur Geschwindigkeit und zeigt in dieselbe Richtung (Vereinbarung!). Also gilt

$$\hat{t} := \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \equiv \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|} \stackrel{\text{Gl. (2.69)}}{=} \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{d\vec{r}}{ds}. \quad (2.70)$$

- Den *Normaleneinheitsvektor*  $\hat{n}$ :  $\hat{t}(s)$  ändert sich i.A. entlang der Bahn, eine zweite ausgezeichnete Richtung ist die, in der sich  $\hat{t}$  ändert, das ist die Richtung von  $d\hat{t}/ds$ . Da  $\hat{t}$  Einheitsvektor ist, steht  $d\hat{t}/ds$  senkrecht zu  $\hat{t}$ :  $0 = d|\hat{t}|/ds = (d/ds) \hat{t} \cdot \hat{t} = 2 \hat{t} \cdot d\hat{t}/ds$ . Den Normaleneinheitsvektor  $\hat{n}$  definieren wir durch Normierung

$$\hat{n} := \frac{\frac{d\hat{t}}{ds}}{\left| \frac{d\hat{t}}{ds} \right|}. \quad (2.71)$$

Der Betrag  $|d\hat{t}/ds|$  hat eine wichtige geometrische Bedeutung:  $\kappa := |d\hat{t}/ds|$  ist die Krümmung der Bahn und  $\rho := 1/\kappa$  ist der Krümmungsradius, d.h. der Radius eines Kreises, der sich am Punkt  $\vec{r}$  an die Bahn anschmiegt. Also ist  $\hat{n} = \rho d\hat{t}/ds$ .



Ist die Bahn am Ort  $\vec{r}$  nicht gekrümmt, so können wir  $\hat{n}$  orthogonal zu  $\hat{t}$  beliebig wählen.

- Den *Binormaleneinheitsvektor*  $\hat{b} := \hat{t} \times \hat{n}$ . Die Einheitsvektoren  $\hat{t}$ ,  $\hat{n}$ ,  $\hat{b}$  bilden ein rechtshändiges Dreibein, das *begleitende Dreibein*.

Wir betrachten noch den Spezialfall, in dem  $\hat{b} = \hat{b}_0 = \text{const}$  ist. Dann liegen zu allen Zeiten sowohl  $\vec{v} \parallel \hat{t}$  als auch  $d\hat{t}/ds \parallel \hat{n}$  in der zu  $\hat{b}_0$  senkrechten Ebene. Da  $\vec{v}$  zu allen Zeiten in dieser Ebene liegt, liegt der Ort

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t dt' \vec{v}(t') \quad (2.72)$$

zu allen Zeiten in der zu  $\hat{b}_0$  senkrechten Ebene durch den Aufpunkt  $\vec{r}(t_0)$ . Also finden wir für  $\hat{b} = \hat{b}_0 = \text{const}$  eine *ebene Bahn*.

In natürlichen Koordinaten ist  $\vec{r}$  nicht einfach auszudrücken, aber  $\vec{v}$  und  $\vec{a}$  sind es. Es ist nämlich  $\vec{v} = v \hat{t}$  (nach Definition). Mit  $v = ds/dt \equiv \dot{s}$  folgt

$$\vec{v} = \dot{s} \hat{t} \quad (2.73)$$

und

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v} \hat{t} + v \dot{\hat{t}} = \ddot{s} \hat{t} + \dot{s} \frac{d\hat{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = \ddot{s} \hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \hat{n}. \quad (2.74)$$

$\vec{a}$  liegt also in der durch  $\hat{t}$  und  $\hat{n}$  aufgespannten (zu  $\hat{b}$  orthogonalen) sogenannten *Schmiegungeebene*. In

$$\vec{a} = \ddot{s} \hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \hat{n} =: a_t \hat{t} + a_n \hat{n} \quad (2.75)$$

nennen wir  $a_t$  die *Tangentialbeschleunigung* und  $a_n$  die *Normalenbeschleunigung*.

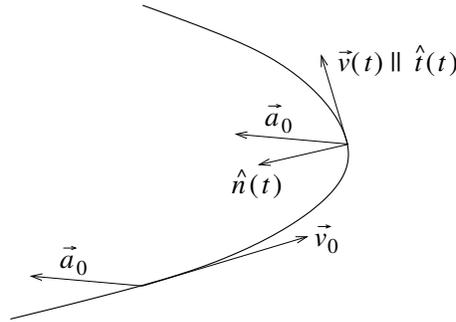
## 2.2 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung ist durch  $\vec{a} = \text{const} \equiv \vec{a}_0$  charakterisiert. Dies ergibt offenbar

$$\vec{v}(t) = \underbrace{\vec{v}(t_0)}_{\equiv \vec{v}_0} + \vec{a}_0 (t - t_0), \quad (2.76)$$

$$\vec{r}(t) = \underbrace{\vec{r}(t_0)}_{\equiv \vec{r}_0} + \vec{v}_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{a}_0 (t - t_0)^2. \quad (2.77)$$

$\vec{v}(t)$  liegt in der von  $\vec{v}_0$  und  $\vec{a}_0$  aufgespannten Ebene.



Daher liegt die gesamte Bahnkurve in der Ebene durch den Punkt  $\vec{r}_0$ , aufgespannt durch  $\vec{v}_0$  und  $\vec{a}_0$ . Der Binormaleinheitsvektor ist damit konstant und, wie die Skizze zeigt, gegeben durch

$$\hat{b} = \frac{\vec{v}_0 \times \vec{a}_0}{|\vec{v}_0 \times \vec{a}_0|}. \quad (2.78)$$

Der Tangenteneinheitsvektor ist  $\hat{t}(t) = \vec{v}(t)/|\vec{v}(t)| = \vec{v}(t)/v(t)$  und der Normaleneinheitsvektor demnach

$$\hat{n}(t) = \hat{b} \times \hat{t}(t) = \frac{(\vec{v}_0 \times \vec{a}_0) \times \vec{v}}{|\vec{v}_0 \times \vec{a}_0| v}. \quad (2.79)$$

Wir wählen ein Koordinatensystem mit  $\vec{r}_0 = 0$ ,  $\hat{z} \perp \vec{v}_0, \vec{a}_0$  und  $\hat{y} := \vec{a}_0/a_0$ . Dann ist

$$x = v_{0x} (t - t_0), \quad (2.80)$$

$$y = v_{0y} (t - t_0) + \frac{1}{2} a_0 (t - t_0)^2, \quad (2.81)$$

$$z = 0. \quad (2.82)$$

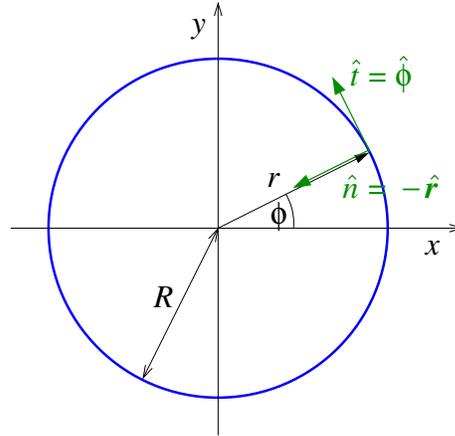
Es folgt  $t - t_0 = x/v_{0x}$  und damit

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x + \frac{a_0}{2v_{0x}^2} x^2. \quad (2.83)$$

Das ist die Gleichung einer Parabel, wie erwartet.

## 2.3 Kreisbewegung

Wenn wir schon wissen, dass die Bahnkurve ein Kreis oder ein Teil eines Kreises ist, können wir  $\hat{z} = \hat{b}$  senkrecht zur Bahnebene und den Koordinatenursprung im Kreismittelpunkt wählen. Dann sind die natürlichen Koordinaten ebene Polarkoordinaten.



Dann ist  $\hat{t} = \hat{\phi}$ ,  $\hat{n} = -\hat{r}$  und

$$r = |\vec{r}| = \text{const} \equiv R, \quad (2.84)$$

$$\vec{v} = R\dot{\phi}\hat{\phi}, \quad (2.85)$$

$$\vec{a} = -R\dot{\phi}^2\hat{r} + R\ddot{\phi}\hat{\phi} \quad (2.86)$$

(vgl. Abschnitte 2.1.3 und 2.1.4). Hier ist  $a_r = -R\dot{\phi}^2$  die Normalenbeschleunigung, die für Kreisbewegungen *Zentripetalbeschleunigung* genannt wird, und  $a_\phi = R\ddot{\phi}$  die Tangentialbeschleunigung. Wir definieren noch die *Winkelgeschwindigkeit*  $\omega := \dot{\phi}$ , dann ist

$$v = R\omega, \quad (2.87)$$

$$a_r = -R\omega^2, \quad (2.88)$$

$$a_\phi = R\dot{\omega}. \quad (2.89)$$

Man definiert auch die vektorielle Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega} := \omega\hat{b} = \omega\hat{z}$ . Mit dieser Definition gilt

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \omega\hat{z} \times r\hat{r} = \omega R\hat{\phi} = \vec{v}. \quad (2.90)$$

Ist  $\omega = \text{const}$ , so spricht man von einer *gleichförmigen Kreisbewegung*. Diese hat eine nicht verschwindende Zentripetalbeschleunigung, aber eine verschwindende Tangentialbeschleunigung.

# Kapitel 3

## Newton-Mechanik

In diesem Kapitel werden wir die Axiome der Newtonschen Mechanik formulieren und motivieren. Dabei werden wir uns bei den wichtigen Begriffen der Kraft und der (trägen) Masse auf die Sinneserfahrung berufen müssen. Wir diskutieren anschließend wichtige Beispiele für Kräfte.

Jede physikalische Theorie enthält Aussagen, die im Rahmen der Theorie selbst nicht hergeleitet werden können. Diese nennt man die *Axiome* der Theorie. Die Axiome werden durch den Vergleich von Voraussagen der Theorie mit Beobachtungen gerechtfertigt. Versuche, die Physik rein deduktiv zu begründen, gehen schon zurück auf Plato. Auch in der modernen Naturphilosophie wurde versucht, zu zeigen, dass die Naturgesetze nur genau so sein können, wie sie sind, z.B. von Carl Friedrich von Weizsäcker. Dieses Programm war bisher nicht erfolgreich. Oft wurden Axiome in der Geschichte der Physik später im Rahmen einer fundamentaleren Theorie hergeleitet, deren Axiome aber wieder durch Beobachtungen gerechtfertigt werden müssen.

Aus den Axiomen lassen sich Folgerungen ziehen, die über die zur Bestätigung der Theorie notwendigen hinausgehen. Diese zusätzlichen Aussagen stellen den eigentlichen Mehrwert der Theorie dar.

### 3.1 Die Newtonschen Axiome

#### 3.1.1 Das Trägheitsgesetz

Es ist nicht nur unmöglich, im Rahmen einer bestimmten Theorie alle ihre Aussagen zu beweisen, man kann sie noch nicht einmal formulieren. Da sich physikalische Theorien auf die reale Welt beziehen, machen sie Aussagen über Kategorien, die nicht innerhalb der Theorie (mathematisch) definiert werden können. In der Newtonschen Mechanik ist eine solche Kategorie die *Kraft*. Wir sehen daher den Begriff der Kraft als durch unsere Sinneserfahrung hinreichend genau definiert an – z.B. beim Halten eines Gewichts im Schwerfeld. Es ist auch anschaulich klar, dass die Kraft mit einer *Richtung* behaftet ist, sie ist daher eine vektorielle Größe.

Ist die Kraft auf diese Weise eingeführt, können weitere Begriffe mathematisch definiert werden. Für die Formulierung des 1. Newtonschen Axioms benötigen wir insbesondere folgende Begriffe:

*Definition:* Ein *kräftefreier Körper* ist ein Körper, auf den keine *äußeren* Kräfte wirken.

*Definition:* Ein *Bezugssystem* ist ein Koordinatensystem im vierdimensionalen Raum, der von den drei räumlichen Richtungen und der Zeit aufgespannt wird. Für feste Zeit  $t$  ergibt sich ein Koordinatensystem im Realraum, das nicht für alle  $t$  dasselbe sein muss.

1. *Newtonsches Axiom (Trägheitsgesetz):* Es existieren Bezugssysteme, in denen jeder kräftefreie Körper eine geradlinige, gleichförmige Bewegung ausführt. Dies schließt die Möglichkeit ein, dass er in Ruhe verharrt. (Man nimmt hierbei meist ohne besondere Erwähnung an, dass der Körper keine Materie abgibt oder aufnimmt.)

*Definition:* Solche Bezugssysteme heißen *Inertialsysteme*.

Also lautet das 1. Axiom kurz: „Es gibt Inertialsysteme“. Übrigens hat schon René Descartes formuliert, dass der natürliche Zustand eines ungestörten Körpers der der geradlinigen, gleichförmigen Bewegung ist.

### 3.1.2 Das Bewegungsgesetz

Wir wissen aus der Erfahrung, dass wir eine größere Kraft ausüben müssen, um eine Eisenkugel auf eine bestimmte Geschwindigkeit zu beschleunigen als einen gleich großen luftgefüllten Ball. Die beiden Körper setzen ihrer Beschleunigung einen unterschiedlich großen Widerstand entgegen. Als zweite, nicht innerhalb der Mechanik zu definierende Größe führen wir die *träge Masse*  $m_t$  als Maß für den Widerstand von Körpern gegen Bewegungsänderungen ein. Die träge Masse hat keinen Richtungssinn und ist daher eine skalare Größe.

*Definition:* Das Produkt aus träger Masse  $m_t$  und Geschwindigkeit  $\vec{v}$  heißt *Impuls*  $\vec{p} := m_t \vec{v}$ .

2. *Newtonsches Axiom (Bewegungsgesetz):* In einem Inertialsystem ist die Änderung des Impulses eines Körpers pro Zeiteinheit zur angreifenden Kraft proportional und parallel,

$$\vec{F} \sim \dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt}(m_t \vec{v}). \quad (3.1)$$

Wir wählen die Maßeinheiten von Kraft und Masse so, dass Gleichheit gilt:

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}}. \quad (3.2)$$

Diese Gleichung nennen wir die *Newtonsche Bewegungsgleichung*. Ist die Masse konstant, so gilt

$$\vec{F} = m_t \dot{\vec{v}} = m_t \vec{a}. \quad (3.3)$$

Dann ist  $\vec{a} = \vec{F}/m_t$ . Dies ergibt eine Methode, das Verhältnis von Kraft und träger Masse zu messen, aber nicht eine der beiden Größen für sich allein.

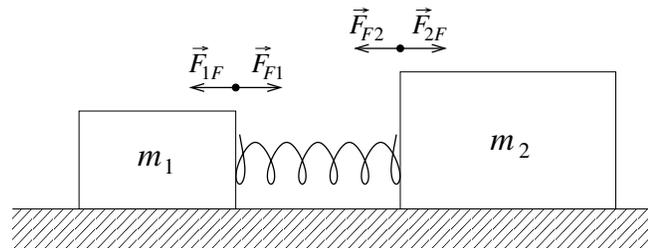
### 3.1.3 Das Reaktionsprinzip

Wenn wir auf glattem Eis versuchen, eine schwere Person wegzuschieben, finden wir, dass wir uns überwiegend selbst in die entgegengesetzte Richtung schieben. Offenbar übt die andere Person eine Kraft auf uns aus, ohne selbst etwas zu tun. In quantitativer Form ist das der Inhalt des 3. Axioms:

3. *Newtonsches Axiom (Reaktionsprinzip):* Die Kraft  $\vec{F}_{12}$ , die ein Körper 2 auf einen Körper 1 ausübt, und die Kraft  $\vec{F}_{21}$  des Körpers 1 auf Körper 2 sind betragsmäßig gleich und entgegengesetzt gerichtet,

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}. \quad (3.4)$$

Folgerung: Wir können nun die träge Masse  $m_t$  selbst messen, nicht nur das Verhältnis  $\vec{F}/m_t$ . Dazu betrachten wir folgendes Gedankenexperiment. Zwei Blöcke mit den Massen  $m_1$  und  $m_2$  gleiten reibungsfrei auf einer Ebene. Eine Feder zwischen den Blöcken kann eine Kraft auf sie ausüben, ist aber nicht fest mit ihnen verbunden:



Wir stauchen die Feder und halten die Massen in Ruhe. Dann gilt

$$\underbrace{-\vec{F}_{1F} = \vec{F}_{F1}}_{3. \text{ Axiom}} = \underbrace{-\vec{F}_{F2} = \vec{F}_{2F}}_{3. \text{ Axiom}} \quad (3.5)$$

( $\vec{F}_{1F}$  ist die Kraft, die die Feder auf Masse 1 ausübt usw.). Das mittlere Gleichheitszeichen gilt, weil die Feder unbeschleunigt (in Ruhe!) ist und daher die Gesamtkraft  $\vec{F}_{F1} + \vec{F}_{F2}$  auf die Feder verschwinden muss. Nach dem 2. Axiom folgt nach dem Loslassen

$$-m_1 \vec{a}_1 = m_2 \vec{a}_2. \quad (3.6)$$

Für die Beträge folgt  $m_1/m_2 = a_2/a_1$ . Damit können wir das Verhältnis einer Probemasse zu einer bekannten Masse über die messbaren Beschleunigungen bestimmen. Dann brauchen wir nur noch eine Referenzmasse, d.h. ein Massennormal, um eine Masseneinheit (das Kilogramm) zu definieren. Damit können wir dann über  $\vec{F} = m_t \vec{a}$  auch Kräfte messen und eine Einheit (1 Newton := 1 kg m/s<sup>2</sup>) festlegen.

Wir werden in Abschnitt 4.2 ein Beispiel diskutieren, bei dem das Reaktionsprinzip nicht gilt.

### 3.1.4 Das Superpositionsprinzip

Das Superpositionsprinzip ist eigentlich ein zusätzliches Axiom, was Newton auch bewusst war, wurde von ihm aber nicht als gleichberechtigtes Axiom bezeichnet, vielleicht, weil es ihm selbstverständlich schien. Die Aussage ist: Wirken zwei oder mehr Kräfte  $\vec{F}_i$  auf einen Körper, so ist die gesamte Kraft (die im 2. Axiom auftritt) die *vektorielle* Summe

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = \sum_i \vec{F}_i. \quad (3.7)$$

### 3.1.5 Kraftfelder

Es ist sinnvoll, Kräfte begrifflich von den Körpern, auf die sie wirken, zu trennen.

*Definition:* Ein *Kraftfeld*  $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$  ist die Kraft, die an einem Ort  $\vec{r}$  zur Zeit  $t$  auf einen Testkörper mit der Geschwindigkeit  $\dot{\vec{r}}$  wirken würde.

Das Kraftfeld ist also insbesondere an jedem Punkt definiert, egal ob sich dort ein Massenpunkt befindet oder nicht. Das macht es zu einem *Feld*. Es kann zusätzlich von der Zeit  $t$  und von der Geschwindigkeit zur Zeit  $t$  abhängen. Höhere Ableitungen von  $\vec{r}(t)$  sowie Abhängigkeiten von  $\vec{r}$  oder  $\dot{\vec{r}}$  zu früheren Zeitpunkten kommen in fundamentalen Kräften nicht vor. Sie werden daher in der Mechanik meist nicht behandelt. Man könnte aber natürlich einen Roboter konstruieren, der seine Bewegung  $\vec{r}(t)$  misst und daraus alle Ableitungen  $\dot{\vec{r}}(t)$ ,  $\ddot{\vec{r}}(t)$ , ... berechnen kann. Der Antrieb könnte dann so geregelt werden, dass die Kraft tatsächlich von den oben ausgeschlossenen Größen abhängt, z.B. in der Form

$$\vec{F}(t) = -k \vec{r}(t - \Delta t) \quad (3.8)$$

oder

$$\vec{F}(t) = -\alpha \ddot{\vec{r}}(t). \quad (3.9)$$

## 3.2 Beispiele für Kräfte

### 3.2.1 Gewichtskraft

Wir wissen aus Erfahrung, dass die oben genannte Eisenkugel *schwerer* ist als der gleich große Ball. Das hat zunächst nichts mit ihrer *trägen* Masse zu tun – die Kugel ist auch schwerer, wenn wir sie ohne Beschleunigung halten. Körper haben also eine weitere Eigenschaft, die wir *schwere Masse*  $m_s$  nennen, und die für die Eisenkugel größer ist als für den Ball. Wir beobachten, dass auf Körper eine Kraft  $\vec{F}_s$  in der Richtung nach „unten“ wirkt, die umso größer ist, je schwerer der Körper ist. Wir definieren die *schwere Masse*  $m_s$  durch

$$\vec{F}_s =: m_s \vec{g}. \quad (3.10)$$

Das ist noch nicht eindeutig, da wir den Betrag von  $\vec{g}$  noch nicht definiert haben (die Richtung ist nach „unten“). Nach dem 2. Axiom gilt für den freien Fall

$$m_t \vec{a} = m_s \vec{g} \quad \Rightarrow \quad \frac{m_t}{m_s} = \frac{|\vec{g}|}{|\vec{a}|} = \frac{g}{a}. \quad (3.11)$$

Nun können wir für irgendeinen Probekörper  $g = a$  festlegen, dann gilt für *diesen* Körper  $m_t = m_s$ . Die zunächst erstaunliche Beobachtung ist, dass dann für *alle* Körper die träge und die schwere Masse übereinstimmen,  $m_t = m_s$ . Das ist innerhalb der Newton-Mechanik nicht zu begründen, weist also auf grundlegendere Zusammenhänge

hin. Tatsächlich erweist sich die Übereinstimmung als natürliche Konsequenz der Allgemeinen Relativitätstheorie. Wir lassen daher den Index „t“ oder „s“ weg. Für einen Massenpunkt unter Einfluss der Schwerkraft gilt also

$$m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\vec{r}} = \vec{g}. \quad (3.12)$$

Das ist gerade der Fall konstanter Beschleunigung aus Abschnitt 2.2, wir erhalten also als Bahn eine Parabel.

### 3.2.2 Gravitationskraft

Für einen Körper, dessen Abstand vom Erdmittelpunkt sich im Vergleich zum Abstand selbst signifikant ändert, beobachtet man keine konstante Beschleunigung  $\vec{g}$ . Stattdessen gilt für die Kraft zwischen zwei Massen  $M$  und  $m$  (z.B. Erde und Satellit) das *Newtonsche Gravitationsgesetz*

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\gamma \frac{mM}{r^2} \hat{r}. \quad (3.13)$$

Hier sind  $\vec{r} \equiv r\hat{r}$  der Abstandsvektor und  $\gamma$  die Gravitationskonstante,  $\gamma \approx 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$ , eine Naturkonstante. Die Gravitationskraft ist immer anziehend.

### 3.2.3 Coulomb-Kraft

Die Kraft zwischen zwei Ladungen  $q_1$  und  $q_2$  hat eine sehr ähnliche Form, nämlich das *Coulomb-Gesetz*

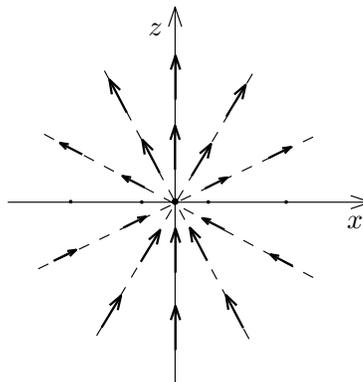
$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}. \quad (3.14)$$

Die Herleitung wird in der Elektrodynamik-Vorlesung erfolgen. Dass Gravitations- und Coulomb-Kraft dieselbe  $1/r^2$ -Form haben, liegt letztlich daran, dass beide durch masselose Teilchen vermittelt werden. Die Coulomb-Kraft kann anziehend (für  $q_1 q_2 < 0$ ) oder abstoßend (für  $q_1 q_2 > 0$ ) sein.

Gravitations- und Coulomb-Kraft sind Beispiele für *Zentralkräfte*. Das sind alle Kräfte der allgemeinen Form

$$\vec{F} = \underbrace{f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)}_{\text{Skalar}} \hat{r}. \quad (3.15)$$

Zentralkräfte sind also entlang des Abstandsvektors  $\vec{r} \equiv r\hat{r}$  zweier Massenpunkte gerichtet. Beachte, dass nicht allgemein gefordert wird, dass der Betrag  $f$  nur von  $\vec{r}$  oder gar nur vom Abstand  $r$  abhängt (für die Gravitationskraft und die Coulomb-Kraft ist das aber der Fall). Die folgende Skizze zeigt also auch eine Zentralkraft:



### 3.2.4 Lorentz-Kraft

Auf eine Ladung  $q$  in einem allgemeinen elektromagnetischen Feld wirkt die *Lorentz-Kraft*

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\dot{\vec{r}} \times \vec{B}, \quad (3.16)$$

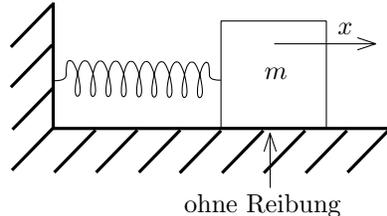
mit dem elektrischen Feld  $\vec{E}$  und dem magnetischen Induktionsfeld  $\vec{B}$ , oder ausführlicher

$$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = q\vec{E}(\vec{r}, t) + q\dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t). \quad (3.17)$$

Das ist das wichtigste Beispiel für eine geschwindigkeitsabhängige Kraft.

### 3.2.5 Federkraft

Für eine Feder gilt näherungsweise das *Hookesche Gesetz*  $F = -kx$  (in einer Dimension).



Die Kraft ist proportional zur Auslenkung und ihr entgegengesetzt gerichtet. Dieses Kraftgesetz beschreibt den *harmonischen Oszillator*. Wir werden später in dieser Vorlesung und auch in der Quantenmechanik sehen, dass der harmonische Oszillator weitaus wichtiger ist, als man vermuten könnte. Ein Grund dafür ist, dass sich fast jedes System gegenüber *kleinen* Auslenkungen aus dem Gleichgewicht wie ein harmonischer Oszillator verhält. Die offensichtliche Verallgemeinerung des Hookeschen Gesetzes auf drei Dimensionen lautet  $\vec{F} = -k\vec{r}$  (die Federkraft ist also eine Zentralkraft).

### 3.2.6 Reibungskräfte

Das sind Kräfte, die der Bewegung eines Körpers entgegen wirken und demnach seiner Geschwindigkeit gegenüber dem Medium bzw. der Unterlage entgegen gerichtet sind. Ihre Herleitung aus fundamentalen Kräften ist schwierig – dazu muss man die mikroskopischen Kräfte zwischen den Atomen der aneinander reibenden Medien betrachten und es tragen sehr viele Atome bei. Man findet *näherungsweise* folgende Formen:

- Gleitreibung:  $\vec{F} = -\mu_G F_\perp \hat{v}$  mit  $\hat{v} := \vec{v}/|\vec{v}|$ .  $\mu_G$  ist der dimensionslose Gleitreibungskoeffizient.  $F_\perp$  ist die Normalkraft, d.h. die Kraft, mit der der Körper auf der Unterlage lastet. (Es geht nur deren Betrag ein, also ist es nach dem Reaktionsprinzip gleichgültig, ob wir die Kraft der Unterlage auf den Körper betrachten oder die Kraft des Körpers auf die Unterlage.) Die Gleitreibung ist unabhängig vom Betrag der Geschwindigkeit. Beispiel: Auto mit blockierenden Bremsen. Rollreibung hat dieselbe Form mit einem kleineren (Rollreibungs-) Koeffizienten  $\mu_R$ .
- Stokessche Reibung:  $\vec{F} = -\alpha\vec{v} \equiv -\alpha v\hat{v}$ , für langsame Bewegung in einer Flüssigkeit oder einem Gas.
- Newtonsche Reibung:  $\vec{F} = -\beta v^2\hat{v}$ , für schnelle Bewegung in einer Flüssigkeit oder einem Gas, bei der Turbulenz auftritt. Hier ist die Näherung  $F \sim v^2$  besonders ungenau – es gibt keinen fundamentalen Grund für eine quadratische Abhängigkeit.

## 3.3 Wechsel des Bezugssystems und Scheinkräfte

Das 1. Axiom postuliert die Existenz von Inertialsystemen, also von Bezugssystemen, in denen für kräftefreie Körper  $\vec{v} = \text{const}$  gilt, also  $m\vec{a} = 0$ . Die Definition von Inertialsystemen macht schon klar, dass diese in der Newton-Mechanik eine besondere Rolle spielen. Es ist naheliegend zu fragen, ob es mehr als ein Inertialsystem gibt und, wenn ja, wie man alle Inertialsysteme finden kann.

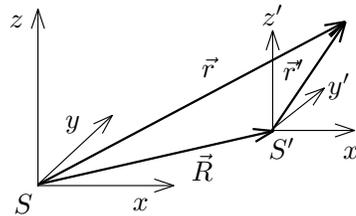
Darüberhinaus ist es oft nützlich, Bezugssysteme zu betrachten, die keine Inertialsysteme sind. Ein Beispiel ist das mit der Erde mitrotierende Bezugssystem. Dann gelten die Newtonschen Axiome nicht und wir müssen herausfinden, wie wir dennoch Bewegungsgleichungen aufstellen können. Transformationen, die nur die räumlichen Koordinaten betreffen, müssen wir hier nicht betrachten; sie können mit den Methoden aus Abschnitt 2.1

durchgeführt werden. Sie sind auch unerheblich für die Definition von Inertialsystemen, da diese von der Wahl des räumlichen Koordinatensystems unabhängig ist. Wir können daher kartesische räumliche Koordinaten mit derselben Längeneinheit zu jedem Zeitpunkt  $t$  annehmen. Dann kann ein Bezugssystem  $S'$  aus einem anderen,  $S$ , durch beliebige, zeitabhängige Kombinationen von Translationen und Rotationen hervorgehen.

### 3.3.1 Translationen und Galilei-Transformation

Wir nehmen an, dass die zwei Bezugssysteme  $S$ ,  $S'$  zur Zeit  $t = 0$  zusammenfallen.  $S$  sei ein Inertialsystem, d.h. ohne äußere Kräfte gelte  $m\ddot{\vec{r}} = 0$ .  $S'$  gehe aus  $S$  durch eine zeitabhängige Translation  $\vec{R}(t)$  hervor. (Nach Voraussetzung ist  $\vec{R}(0) = 0$ .)  $S'$  ist genau dann auch ein Inertialsystem, wenn für Koordinaten  $\vec{r}'$  in  $S'$  ebenfalls  $m\ddot{\vec{r}}' = 0$  gilt. Nun ist

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'. \quad (3.18)$$



Es folgt  $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \ddot{\vec{r}}'$  und damit  $m\ddot{\vec{r}}' = m\ddot{\vec{r}} - m\ddot{\vec{R}}$ . Dies ist genau dann gleich Null, wenn  $\ddot{\vec{R}} = 0$  gilt, also für  $\vec{V} := \dot{\vec{R}} = \text{const}$  und  $\vec{R} = \vec{V}t$ . Durch Translation erhält man also genau dann wieder ein Inertialsystem, wenn sich  $S'$  mit konstanter Geschwindigkeit relativ zum Inertialsystem  $S$  bewegt. Für die räumlichen Koordinaten gilt dann

$$\vec{r} = \vec{V}t + \vec{r}'. \quad (3.19)$$

Mit der zeitlichen Koordinate haben wir überhaupt nichts gemacht, also gilt

$$t = t'. \quad (3.20)$$

Zusammen bilden diese Abbildungen eine *Galilei-Transformation*. Wir werden sehen, dass Rotationen keine zusätzlichen Inertialsysteme erzeugen, also sind die Galilei-Transformationen die *allgemeinsten* Transformationen, die die Zeit invariant lassen und Inertialsysteme ineinander überführen.

Wirkt eine Kraft, so gilt in  $S$  (2. Axiom)

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}. \quad (3.21)$$

Für die Galilei-Transformation gilt  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t$ , also  $\ddot{\vec{r}}' = \ddot{\vec{r}}$  und  $m\ddot{\vec{r}}' = m\ddot{\vec{r}}$ . Das 2. Axiom behält also seine Form bei, wenn wir einfach

$$\vec{F}' = \vec{F} \quad (3.22)$$

setzen. Die Kraft ändert sich unter Galilei-Transformation nicht. Wir sollten aber  $\vec{F}'$  durch die transformierten  $\vec{r}'$ ,  $\dot{\vec{r}}'$  ausdrücken, falls die Kraft  $\vec{F}$  von  $\vec{r}$ ,  $\dot{\vec{r}}$  abhängt.

Bei einer *beliebigen* Translation von  $S'$  relativ zu  $S$  (i.A. keine Galilei-Transformation) gilt

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t) \quad (3.23)$$

und damit

$$m\ddot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{R}} + m\ddot{\vec{r}}'. \quad (3.24)$$

Im Inertialsystem  $S$  gilt  $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$ . Wir wollen die Kraft  $\vec{F}'$  in  $S'$  so *definieren*, dass  $\vec{F}' = m\ddot{\vec{r}}'$  auch in  $S'$  gilt. Die Newtonschen Axiome sprechen nur über Kräfte in Inertialsystemen, wir haben also die Freiheit, festzulegen, was wir mit Kräften in Nicht-Inertialsystemen meinen. Unsere Definition sorgt dafür, dass das Newtonsche Bewegungsgesetz auch in Bezugssystemen mit beschleunigter Translation dieselbe Form wie in Inertialsystemen

behält. Sie stellt damit sicher, dass wir auch in solchen Bezugssystemen Kräfte über Beschleunigungen messen können. Es folgt

$$\vec{F}' = m\ddot{\vec{r}}' = m\ddot{\vec{r}} - m\ddot{\vec{R}} = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}}. \quad (3.25)$$

Wir können die Newtonsche Bewegungsgleichung also auch in  $S'$  verwenden, wenn wir zur Kraft eine *Scheinkraft* oder *Trägheitskraft*  $-m\ddot{\vec{R}}$  addieren. Sie heißt Scheinkraft, weil sie nicht auf fundamentalen Kräften beruht, sondern nur auf der Wahl eines beschleunigten Bezugssystems. Scheinkräfte haben sehr wohl messbare und fühlbare Auswirkungen. Wir fühlen sie z.B., wenn wir in einem ICE bei einer Vollbremsung in oder gegen die Fahrtrichtung zu laufen versuchen. In der Allgemeinen Relativitätstheorie geht man noch einen Schritt weiter: Hier sind die Trägheitskraft  $-m\ddot{\vec{R}}$  und die Gewichtskraft  $m\vec{g}$  nicht fundamental verschieden.

### 3.3.2 Rotationsmatrizen

Als Vorbereitung für die Betrachtung von Rotationen von Bezugssystemen ist es nützlich, sich zu vergegenwärtigen, wie sich Vektoren unter Rotationen ändern. Rotationen sind spezielle Transformationen, die drei Bedingungen erfüllen:

1. Sie lassen die Norm (die Länge) aller Vektoren invariant.
2. Sie erhalten die Winkel zwischen Vektoren.
3. Sie überführen jedes Rechtssystem von Vektoren in ein Rechtssystem.

Wie können wir Rotationen mathematisch darstellen? Wir beobachten noch, dass es bei Rotationen in drei (und mehr) Dimensionen, aber nicht in zwei Dimensionen, auf die Reihenfolge ankommt. Man sieht leicht durch Ausprobieren, dass man nicht dasselbe Ergebnis erhält, wenn man einen Körper um  $90^\circ$  um die (beliebig, aber fest definierte)  $x$ -Achse und dann um  $90^\circ$  um die  $y$ -Achse dreht, oder wenn man die Drehungen in der umgekehrten Reihenfolge ausführt. Rotationen *kommutieren* also *nicht*.

Die Nichtkommutativität und die Bedingung 1 legen nahe, dass eine additive Vorschrift der Form  $\vec{b}' = \vec{b} + \vec{R}$  nicht zum Ziel führt. Daher probieren wir die Multiplikation mit einer Matrix:

$$\vec{b}' = \overleftrightarrow{R} \vec{b}. \quad (3.26)$$

Matrixmultiplikation ist i.A. nicht kommutativ, d.h.  $\overleftrightarrow{R}\overleftrightarrow{S} \neq \overleftrightarrow{S}\overleftrightarrow{R}$ .

Bedingung 1 erfordert, dass  $\overleftrightarrow{R}$  eine *orthogonale* Matrix ist, d.h.

$$\overleftrightarrow{R}\overleftrightarrow{R}^T = \overleftrightarrow{R}^T\overleftrightarrow{R} = \mathbb{1} \quad (3.27)$$

( $\overleftrightarrow{R}^T$  ist die transponierte Matrix zu  $\overleftrightarrow{R}$ ). Damit ist  $\overleftrightarrow{R}$  invertierbar und es gilt

$$\overleftrightarrow{R}^{-1} = \overleftrightarrow{R}^T. \quad (3.28)$$

Orthogonalität sichert auch, dass Bedingung 2 erfüllt ist.

Außerdem folgt

$$1 = \det \mathbb{1} = \det \overleftrightarrow{R}\overleftrightarrow{R}^T = \det \overleftrightarrow{R} \det \overleftrightarrow{R}^T = (\det \overleftrightarrow{R})^2, \quad (3.29)$$

also

$$\det \overleftrightarrow{R} = \pm 1. \quad (3.30)$$

Drei Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  bilden genau dann ein Rechtssystem in  $\mathbb{R}^3$ , wenn gilt

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} > 0. \quad (3.31)$$

Dann ist

$$\det \begin{pmatrix} \overleftrightarrow{(R\vec{a})}_1 & \overleftrightarrow{(R\vec{a})}_2 & \overleftrightarrow{(R\vec{a})}_3 \\ \overleftrightarrow{(R\vec{b})}_1 & \overleftrightarrow{(R\vec{b})}_2 & \overleftrightarrow{(R\vec{b})}_3 \\ \overleftrightarrow{(R\vec{c})}_1 & \overleftrightarrow{(R\vec{c})}_2 & \overleftrightarrow{(R\vec{c})}_3 \end{pmatrix} = \det \left( \overleftrightarrow{R} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \right) = \det \overleftrightarrow{R} \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Bedingung 3 erfordert, dass dieser Ausdruck ebenfalls positiv ist. Daher muss  $\det \overleftrightarrow{R} > 0$  gelten, also

$$\det \overleftrightarrow{R} = +1. \quad (3.33)$$

Bemerkung: Matrizen mit  $\det \overleftrightarrow{R} = -1$  beschreiben eine zusätzliche Inversion.

Die Menge aller orthogonalen  $N \times N$ -Matrizen ( $N \geq 1$ ; der Fall  $N = 1$  ist aber trivial) mit Determinante  $+1$  ist eine *Gruppe* bezüglich der Matrixmultiplikation. Man bezeichnet sie als *Spezielle Orthogonale Gruppe*  $SO(N)$ . („Speziell“ bezieht sich auf die Eigenschaft  $\det \overleftrightarrow{R} = 1$ .) Die Drehungen in drei Dimensionen bilden also eine Gruppe, die zu  $SO(3)$  isomorph ist. „Isomorph“ bedeutet, dass es eine Eins-zu-Eins-Abbildung gibt, die die Gruppenstruktur erhält. Für unsere Zwecke können wir die Gruppe der Drehungen und  $SO(3)$  als identisch ansehen. Mathematisch korrekt ist  $SO(3)$  eine *treue Darstellung* der Drehgruppe.

Wir betrachten noch *infinitesimale Drehungen*, das sind Drehungen, die nur infinitesimal von der Identitätsoperation abweichen:

$$\overleftrightarrow{R} = \mathbb{1} + \overleftrightarrow{D}, \quad (3.34)$$

wobei  $\overleftrightarrow{D}$  eine  $3 \times 3$ -Matrix mit infinitesimalen Komponenten ist. Es ist dann

$$\overleftrightarrow{R}^T = \mathbb{1} + \overleftrightarrow{D}^T, \quad (3.35)$$

$$\overleftrightarrow{R}^{-1} = \mathbb{1} - \overleftrightarrow{D} \quad (3.36)$$

(wegen  $(\mathbb{1} - \overleftrightarrow{D})(\mathbb{1} + \overleftrightarrow{D}) = \mathbb{1} - \overleftrightarrow{D}^2 \cong \mathbb{1}$  zur Ordnung  $\overleftrightarrow{D}$ ). Wegen  $\overleftrightarrow{R}^{-1} = \overleftrightarrow{R}^T$  folgt

$$\overleftrightarrow{D}^T = -\overleftrightarrow{D}, \quad (3.37)$$

d.h.  $\overleftrightarrow{D}$  ist *antisymmetrisch*. Daher lässt sich  $\overleftrightarrow{D}$  schreiben als

$$\overleftrightarrow{D} = \begin{pmatrix} 0 & -d\Omega_3 & d\Omega_2 \\ d\Omega_3 & 0 & -d\Omega_1 \\ -d\Omega_2 & d\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Wie wirkt die infinitesimale Drehung auf einen beliebigen Vektor  $\vec{b}$ ?

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{R}\vec{b} &= (\mathbb{1} + \overleftrightarrow{D})\vec{b} \\ &= \vec{b} + \begin{pmatrix} 0 & -d\Omega_3 & d\Omega_2 \\ d\Omega_3 & 0 & -d\Omega_1 \\ -d\Omega_2 & d\Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \vec{b} \\ &= \vec{b} + \begin{pmatrix} d\Omega_2 b_3 - d\Omega_3 b_2 \\ d\Omega_3 b_1 - d\Omega_1 b_3 \\ d\Omega_1 b_2 - d\Omega_2 b_1 \end{pmatrix} = \vec{b} + d\vec{\Omega} \times \vec{b}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

wobei

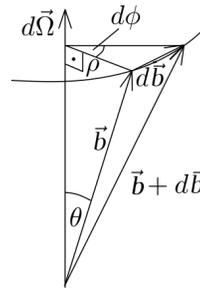
$$d\vec{\Omega} := \begin{pmatrix} d\Omega_1 \\ d\Omega_2 \\ d\Omega_3 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

ist. Die infinitesimale Änderung von  $\vec{b}$  ist demnach

$$d\vec{b} = d\vec{\Omega} \times \vec{b} \quad (3.41)$$

und die Änderungsrate

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{b}. \quad (3.42)$$



Der Winkel  $d\phi$  (siehe Skizze) ist

$$d\phi = \frac{db}{\rho} = \frac{|d\vec{\Omega} \times \vec{b}|}{\rho} = \frac{d\Omega b \sin \theta}{b \sin \theta} = d\Omega. \quad (3.43)$$

Da  $d\phi/dt =: \omega$  die momentane Winkelgeschwindigkeit ist, können wir  $d\vec{\Omega}/dt$  als vektorielle Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  verstehen. Ihr Betrag ist  $|d\vec{\Omega}/dt| = \omega$  und ihre Richtung bezeichnet die momentane Drehachse, vgl. Abschnitt 2.3. Damit erhalten wir für reine Drehungen

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{b}. \quad (3.44)$$

$\vec{\omega}$  ist kein „richtiger“ Vektor: Unter Inversion des Raumes ändern  $\vec{b}$  und  $d\vec{b}/dt$  als Vektoren ihr Vorzeichen. Die obige Beziehung gilt nur dann für alle  $\vec{b}(t)$ , wenn  $\vec{\omega}$  unter Inversion das Vorzeichen *nicht* ändert. Größen, die sich, wie  $\vec{\omega}$ , unter Rotationen wie Vektoren transformieren, sich aber unter Inversion nicht ändern, nennt man *Pseudovektoren* oder *axiale Vektoren*. Im vorliegenden Fall kann man den axialen Charakter von  $\vec{\omega} = d\vec{\Omega}/dt$  auch darauf zurückführen, dass  $d\Omega_1, d\Omega_2, d\Omega_3$  „eigentlich“ die außerdiagonalen Komponenten einer Matrix  $\overleftrightarrow{D}$  bezeichnen.

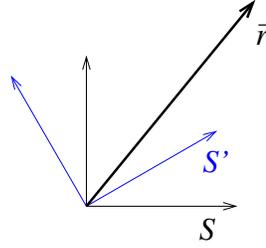
### 3.3.3 Rotationen von Bezugssystemen

Wir betrachten nun reine Rotationen von Bezugssystemen. Durch Kombination von Translationen und Rotationen ergeben sich keine neuen Erkenntnisse. Die beiden Bezugssysteme  $S$  und  $S'$  sollen für  $t = 0$  zusammenfallen. Ihre Koordinatenursprungspunkte sollen für alle Zeiten zusammenfallen.  $S$  sei durch ein Dreibein  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  charakterisiert,  $S'$  durch ein Dreibein  $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$ . Der interessante Fall ist natürlich der, dass das Dreibein  $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$  von der Zeit abhängt.  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  sollen hingegen nicht von der Zeit abhängen, d.h.  $S$  ist ein Inertialsystem.

Wir können einen Ortsvektor  $\vec{r}$  in  $S$  oder  $S'$  darstellen:

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^3 r_i \hat{e}_i = \sum_{i=1}^3 r'_i \hat{e}'_i. \quad (3.45)$$

Derselbe Vektor  $\vec{r}$  hat also in  $S$  die Komponenten  $r_1, r_2, r_3$  und in  $S'$  die Komponenten  $r'_1, r'_2, r'_3$ .



Um die Koeffizienten  $r'_i$  zu finden, multiplizieren wir den Ortsvektor  $\vec{r}$  mit  $\hat{e}'_i$ :

$$\hat{e}'_i \cdot \vec{r} = \hat{e}'_i \cdot \sum_k r'_k \hat{e}'_k = \sum_k r'_k \underbrace{\hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_k}_{=\delta_{ik}} = r'_i. \quad (3.46)$$

Andererseits ist

$$\hat{e}'_i \cdot \vec{r} = \hat{e}'_i \cdot \sum_k r_k \hat{e}_k = \sum_k r_k \hat{e}'_i \cdot \hat{e}_k =: \sum_k R_{ik} r_k, \quad (3.47)$$

also

$$r'_i = \sum_k R_{ik} r_k. \quad (3.48)$$

Die Einheitsvektoren in  $S'$  entwickeln wir nach den Einheitsvektoren in  $S$ :

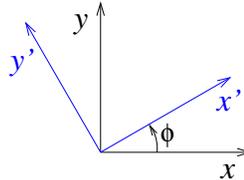
$$\hat{e}'_i = \sum_k (\hat{e}'_i \cdot \hat{e}_k) \hat{e}_k = \sum_k R_{ik} \hat{e}_k. \quad (3.49)$$

Probe: Dann folgt

$$\sum_i r'_i \hat{e}'_i = \sum_{ijk} R_{ij} r_j R_{ik} \hat{e}_k = \sum_{jk} r_j \underbrace{\sum_i (R^T)_{ji} R_{ik}}_{=\delta_{jk}} \hat{e}_k = \sum_j r_j \hat{e}_j, \quad (3.50)$$

wie erwartet, wobei wir benutzt haben, dass  $\vec{R}$  orthogonal ist.

Als Beispiel betrachten wir den Fall, dass  $S'$  aus  $S$  durch Drehung um einen Winkel  $\phi$  um die  $z$ -Achse hervorgeht. Die Transformation macht man sich am besten anhand einer Skizze klar:



Der Zusammenhang zwischen den Koordinateneinheitsvektoren lautet

$$\hat{x}' = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}, \quad (3.51)$$

$$\hat{y}' = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}, \quad (3.52)$$

$$\hat{z}' = \hat{z}. \quad (3.53)$$

Daraus folgt

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

Während der Ortsvektor  $\vec{r}$  in  $S$  und  $S'$  derselbe ist und nur unterschiedliche Komponenten hinsichtlich der unterschiedlichen Basisvektoren hat, ist die Geschwindigkeit für einen Beobachter in  $S$  und für eine Beobachter in  $S'$  echt verschieden. Für einen Beobachter in  $S$  ist die Geschwindigkeit

$$\dot{\vec{r}} = \sum_i \dot{r}_i \hat{e}_i = \sum_i (\dot{r}'_i \hat{e}'_i + r'_i \dot{\hat{e}}'_i), \quad (3.55)$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass sich die Einheitsvektoren  $\hat{e}_i$  aus Sicht von  $S$  zeitlich nicht ändern. Für einen in  $S'$  mitrotierenden Beobachter ist dagegen

$$\dot{\vec{r}}' = \sum_i \dot{r}'_i \hat{e}'_i; \quad (3.56)$$

der Beobachter rotiert mit, also ändern sich für ihn die  $\hat{e}'_i$  nicht. In der Gleichung steht  $\dot{\vec{r}}'$  für

$$\left(\frac{d}{dt}\right)' \vec{r}, \quad (3.57)$$

also für die Zeitableitung bezüglich  $S'$  des Ortsvektors  $\vec{r}$ . Der Ortsvektor  $\vec{r}$  ist *derselbe* in  $S$  und  $S'$ , so dass es keinen Grund gibt, die Notation  $\vec{r}'$  für den Ortsvektor zu verwenden. Der Strich bezieht sich also hier immer auf die Zeitableitung, nicht auf den Ortsvektor. Es folgt

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}' + \sum_i r'_i \dot{\hat{e}}'_i. \quad (3.58)$$

Als nächstes wollen wir herausfinden, wie sich die Einheitsvektoren  $\hat{e}'_i$  aus Sicht von  $S$  ändern. Die Bewegung von  $S'$ , und damit von  $\hat{e}'_i$ , relativ zu  $S$  ist zu jedem Zeitpunkt durch die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  charakterisiert.  $\vec{\omega}$  ist i.A. zeitabhängig. Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass sich ein in  $S'$  fester Vektor  $\vec{b}'$  aus Sicht von  $S$  gemäß

$$\frac{d}{dt} \vec{b}' = \vec{\omega} \times \vec{b}' \quad (3.59)$$

ändert.

Das gilt für jeden in  $S'$  festen Vektor, insbesondere also für  $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$ . Damit folgt

$$\dot{\hat{e}}'_i = \vec{\omega} \times \hat{e}'_i \quad (3.60)$$

und daher

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}' + \sum_i r'_i \vec{\omega} \times \hat{e}'_i = \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \sum_i r'_i \hat{e}'_i = \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (3.61)$$

nach Gl. (3.45). Eine analoge Beziehung finden wir für jeden beliebigen Vektor, nicht nur für den Ortsvektor. Dies können wir als allgemeine Operatoridentität formulieren:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}}_{\text{Ableitung aus Sicht von } S} = \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\right)'}_{\text{Ableitung aus Sicht von } S'} + \vec{\omega} \times, \quad (3.62)$$

die wie uns angewendet auf einen beliebigen Vektor vorstellen.

Nochmals auf Gleichung (3.61) angewendet ergibt diese Identität

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}}' + \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d}{dt} \vec{r} \\ &\stackrel{(3.62)}{=} \ddot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= \ddot{\vec{r}}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{aligned} \quad (3.63)$$

(beachte  $\dot{\vec{\omega}} = \dot{\vec{\omega}}'$ , da  $\vec{\omega} \times \vec{\omega} = 0$ ). Wir definieren  $\vec{F}'$  wieder so, dass  $\vec{F}' = m\ddot{\vec{r}}'$  gilt. Dann ist

$$\begin{aligned} \vec{F}' &= m\ddot{\vec{r}}' = m\ddot{\vec{r}} - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= \vec{F} - \underbrace{m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}}_{=: \vec{F}'_{\dot{\omega}}} - \underbrace{2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'}_{=: \vec{F}'_C} - \underbrace{m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{=: \vec{F}'_Z}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Die Kraft  $\vec{F}'_{\omega}$  tritt nur für beschleunigte Rotationen auf. Sie ist die Trägheitskraft entlang der Bahn. Die *Corioliskraft*  $\vec{F}'_C$  und die *Zentrifugalkraft*  $\vec{F}'_Z$  treten auch bei gleichförmiger Rotation auf. Die Corioliskraft enthält die Geschwindigkeit  $\dot{\vec{r}}'$  bezüglich des rotierenden Systems  $S'$ . Die anderen beiden Scheinkräfte hängen nur vom Ort ab. Es sei daran erinnert, dass  $\vec{r} = \vec{r}'$  gilt, wobei wir je nach Aufgabenstellung Koordinaten bezüglich  $S$  oder  $S'$  verwenden können, siehe Gl. (3.45). Die Scheinkräfte führen zur einer Bewegung in  $S'$ , die gerade so beschaffen ist, dass in einem Inertialsystem  $S$  die Bewegung im kräftefreien Fall gleichförmig verläuft.

Beispiel: Ein kräftefreier Massenpunkt ruhe bei  $\vec{r}$  im Inertialsystem  $S$ . Wie lautet die Scheinkraft in einem gleichmäßig rotierenden Bezugssystem  $S'$ ? Es gilt

$$\vec{F}' = -2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \quad (3.65)$$

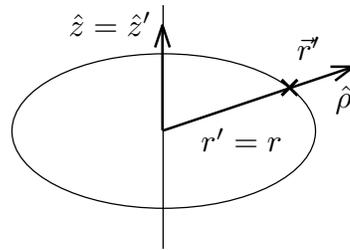
$$\dot{\vec{r}}' = -\vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (3.66)$$

wegen Gl. (3.61) (aus Sicht von  $S'$  bewegt sich der Massenpunkt in der entgegengesetzten Richtung im Vergleich zur Rotation von  $S'$  relativ zu  $S$ ). Es folgt

$$\vec{F}' = 2m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (3.67)$$

Wir verwenden Zylinderkoordinaten mit der  $z$ - (und  $z'$ -) Achse entlang  $\vec{\omega}$ . Dann ist

$$\vec{F}' = -m\omega^2 r' \hat{\rho}' = -m\omega^2 r \hat{\rho}'. \quad (3.68)$$



Man beachte, dass die Zentrifugalkraft nach außen wirkt, aber von der doppelt so großen Coriolis-Kraft überkompensiert wird. Das Ergebnis ist mit der Zentripetalbeschleunigung  $\vec{a}' = -\omega^2 r \hat{\rho}'$  aus Abschnitt 2.3 konsistent.

## 3.4 Newtons Bewegungsgleichung als gewöhnliche Differentialgleichung

Die Newtonsche Bewegungsgleichung für einen Massenpunkt ist von der Form  $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ , sofern die Masse konstant ist. Dies ist ein System von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung: In kartesischen Koordinaten ist

$$m\ddot{x}_i - F_i(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, t) = 0 \quad (3.69)$$

für  $i = 1, 2, 3$ . Wir können auch schreiben

$$\ddot{x}_i = \frac{1}{m} F_i(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, t), \quad (3.70)$$

dies ist ein System von drei *expliziten* Differentialgleichungen 2. Ordnung, da sie nach den höchsten Ableitungen aufgelöst sind.

### 3.4.1 Lineare Differentialgleichungen

Sind die  $F_i$  lineare Funktionen der  $x_j$  und  $\dot{x}_j$  (aber nicht notwendig von  $t$ ), so ist das System von Differentialgleichungen zusätzlich *linear*. In diesem Fall enthält die allgemeine Lösung immer 6 freie Parameter, die z.B.

aus den 6 Anfangswerten  $x_j(t_0), \dot{x}_j(t_0)$  zu einer Startzeit  $t_0$  bestimmt werden können. Für Systeme linearer Differentialgleichungen ist die Lösung durch die Vorgabe dieser Anfangswerte stets eindeutig bestimmt.

Lineare Differentialgleichungen haben die allgemeine Form

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j(t) \underbrace{x^{(j)}(t)}_{j\text{-te Ableitung}} = \beta(t). \tag{3.71}$$

Man beachte, dass die Koeffizienten  $\alpha_j$  und die Inhomogenität  $\beta$  von  $t$  abhängen können. Ist  $\beta \equiv 0$ , so heißt die Gleichung *homogen*, sonst *inhomogen*. Für homogene lineare Differentialgleichung gilt das Superpositionsprinzip: Sind  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  Lösungen, so ist es auch  $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$  mit beliebigen Konstanten  $c_1, c_2$ .  $m$  Lösungen  $x_j(t)$  heißen, analog zu Vektoren, *linear unabhängig*, wenn  $\sum_{j=1}^m \alpha_j x_j(t) \equiv 0$  nur durch  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$  erfüllt werden kann.

Für homogene lineare Differentialgleichung können wir die Parameter  $\gamma_j$  mit  $j = 1, \dots, n$  als Koeffizienten einer Darstellung durch  $n$  unabhängige Lösungen wählen:

$$x(t; \gamma_1, \dots, \gamma_n) = \sum_{j=1}^n \gamma_j x_j(t). \tag{3.72}$$

Kennt man also  $n$  unabhängige Lösungen, so hat man schon die allgemeine Lösung.

Für die *inhomogene* lineare Differentialgleichung

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j(t) x^{(j)} = \beta(t) \tag{3.73}$$

sei  $x_{\text{spz}}(t)$  eine spezielle Lösung. Sei  $x_{\text{hom}}(t; \gamma_1, \dots, \gamma_n)$  die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung  $\sum_{j=0}^n \alpha_j(t) x^{(j)} = 0$ . Dann ist

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j(t) (x_{\text{spz}} + x_{\text{hom}})^{(j)} = \underbrace{\sum_{j=0}^n \alpha_j(t) x_{\text{spz}}^{(j)}}_{=\beta(t)} + \underbrace{\sum_{j=0}^n \alpha_j(t) x_{\text{hom}}^{(j)}}_{=0} = \beta(t) \tag{3.74}$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Da  $x_{\text{spz}}(t) + x_{\text{hom}}(t; \gamma_1, \dots, \gamma_n)$  bereits von  $n$  unabhängigen Parametern  $\gamma_j$  abhängt, ist es sogar die allgemeine Lösung. Wir brauchen für die Lösung also die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung und nur *eine* spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung.

Besonders einfach sind homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Sie haben die allgemeine Form

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j x^{(j)}(t) = 0. \tag{3.75}$$

Solche Gleichungen treten in der Physik häufig auf. Sie lassen sich i.A. mit einem Exponentialansatz  $x(t) = x_0 e^{ct}$  lösen, wobei die möglichen Werte der Konstanten  $c$  evtl. komplex sein können. Einsetzen in die Gleichung ergibt

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j x_0 c^j e^{ct} = 0. \tag{3.76}$$

Die Konstante  $x_0$  ist offenbar beliebig. Wir teilen durch  $x_0 e^{ct}$  und erhalten eine algebraische Gleichung  $n$ -ten Grades für  $c$ :

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j c^j = 0. \tag{3.77}$$

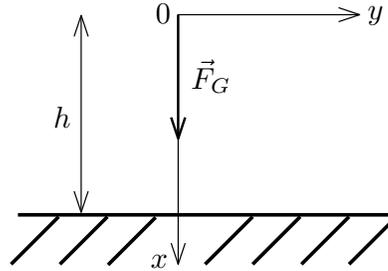
Diese hat immer  $n$  komplexe Lösungen, wobei mehrere zusammenfallen können. Falls sie dies tun, kommt man mit dem verallgemeinerten Ansatz  $x(t) = x_0 t^k e^{ct}$  weiter. Falls nicht, existieren  $n$  *verschiedene* Lösungen (Wurzeln)

$c_j, j = 1, \dots, n$  und wir erhalten  $n$  linear unabhängige Lösungen proportional zu  $e^{c_j t}$ . Die allgemeine Lösung ist dann die Superposition dieser linear unabhängigen Lösungen,

$$x(t) = \sum_{j=1}^n \gamma_j e^{c_j t} \quad (3.78)$$

mit  $n$  freien Parametern  $\gamma_j$ .

Beispiel: Freier Fall unter Einfluss der Luftreibung. Dies ist ein eindimensionales Problem, wir wählen die Koordinate  $x$  nach unten.



Es wirken die Gewichtskraft  $\vec{F}_G = mg\hat{x}$  und die *Stokessche* Reibungskraft  $\vec{F}_R = -\alpha\dot{x}\hat{x}$ . Die Bewegungsgleichung (2. Axiom) lautet

$$m\ddot{x}\hat{x} = mg\hat{x} - \alpha\dot{x}\hat{x}, \quad (3.79)$$

also

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} = mg. \quad (3.80)$$

Dies ist eine lineare, inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung. Aber  $x$  selbst tritt gar nicht auf, also ist es auch eine lineare, inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung für  $\dot{x}$ .

(a) Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:

$$m\ddot{x}_{\text{hom}} + \alpha\dot{x}_{\text{hom}} = 0. \quad (3.81)$$

Ansatz:  $\dot{x}_{\text{hom}} = \gamma_1 e^{ct}$  ( $\gamma_1, c$  sind unbekannte Konstanten). Einsetzen ergibt

$$-m\gamma_1 c e^{-ct} + \alpha\gamma_1 e^{-ct} = 0 \Rightarrow -mc + \alpha = 0 \Rightarrow c = \frac{\alpha}{m}. \quad (3.82)$$

Also ist  $\dot{x}_{\text{hom}} = \gamma_1 e^{-\alpha t/m}$  eine Lösung für alle  $\gamma_1$ . Da dies *einen* Parameter ( $\gamma_1$ ) enthält, ist es bereits die allgemeine Lösung.

(b) Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung: Ansatz  $\dot{x}_{\text{spz}} = \text{const} =: v_0$ . Einsetzen ergibt

$$0 + \alpha v_0 = mg \Rightarrow v_0 = \frac{mg}{\alpha}. \quad (3.83)$$

(c) Allgemeine Lösung: Es folgt

$$\dot{x}(t) = \gamma_1 e^{-\frac{\alpha}{m}t} + \frac{m}{\alpha}g. \quad (3.84)$$

Um  $x(t)$  zu finden, müssen wir nochmals integrieren:

$$x(t) = \gamma_2 - \gamma_1 \frac{m}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{m}t} + \frac{m}{\alpha}gt. \quad (3.85)$$

Dies enthält 2 Parameter, ist also tatsächlich die allgemeine Lösung. Wir brauchen zwei Anfangsbedingungen, um die Lösung eindeutig festzulegen. Sei  $x(0) = 0$  (Skizze!) und  $\dot{x}(0) = 0$  (Start in Ruhe). Dann folgt

$$0 = x(0) = \gamma_2 - \gamma_1 \frac{m}{\alpha}, \quad (3.86)$$

$$0 = \dot{x}(0) = \gamma_1 + \frac{m}{\alpha} g \Rightarrow \gamma_1 = -\frac{m}{\alpha} g \tag{3.87}$$

und schließlich

$$\gamma_2 = \gamma_1 \frac{m}{\alpha} = -\frac{m^2}{\alpha^2} g. \tag{3.88}$$

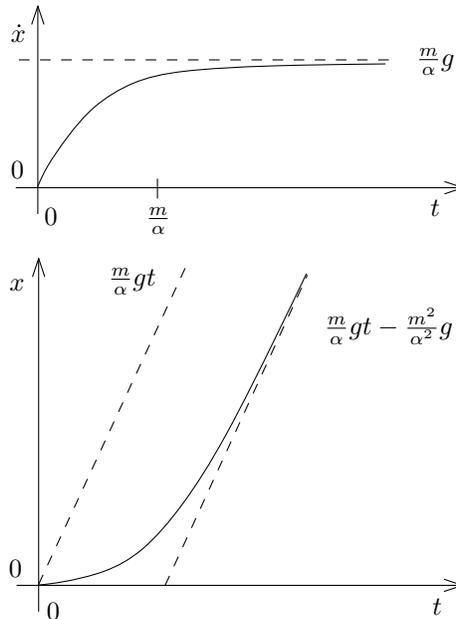
Also erhalten wir die spezielle Lösung

$$x(t) = -\frac{m^2}{\alpha^2} g + \frac{m^2}{\alpha^2} g e^{-\frac{\alpha}{m} t} + \frac{m}{\alpha} g t = \frac{m}{\alpha} g t - \frac{m^2}{\alpha^2} g (1 - e^{-\frac{\alpha}{m} t}) \tag{3.89}$$

und für die Geschwindigkeit

$$\dot{x}(t) = \frac{m}{\alpha} g - \frac{m}{\alpha} g e^{-\frac{\alpha}{m} t} = \underbrace{\frac{m}{\alpha} g}_{=: v_G \text{ (Grenzgeschwindigkeit)}} (1 - e^{-\frac{\alpha}{m} t}). \tag{3.90}$$

Der Körper erreicht also nach einer Zeit der Größenordnung  $m/\alpha$  asymptotisch die Grenzgeschwindigkeit  $v_G = mg/\alpha$ . Für einen Fallschirmspringer sind das, vor dem Öffnen des Fallschirms, ungefähr 200 km/h.



### 3.4.2 Nichtlineare Differentialgleichungen

Sind im System

$$\ddot{x}_i = \frac{1}{m} F_i(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, t), \tag{3.91}$$

$i = 1, 2, 3$ , die Funktionen  $F_i$  nicht sämtlich linear in allen  $x_j$  und  $\dot{x}_j$ , so ist das System *nichtlinear*. Dann ist es *nicht* allgemein wahr, dass bei Vorgabe der 6 Anfangswerte  $x_j(t_0)$  und  $\dot{x}_j(t_0)$  eine Lösung für alle Zeiten überhaupt existiert und eindeutig bestimmt ist. Wir wollen hier nicht die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen besprechen. Es sei nur gesagt, dass es für die *Existenz* einer *eindeutigen* Lösung hinreichend (aber nicht notwendig) ist, dass die Ableitungen  $\partial F_i / \partial x_j$  und  $\partial F_i / \partial \dot{x}_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , sämtlich beschränkt sind. In diesem Fall kann man die allgemeine Lösung als Schar mit 6 Parametern, nämlich  $x_j(t_0)$ ,  $\dot{x}_j(t_0)$  schreiben. Beispiel: Die eigentlich harmlos wirkende Newtonsche Bewegungsgleichung in einer Dimension

$$m\ddot{x} = \beta \sqrt{|\dot{x}|} \tag{3.92}$$

mit  $\beta > 0$  erfüllt die Bedingungen nicht, denn  $\partial F / \partial \dot{x}$  ist unbeschränkt. Tatsächlich ist die Lösung nicht eindeutig durch  $x(t_0)$  und  $\dot{x}(t_0)$  bestimmt.

## 3.5 Arbeit und Energie

### 3.5.1 Arbeit

Wir betrachten die Newtonsche Bewegungsgleichung für einen Massenpunkt in drei Dimensionen,  $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ . Wir nehmen  $m = \text{const}$  an, dann folgt

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t). \quad (3.93)$$

Es ist klar, dass eine Anstrengung nötig ist, um einen Körper gegen eine Kraft zu bewegen (z.B. Stauchung einer Feder). Ein quantitatives Maß dafür ist die *Arbeit*: Um einen Massenpunkt in einem Kraftfeld  $\vec{F}$  von  $\vec{r}$  nach  $\vec{r} + d\vec{r}$  zu bewegen, muss die Arbeit

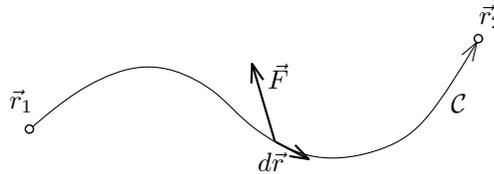
$$\delta W := -\vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (3.94)$$

geleistet werden. Für eine Bewegung *entgegen* der Kraft ist  $\vec{F} \cdot d\vec{r} < 0$  und daher  $\delta W > 0$ ; Arbeit muss *geleistet* werden. Wir zählen Arbeit positiv, die in das System hinein fließt.

$$\begin{array}{c} \vec{F}(\vec{r}) \\ \leftarrow \quad \rightarrow \\ d\vec{r} \end{array} \quad \delta W > 0$$

Für eine Bewegung *in die Richtung* der Kraft ist dagegen  $\vec{F} \cdot d\vec{r} > 0$  und daher  $\delta W < 0$ : Arbeit wird *vom System* geleistet. In jedem Fall zählen wir Arbeit positiv, die in das System hinein fließt. Wir verwenden hier mit Absicht ein besonderes Symbol  $\delta W$  für die infinitesimale Arbeit, auf dessen Bedeutung wir in Kürze zurückkommen. Die geleistete Arbeit für eine nicht infinitesimale Bewegung vom Ort  $\vec{r}_1$  zum Ort  $\vec{r}_2$  entlang einer Bahn  $C$  lautet dann

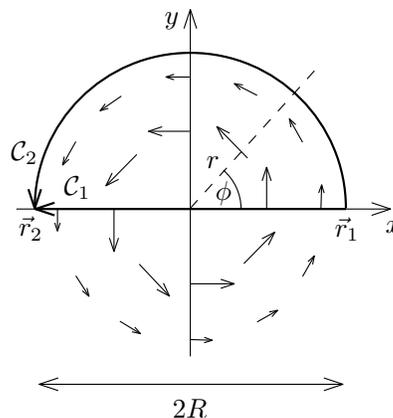
$$W_C = \int_C \delta W = - \int_C d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t). \quad (3.95)$$



Das Kurvenintegral rechnet man aus, indem man  $\vec{r}$  entlang der Bahn durch einen skalaren Parameter ausdrückt. Das kann z.B. die Zeit  $t$  oder die Bogenlänge  $s$  sein.

Beispiel: In zwei Dimensionen sei

$$\vec{F} = \alpha e^{-r/a} \hat{\phi}. \quad (3.96)$$



Wir betrachten die skizzierten Bahnen  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ . Es ist

$$W_{\mathcal{C}_1} = - \int_{\mathcal{C}_1} d\vec{r} \cdot \alpha e^{-r/a} \hat{\phi} = - \int_R^{-R} dx \hat{x} \cdot \alpha e^{-|x|/a} \hat{\phi} = 0, \quad (3.97)$$

da fast überall auf der Bahn  $\vec{F} \perp d\vec{r}$  gilt, aber

$$W_{\mathcal{C}_2} = - \int_{\mathcal{C}_2} d\vec{r} \cdot \alpha e^{-r/a} \hat{\phi} = - \int_0^\pi d\phi R \hat{\phi} \cdot \alpha e^{-R/a} \hat{\phi} = -\pi \alpha R e^{-R/a} \neq 0. \quad (3.98)$$

Die Arbeit ist hier also vom Weg abhängig.

Wir kommen nun auf die Bedeutung des Symbols  $\delta W$  zurück.  $\delta W$  anstelle von  $dW$  bedeutet, dass  $\delta W$  zwar infinitesimal ist, aber nicht unbedingt ein *totales Differential*. Es wäre ein totales Differential, wenn eine Funktion  $W(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$  existierte, so dass gilt

$$\begin{aligned} \delta W = dW &= \frac{\partial W}{\partial r_1} dr_1 + \frac{\partial W}{\partial r_2} dr_2 + \frac{\partial W}{\partial r_3} dr_3 + \frac{\partial W}{\partial \dot{r}_1} d\dot{r}_1 + \frac{\partial W}{\partial \dot{r}_2} d\dot{r}_2 + \frac{\partial W}{\partial \dot{r}_3} d\dot{r}_3 + \frac{\partial W}{\partial t} dt \\ &\equiv \frac{\partial W}{\partial \vec{r}} \cdot d\vec{r} + \frac{\partial W}{\partial \dot{\vec{r}}} \cdot d\dot{\vec{r}} + \frac{\partial W}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Wir wissen aber nach der Definition, dass  $\delta W = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$  gilt, also erhalten wir durch Koeffizientenvergleich

$$\frac{\partial W}{\partial \vec{r}} \equiv \vec{\nabla} W = -\vec{F}, \quad \frac{\partial W}{\partial \dot{\vec{r}}} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial W}{\partial t} = 0. \quad (3.100)$$

Damit  $\delta W$  ein totales Differential ist, darf  $W$  also nur vom Ort  $\vec{r}$  abhängen und es muss  $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} W(\vec{r})$  gelten.  $\vec{F}$  hängt dann natürlich auch nur vom Ort ab. Ist  $\delta W$  ein totales Differential, so nennt man das Kraftfeld  $\vec{F}(\vec{r})$  *konservativ*.

Für ein konservatives Kraftfeld beträgt die Arbeit für einen *beliebigen* Weg  $\mathcal{C}$  mit Endpunkten  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  demnach

$$W_{\mathcal{C}} = - \int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} W(\vec{r}) = \int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \frac{\partial W(\vec{r})}{\partial \vec{r}} = W(\vec{r}_2) - W(\vec{r}_1). \quad (3.101)$$

Die Arbeit ist also unabhängig vom Verlauf des Weges. Fallen  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  zusammen, so liegt offenbar ein geschlossener Weg vor. Dafür finden wir sofort

$$W_{\mathcal{C}} = - \oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = W(\vec{r}_1) - W(\vec{r}_1) = 0. \quad (3.102)$$

Da die Kraft durch den Gradienten von  $W$  bestimmt ist, können wir zu  $W$  eine beliebige Konstante addieren, ohne die Bewegungsgleichungen zu verändern. Das können wir ausnutzen, um  $W$  an einem rechen-technisch günstigen Punkt  $\vec{r}_0$  auf Null zu setzen. Für ein konservatives Kraftfeld  $\vec{F}$  definieren wir das *Potential*

$$V(\vec{r}) := - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{F}(\vec{r}') \equiv W(\vec{r}) - W(\vec{r}_0) \quad (3.103)$$

mit  $\vec{r}_0$  beliebig, aber fest. Da  $\vec{F}(\vec{r})$  konservativ ist, ist  $V(\vec{r})$  durch die rechte Seite auch ohne Spezifikation des Integrationsweges eindeutig definiert. Es gilt offensichtlich

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}). \quad (3.104)$$

Wie können wir überprüfen, ob ein gegebenes Kraftfeld  $\vec{F}(\vec{r})$  konservativ ist? Die Wegunabhängigkeit der Arbeit zu prüfen oder ein Potential zu finden ist oft nicht einfach, da Kurvenintegrale ausgeführt werden müssen. Ein günstigeres Kriterium ergibt sich aus der Betrachtung der Rotation:

$$\text{rot } \vec{F} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{F} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} \end{pmatrix} = 0, \quad (3.105)$$

da die Ableitungen vertauschen, zumindest wenn  $V(\vec{r})$  zweimal stetig differenzierbar ist. Für eine ausschließlich von  $\vec{r}$  abhängige Kraft ist die Bedingung  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$  nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend für Konservativität: Gilt  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$  für alle  $\vec{r}$ , so existiert ein  $V(\vec{r})$ , so dass  $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ . Den Beweis lassen wir hier aus (vgl. Vorlesung zur Elektrodynamik).

Zusammenfassend haben wir folgende äquivalente Aussagen über ein nur ortsabhängiges Kraftfeld  $\vec{F}(\vec{r})$  gefunden:

1.  $\vec{F}$  ist konservativ,
2.  $\text{rot } \vec{F} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ ,
3. es existiert ein Potential  $V(\vec{r})$ , so dass gilt  $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ ,
4. die Arbeit  $-\int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}$  hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt eines beliebigen Weges  $\mathcal{C}$  ab, nicht von seinem Verlauf,
5. die Arbeit verschwindet für jeden geschlossenen Weg,  $-\oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F} = 0$ .

Es ist wichtig, sich zu merken, dass ein konservatives Kraftfeld auf jeden Fall nur von  $\vec{r}$ , nicht von  $\dot{\vec{r}}$  oder  $t$  abhängen darf. Also ist z.B. das Kraftfeld  $\vec{F} = (c \sin \omega t) \vec{r}$  mit einer Konstanten  $c$  *nicht* konservativ, obwohl es  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$  erfüllt.

### 3.5.2 Leistung

Die geleistete Arbeit pro Zeiteinheit ist die *Leistung*

$$P := \frac{dW}{dt}. \quad (3.106)$$

Mit

$$W = - \int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F} = - \int_{t_0}^t dt' \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{t=t'} \cdot \vec{F} = - \int_{t_0}^t dt' \dot{\vec{r}}(t') \cdot \vec{F} \quad (3.107)$$

folgt unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$P = - \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t dt' \dot{\vec{r}}(t') \cdot \vec{F}(\vec{r}(t'), \dot{\vec{r}}(t'), t') = -\dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t) = -\dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}. \quad (3.108)$$

Man sagt, die Kraft  $\vec{F}$  erbringt die Leistung  $P = -\dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}$ . Als Beispiel betrachten wir den magnetischen Anteil der Lorentz-Kraft,  $\vec{F} = q\dot{\vec{r}} \times \vec{B}$ . Hier ist die Leistung

$$P = -q\dot{\vec{r}} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{B}) = 0. \quad (3.109)$$

Die magnetische Lorentz-Kraft erbringt also überhaupt keine Leistung.

### 3.5.3 Kinetische Energie und Energieerhaltung

Wir wollen nun eine Größe, die Energie, einführen, die unter gewissen Umständen eine Erhaltungsgröße ist. Die wesentliche Motivation dafür ist, dass die Kenntnis von Erhaltungsgrößen die Lösung von Bewegungsgleichungen oft deutlich vereinfacht.

Zunächst stellen wir fest, dass die Leistung  $P$  eine totale Zeitableitung ist. Es gilt nämlich

$$P = -\dot{\vec{r}} \cdot \vec{F} = -m\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = -\frac{d}{dt} \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2. \quad (3.110)$$

Wir definieren die *kinetische Energie* eines Massenpunktes als

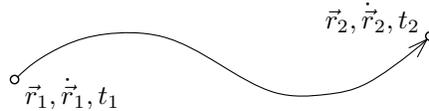
$$T := \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2, \quad (3.111)$$

so dass gilt

$$\frac{dT}{dt} = -P. \quad (3.112)$$

Für eine Bewegung von  $\vec{r}_1$  nach  $\vec{r}_2$  folgt für die geleistete Arbeit:

$$W_{21} = \int_{t_1}^{t_2} dt P(t) = - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{dT}{dt} = T_1 - T_2. \quad (3.113)$$



Die geleistete Arbeit ist also gleich der Änderung der kinetischen Energie. Ist insbesondere das Kraftfeld konservativ, so hängt  $W_{21}$  nicht vom Weg ab, sondern nur vom Potential  $V$  am Anfangs- und Endpunkt:

$$W_{21} = V_2 - V_1 = T_1 - T_2 \quad (3.114)$$

$$\Rightarrow T_1 + V_1 = T_2 + V_2. \quad (3.115)$$

Für konservative Kräfte ist die Summe  $T + V$  also *erhalten*. Wir nennen  $V$  auch die *potentielle Energie* und  $E := T + V$  die *Gesamtenergie* oder einfach *Energie* des Massenpunktes. Wir haben also den wichtigen *Energieerhaltungssatz*

$$\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + V(\vec{r}) = E = \text{const} \quad (3.116)$$

für einen Massenpunkt in einem konservativen Kraftfeld gefunden. Der Energieerhaltungssatz stellt einen Zusammenhang zwischen dem Ort  $\vec{r}$  und der Geschwindigkeit  $\dot{\vec{r}}$  des Massenpunktes dar, der die möglichen Bewegungen einschränkt.

Allgemeiner können wir die Kraft in einen konservativen und einen dissipativen Anteil zerlegen,

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{kons}} + \vec{F}_{\text{diss}}. \quad (3.117)$$

Zu  $\vec{F}_{\text{kons}}$  existiert ein Potential  $V(\vec{r})$ . Dann ist

$$W_{21} = V_2 - V_1 - \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}_{\text{diss}}. \quad (3.118)$$

Mit Gleichung (3.113) erhalten wir

$$T_1 - T_2 = V_2 - V_1 - \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}_{\text{diss}}. \quad (3.119)$$

Wir *definieren* nun die *mechanische Energie* des Massenpunktes als  $E := T + V$ . Damit folgt

$$E_2 = E_1 + \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}_{\text{diss}} \quad (3.120)$$

und für eine infinitesimale Zeitänderung

$$\frac{dE}{dt} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}_{\text{diss}} =: -P_{\text{diss}}. \quad (3.121)$$

Die Änderungsrate der mechanischen Energie ist also gleich der negativen Leistung der dissipativen Kräfte. Andererseits sollte die Gesamtenergie erhalten sein. Die Erklärung ist, dass ein Teil der mechanischen Energie in andere Energieformen umgewandelt wird, die im Modell des Massenpunktes oder aber in der klassischen Mechanik nicht beschrieben werden können. Ein Beispiel ist die Schwingung von Atomen im Festkörper, die durch Reibung angeregt wird.

### 3.6 Drehimpuls und Drehmoment

Wir definieren als weitere Größe den *Drehimpuls* eines Massenpunktes,

$$\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}. \quad (3.122)$$

Die Bezeichnung „Drehimpuls“ könnte zu dem Missverständnis führen, dass nur nicht geradlinige Bewegungen zu einem nicht verschwindenden Drehimpuls führen. Das ist nicht so: Eine gleichförmige, geradlinige Bewegung  $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t$ ,  $\vec{v} = \text{const}$  führt zum Drehimpuls  $\vec{L} = m(\vec{r}_0 + \vec{v}t) \times \vec{v} = m\vec{r}_0 \times \vec{v}$ . Dieser Drehimpuls ist i.A. nicht Null.

Wie ändert sich der Drehimpuls unter dem Einfluss einer Kraft? Wir finden

$$\dot{\vec{L}} = \underbrace{m\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=0} + m\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (3.123)$$

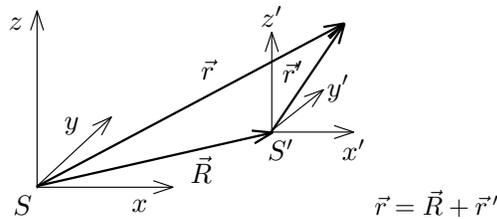
Diese Größe nennen wir das *Drehmoment*

$$\vec{M} := \vec{r} \times \vec{F}, \quad (3.124)$$

so dass gilt

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}. \quad (3.125)$$

Anders als der gewöhnliche Impuls  $\vec{p}$ , hängt  $\vec{L}$  von der Wahl des Koordinatenursprungs, also von *rein räumlichen* Transformationen, ab.



Sei nämlich  $\dot{\vec{R}} = 0$  (zeitunabhängige Verschiebung), dann ist

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m(\vec{R} + \vec{r}') \times \dot{\vec{r}}' = m\vec{R} \times \dot{\vec{r}}' + \vec{L}' = \vec{R} \times \vec{p}' + \vec{L}'. \quad (3.126)$$

Es ist also wichtig, den Ursprungspunkt anzugeben.

Offenbar ist der Drehimpuls erhalten, wenn  $\vec{M} = 0$  gilt. Das ist der Fall, wenn  $\vec{F}$  parallel zu  $\vec{r}$  steht, also wenn  $\vec{F} = f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \hat{r}$  ein *Zentralkraftfeld* ist. (Der triviale Fall  $\vec{F} \equiv 0$  ist hier enthalten.) Auf Zentralkraftfelder kommen wir in Kürze zurück.

Ist der Drehimpuls erhalten, so können wir eine wichtige Aussage über die Form der Bahn machen. Wir gehen von der Feststellung aus, dass  $\vec{L}$  senkrecht auf  $\vec{r}$  (und  $\dot{\vec{r}}$ ) steht. Ist nun  $\vec{L} = \text{const}$ , so steht  $\vec{r}$  für alle Zeiten senkrecht auf dem konstanten  $\vec{L}$ . Damit liegt die gesamte Bahn in der Ebene senkrecht zu  $\vec{L}$ , die außerdem den Nullpunkt enthält. Der Drehimpuls und der Binormaleneinheitsvektor  $\hat{b}$  müssen dann  $\vec{L} = \pm L\hat{b}$  erfüllen. Beide Vorzeichen sind möglich.

### 3.7 Zentralkräfte

Wir schließen noch eine vertiefte Diskussion der eben diskutierten Zentralkräfte an. Nach der Definition haben Zentralkräfte die Form

$$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \hat{r}. \quad (3.127)$$

Dann gilt

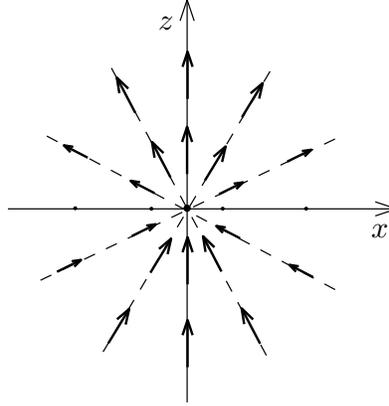
$$\dot{\vec{L}} = \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times f\hat{r} = rf\hat{r} \times \hat{r} = 0, \quad (3.128)$$

also ist der Drehimpuls erhalten und die Bahn eben, wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben.

Es sei daran erinnert, dass Zentralkraftfelder nicht kugelsymmetrisch sein müssen, z.B. ist

$$\vec{F} = f_0 \cos \theta \hat{r}, \quad (3.129)$$

eine nicht kugelsymmetrische Zentralkraft, aber  $\vec{L} = \text{const}$  gilt in jedem Fall. (Die Bahn wird in diesem Beispiel i.A. kompliziert aussehen.) Kugelsymmetrie ist für Drehimpulserhaltung nicht erforderlich.



Wann ist ein Zentralkraftfeld konservativ? Es muss  $\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$  gelten, also

$$f(\vec{r}) \hat{r} = -\vec{\nabla}V(\vec{r}). \quad (3.130)$$

Der Gradient lautet in Kugelkoordinaten

$$\vec{\nabla} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (3.131)$$

Es folgt

$$f(\vec{r}) \hat{r} = -\hat{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (3.132)$$

und damit

$$f(\vec{r}) = -\frac{\partial V}{\partial r}, \quad 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \quad \text{und} \quad 0 = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad (3.133)$$

also darf das Potential nur vom Abstand  $r = |\vec{r}|$  abhängen,

$$V = V(r). \quad (3.134)$$

In diesem Fall sprechen wir von einem *Zentralpotential* und das Kraftfeld hat nun tatsächlich Kugelsymmetrie. Wie wir sehen, existieren konservative und nicht konservative Zentralkräfte. Ebenso existieren konservative und nicht konservative *nicht* zentrale Kräfte.

In einem Zentralpotential sind der Drehimpuls (wegen der Zentralkraft  $-\vec{\nabla}V$ ) und die Energie (weil ein Potential existiert) erhalten. Das können wir ausnutzen: Die Bahn ist eben ( $\vec{L} = \text{const}$ ), wir wählen ein Koordinatensystem so, dass die Bahn in der  $xy$ -Ebene liegt und wählen ebene Polarkoordinaten  $r, \phi$ . Der Drehimpuls ist

$$\begin{aligned} \vec{L} &= m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m\vec{r} \times (\underbrace{\dot{r}\hat{r}}_{\vec{r} \times \hat{r} = 0} + r\dot{\phi}\hat{\phi}) \quad (\text{vgl. Abschnitt 2.1}) \\ &= mr^2\dot{\phi} \hat{r} \times \hat{\phi} = mr^2\dot{\phi} \hat{z} = \text{const.} \end{aligned} \quad (3.135)$$

Die Energie ist

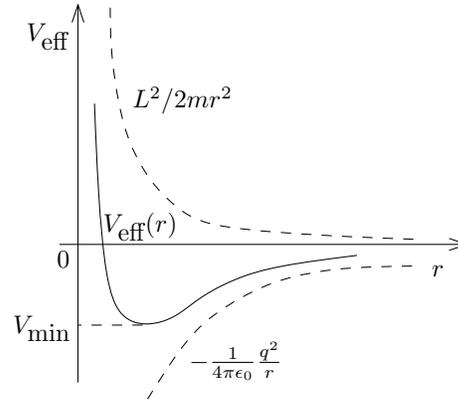
$$E = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + V(r) = \frac{m}{2} (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi})^2 + V(r) = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2 \dot{\phi}^2 + V(r) = \text{const.} \quad (3.136)$$

Hier können wir  $\dot{\phi}$  durch den Drehimpuls ausdrücken: Wir schreiben  $\vec{L} = L\hat{z}$  und erhalten aus Gl. (3.135)

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2} \quad (3.137)$$

$$\Rightarrow E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) =: \frac{m}{2} \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r). \quad (3.138)$$

Den Term  $L^2/2mr^2$  nennen wir das *Zentrifugalpotential* und die hier definierte Größe  $V_{\text{eff}}$  das *effektive Potential*. Wir haben jetzt die Energie für ein effektives *eindimensionales* Problem mit der einzigen Koordinate  $r$  erhalten. Wegen  $m\dot{r}^2/2 \geq 0$  muss  $E \geq V_{\text{eff}}(r)$  gelten. Das schränkt die möglichen Bahnen ein: Z.B. existieren für  $V(r) = -q^2/4\pi\epsilon_0 r$  drei Fälle:



1. Für  $E < V_{\text{min}}$  existieren keine Lösungen,
2.  $V_{\text{min}} \leq E < 0$  ist der Radius  $r$  beschränkt auf das endliche Intervall, in dem  $E \geq V_{\text{eff}}$  gilt, die Bewegung ist gebunden,
3. für  $E \geq 0$  ist der Radius nach unten beschränkt durch  $E \geq V_{\text{eff}}(r)$ , kann aber beliebig groß werden, die Bewegung kann ungebunden sein (sicher wissen wir das noch nicht).

# Kapitel 4

## Newton-Mechanik für Mehrteilchensysteme

Systeme von praktischem Interesse bestehen oft aus vielen Teilchen (Massenpunkten). In diesem Kapitel untersuchen wir, wie sich die Newton-Mechanik auf solche Systeme verallgemeinern lässt.

### 4.1 Impulssatz und Schwerpunktsatz

Wir betrachten Systeme aus  $N$  Massenpunkten mit den Massen  $m_i$  und den Impulsen  $\vec{p}_i$  an den Orten  $\vec{r}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Die Gesamtkraft auf Teilchen  $i$  setzt sich aus der *äußeren* Kraft  $\vec{F}_i^{\text{ex}}$  und den von den anderen Teilchen  $j \neq i$  ausgeübten *inneren* Kräften  $\vec{F}_{ij}$  zusammen:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{ex}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}, \quad (4.1)$$

wobei wir das Superpositionsprinzip verwendet haben. Für jeden einzelnen Massenpunkt gilt das 2. Axiom,

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{ex}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}. \quad (4.2)$$

Nach dem 3. Axiom (Reaktionsprinzip) gilt außerdem

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}. \quad (4.3)$$

Das 3. Axiom wird erst hier wichtig – in der Ein-Teilchen-Dynamik spielt es offensichtlich keine Rolle. Wir definieren

- die Gesamtmasse  $M := \sum_i m_i$ ,
- den Schwerpunkt  $\vec{R} := \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$
- und den Gesamtimpuls  $\vec{p} := \sum_i \vec{p}_i$ .

Dann gilt

$$\dot{\vec{p}} = \sum_i \dot{\vec{p}}_i = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ex}} + \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}}_{=0} =: \vec{F}^{\text{ex}}, \quad (4.4)$$

also zusammengefasst der *Impulssatz*

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}^{\text{ex}}. \quad (4.5)$$

Insbesondere ist der Gesamtimpuls genau dann erhalten, wenn die Summe der *äußeren* Kräfte verschwindet,

$$\vec{p} = \text{const} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F}^{\text{ex}} = 0. \quad (4.6)$$

Dabei sind i.A. weder die einzelnen Impulse  $\vec{p}_i$  erhalten, noch müssen die einzelnen Kräfte  $\vec{F}_i^{\text{ex}}$  und  $\vec{F}_{ij}$  verschwinden.

Für konstante Massen haben wir

$$\dot{\vec{p}} = \sum_i \dot{\vec{p}}_i = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \vec{r}_i = M \ddot{\vec{R}} \quad (4.7)$$

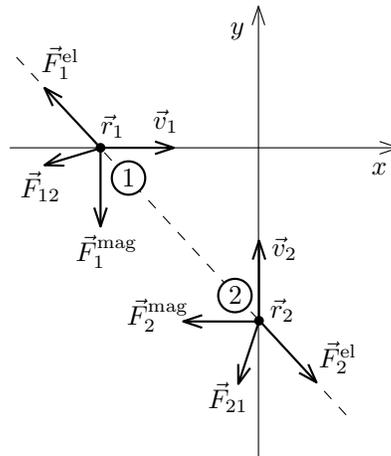
und wir erhalten den *Schwerpunktsatz*

$$M \ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{\text{ex}}. \quad (4.8)$$

Der Schwerpunkt bewegt sich also wie ein Massenpunkt mit der Gesamtmasse  $M$ , auf den die Summe aller äußeren Kräfte wirkt. Daher bewegt sich ein Körper von beliebig komplizierter Form, der noch nicht einmal starr sein muss, unter Vernachlässigung des Luftwiderstands so, dass sein Schwerpunkt eine Parabel beschreibt. (Was lernen wir daraus über den Flug eines Boomerangs?) Der Schwerpunktsatz gestattet uns erst, die Bewegung ausgedehnter Körper (z.B. der Planeten) im Modell des Massenpunktes zu beschreiben.

## 4.2 Reaktionsprinzip und Lorentz-Kraft

In Abschnitt 3.1.3 hatten wir behauptet, dass das Reaktionsprinzip (3. Axiom) nicht immer gilt. Das Problem tritt auf, wenn sich zwei geladene Körper relativ zueinander bewegen. Ein Körper der Masse  $m$  und der Ladung  $q > 0$  möge sich entlang der  $x$ -Achse in positiver Richtung bewegen. Ein identischer Körper möge sich entlang der  $y$ -Achse in positiver Richtung bewegen.



Die Lorentzkraft auf Ladung 1 lautet

$$\vec{F}_{12} = \underbrace{q \vec{E}_2(\vec{r}_1)}_{\vec{F}_1^{\text{el}}} + \underbrace{q \dot{\vec{r}}_1 \times \vec{B}_2(\vec{r}_1)}_{\vec{F}_1^{\text{mag}}}, \quad (4.9)$$

wobei  $\vec{E}_2(\vec{r}_1)$  und  $\vec{B}_2(\vec{r}_1)$  das elektrische bzw. magnetische Feld aufgrund von Ladung 2 am Ort von Ladung 1 sind. Die Feldlinien von  $\vec{E}_2$  zeigen von  $\vec{r}_2$  aus radial nach außen, die Feldlinien von  $\vec{B}_2$  bilden Kreise mit Mittelpunkten auf der  $y$ -Achse in Ebenen senkrecht zu dieser. (Diese Aussagen gelten allgemein, insbesondere auch, wenn  $v_2$  nicht klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit ist. Hier muss auf die Vorlesung zur Elektrodynamik verwiesen werden.) Es ist dann eine einfache Übung mit der Rechten-Hand-Regel, die Richtungen der elektrischen und magnetischen Kräfte auf Ladung 1 und analog auf Ladung 2 zu ermitteln (siehe Skizze). Es zeigt sich, dass in jedem Fall

$$\vec{F}_{12} \neq -\vec{F}_{21} \quad (4.10)$$

gilt. Quantitative Rechnung zeigt, dass zwar  $|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|$  gilt, die Kräfte aber nicht entgegengesetzt gerichtet sind.

Dieses Ergebnis ist problematisch, weil wir das Reaktionsprinzip bei der Herleitung des Impulssatzes und der Impulserhaltung ausgenutzt haben. Lehrbuchautor David J. Griffiths nennt die Impulserhaltung in diesem Zusammenhang das „heiligste Prinzip“ in der Physik. Die Lösung liegt darin, dass das hier zeitabhängige elektromagnetische Feld selbst Impuls trägt. Im Rahmen der Mechanik ist das 3. Axiom hier wirklich verletzt, aber die Impulserhaltung gilt – der fehlende Impuls wird vom Feld übernommen.

### 4.3 Drehimpulssatz

Wir nehmen weiterhin konstante Massen an und definieren den Gesamtdrehimpuls

$$\vec{L} := \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i. \quad (4.11)$$

Seine Zeitableitung ist

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i (m_i \dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_i + m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i) = \sum_i \vec{r}_i \times \left( \vec{F}_i^{\text{ex}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \right). \quad (4.12)$$

Für den Beitrag der inneren Kräfte gilt

$$\sum_i \vec{r}_i \times \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_i \vec{r}_i \times \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} + \frac{1}{2} \sum_j \vec{r}_j \times \sum_{i \neq j} \underbrace{\vec{F}_{ji}}_{=-\vec{F}_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}. \quad (4.13)$$

Im ersten Schritt haben wir in der Hälfte des Terms die Bezeichnungen  $i$  und  $j$  vertauscht. Im zweiten Schritt haben wir angenommen, dass das Reaktionsprinzip zutrifft.

Kräfte, die Massenpunkte aufeinander ausüben, werden sinnvollerweise als Zentralkräfte bezeichnet, wenn sie parallel zur Verbindungslinie zwischen den Massenpunkten gerichtet sind. Das gilt z.B. für die Gravitationskraft und die Coulomb-Kraft. Falls die inneren Kräfte  $\vec{F}_{ij}$  sämtlich Zentralkräfte sind, liegen also die  $\vec{F}_{ij}$  parallel zu  $\vec{r}_i - \vec{r}_j$  und ihr Beitrag zu  $\dot{\vec{L}}$  verschwindet. In diesem Fall folgt

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ex}}. \quad (4.14)$$

Wir definieren das *äußere Drehmoment*

$$\vec{M}^{\text{ex}} := \sum_i \vec{M}_i^{\text{ex}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ex}} \quad (4.15)$$

und schreiben damit den *Drehimpulssatz*

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}^{\text{ex}}. \quad (4.16)$$

Insbesondere gilt

$$\vec{L} = \text{const} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{M}^{\text{ex}} = 0, \quad (4.17)$$

falls die inneren Kräfte Zentralkräfte sind, die das 3. Axiom erfüllen. Die Annahme des 3. Axioms und von Zentralkräften schließt offenbar die Lorentz-Kraft aus. Im Fall von bewegten Ladungsträgern findet man, dass das elektromagnetische Feld wieder zur Hilfe kommen muss – es trägt auch Drehimpuls.

Der Drehimpulssatz gilt, wie die gesamte Newton-Mechanik, in beliebigen Inertialsystemen. Sind zwei Inertialsysteme  $S$  und  $S'$  nämlich durch die Galilei-Transformation  $\vec{r} = \vec{V}t + \vec{r}'$  verknüpft, so gilt

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \sum_i m_i (\vec{V}t + \vec{r}'_i) \times (\vec{V} + \dot{\vec{r}}'_i)$$

$$\begin{aligned}
&= \vec{V}t \times \sum_i m_i \dot{\vec{r}}'_i + \sum_i m_i \vec{r}'_i \times \vec{V} + \sum_i m_i \vec{r}'_i \times \dot{\vec{r}}'_i \\
&= \vec{V}t \times \vec{p}' + \vec{R}' \times M\vec{V} + \vec{L}'.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Das Drehmoment ist

$$\vec{M}^{\text{ex}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ex}} = \sum_i (\vec{V}t + \vec{r}'_i) \times \vec{F}_i^{\text{ex}'} = \vec{V}t \times \vec{F}^{\text{ex}'} + \vec{M}^{\text{ex}'}. \tag{4.19}$$

Der Drehimpulssatz gilt in  $S'$ :

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{L}}' &= \dot{\vec{L}} - \vec{V} \times \dot{\vec{p}}' - \vec{V}t \times \dot{\vec{p}}' - \dot{\vec{R}}' \times M\vec{V} \\
&= \vec{M}^{\text{ex}} - \cancel{\vec{V} \times \dot{\vec{p}}'} - \vec{V}t \times \vec{F}^{\text{ex}'} - \cancel{\dot{\vec{p}}' \times \vec{V}} = \vec{M}^{\text{ex}'}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Wir sehen aber erneut, dass Drehimpuls und Drehmoment von der Wahl des Inertialsystems abhängen.

Andererseits gilt der Drehimpulssatz i.A. nicht in beschleunigten Bezugssystemen. Er gilt jedoch in einem speziellen Fall, nämlich in dem nicht rotierenden Bezugssystem  $S'$ , dessen Ursprungspunkt mit dem Schwerpunkt zusammenfällt. Zum Beweis nehmen wir an, dass  $S$  ein Inertialsystem ist und schreiben  $\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}'_i$ , wobei  $\vec{R}$  der Schwerpunkt bzgl.  $S$  ist. Wir lassen nun zu, dass  $\ddot{\vec{R}} \neq 0$  ist. Die Definition des Schwerpunktes ergibt  $\sum_i m_i \vec{r}'_i = 0$  und es folgt

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \sum_i m_i (\vec{R} + \vec{r}'_i) \times (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}'_i) \\
&= \vec{R} \times \dot{\vec{p}} + \vec{R} \times \underbrace{\sum_i m_i \dot{\vec{r}}'_i}_{=0} + \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}'_i \times \dot{\vec{R}}}_{=0} + \sum_i m_i \vec{r}'_i \times \dot{\vec{r}}'_i \\
&=: \vec{L}_B + \vec{L}'.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Hier nennt man  $\vec{L}_B$  den *Bahndrehimpuls* und  $\vec{L}'$  den *Eigendrehimpuls*.

Es folgt für den Bahndrehimpuls

$$\dot{\vec{L}}_B = \dot{\vec{R}} \times \dot{\vec{p}} + \vec{R} \times \dot{\vec{p}} = \cancel{\dot{\vec{R}} \times M\dot{\vec{R}}} + \vec{R} \times \dot{\vec{p}} = \vec{R} \times \vec{F}^{\text{ex}} \tag{4.22}$$

und für den Eigendrehimpuls

$$\dot{\vec{L}}' = \sum_i (m_i \cancel{\dot{\vec{r}}'_i \times \dot{\vec{r}}'_i} + m_i \vec{r}'_i \times \ddot{\vec{r}}'_i). \tag{4.23}$$

Hierin ist

$$m_i \ddot{\vec{r}}'_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i - m_i \ddot{\vec{R}} = \vec{F}_i - m_i \frac{\vec{F}^{\text{ex}}}{M} \tag{4.24}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{L}}' = \sum_i \vec{r}'_i \times \left( \vec{F}_i - m_i \frac{\vec{F}^{\text{ex}}}{M} \right) = \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{F}_i - \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}'_i \times \frac{\vec{F}^{\text{ex}}}{M}}_{=0} = \sum_i \vec{r}'_i \times \left( \vec{F}_i^{\text{ex}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \right). \tag{4.25}$$

Wie oben finden wir, dass der Beitrag der inneren Kräfte verschwindet, falls diese Zentralkräfte sind und das 3. Axiom erfüllen. (Beachte, dass  $\vec{r}'_i - \vec{r}'_j = \vec{r}_i - \vec{r}_j$  gilt, da  $S'$  gegenüber  $S$  nicht rotiert.) In diesem Fall gilt

$$\dot{\vec{L}}' = \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{F}_i^{\text{ex}} = \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{F}_i^{\text{ex}'} = \vec{M}^{\text{ex}'}. \tag{4.26}$$

## 4.4 Energieerhaltung

Wir definieren die an einem Gesamtsystem bestehend aus mehreren Massenpunkten geleistete Arbeit als *Summe* der an den einzelnen Massenpunkten geleisteten Arbeiten. Zur Begründung der hier angenommenen Additivität der Arbeit können wir uns auf die Sinneserfahrung bzw. Experimente berufen, oder wir überprüfen, dass eine andere Definition nicht auf einfache Beziehungen für die definierte „Gesamtarbeit“ führt. Also schreiben wir für die am Gesamtsystem geleistete infinitesimale Arbeit

$$\delta W = - \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i. \quad (4.27)$$

Wenn wir daraus die Arbeit

$$W_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} \delta W \quad (4.28)$$

berechnen wollen, merken wir, dass der Ausdruck für  $\delta W$  nicht so harmlos ist, wie er aussieht: Die Kraft  $\vec{F}_i$  auf Massenpunkt  $i$  hängt i.A. von den Orten (und evtl. den Geschwindigkeiten) *aller* Massenpunkte ab. Eine *Konfiguration* des  $N$ -Teilchen-Systems ist insbesondere durch die Angabe der  $N$  Orte  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$  bestimmt. Eine Bahn  $\mathcal{C}$  des  $N$ -Teilchen-Systems verläuft also in einem  $3N$ -dimensionalen Konfigurationsraum und  $W_{\mathcal{C}}$  enthält ein Linienintegral in diesem Raum. Es ist

$$\begin{aligned} W_{\mathcal{C}} = - \int_{\mathcal{C}} & (dx_1 F_{1x} + dy_1 F_{1y} + dz_1 F_{1z} \\ & + dx_2 F_{2x} + dy_2 F_{2y} + dz_2 F_{2z} \\ & + \dots \\ & + dx_N F_{Nx} + dy_N F_{Ny} + dz_N F_{Nz}). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Der Integrand hat die Form eines Skalarproduktes von zwei  $3N$ -dimensionalen Vektoren. Wir nennen das System bzw. die wirkenden Kräfte *konservativ*, wenn die Arbeit  $W_{\mathcal{C}}$  für alle Bahnen  $\mathcal{C}$  im Konfigurationsraum nur von der Anfangskonfiguration  $\vec{r}_1^{(1)}, \dots, \vec{r}_N^{(1)}$  und der Endkonfiguration  $\vec{r}_1^{(2)}, \dots, \vec{r}_N^{(2)}$  abhängt. Wir können die Argumente aus Abschnitt 3.5.1 einfach von 3 auf  $3N$  Dimensionen verallgemeinern. Insbesondere muss für konservative Systeme ein *Potential*  $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$  existieren, das nur von der Konfiguration, aber nicht von den Geschwindigkeiten oder der Zeit abhängt, so dass gilt

$$W_{21} = V(\vec{r}_1^{(2)}, \dots, \vec{r}_N^{(2)}) - V(\vec{r}_1^{(1)}, \dots, \vec{r}_N^{(1)}). \quad (4.30)$$

Wählen wir zwei Konfigurationen, zwischen denen sich nur der Ort des Teilchens  $i$  ändert, und zwar von  $\vec{r}_i$  nach  $\vec{r}_i + d\vec{r}_i$ , so ist

$$W_{21} = V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_i + d\vec{r}_i, \dots) - V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_i, \dots) = \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \cdot d\vec{r}_i. \quad (4.31)$$

Da andererseits gilt

$$W_{21} = - \int_{\vec{r}_i^{(1)}}^{\vec{r}_i^{(2)}} d\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i, \quad (4.32)$$

folgt

$$- \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \cdot d\vec{r}_i. \quad (4.33)$$

Da das für alle infinitesimalen Ortsänderungen  $d\vec{r}_i$  gilt, folgt schließlich

$$\vec{F}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = - \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \quad (4.34)$$

oder in Komponenten

$$F_{in}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = - \frac{\partial}{\partial r_{in}} V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \quad \text{mit } i = 1, \dots, N \text{ und } n = x, y, z. \quad (4.35)$$

Also sind konservative Kräfte weiterhin durch Gradienten eines Potentials gegeben.

Aufgrund der angenommenen Additivität der Arbeit ist es naheliegend, auch die kinetische Energie als additiv zu betrachten. Für die gesamte kinetische Energie schreiben wir also

$$T := \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i. \quad (4.36)$$

Wieder findet man für diese Größe, nicht aber für andere Kombinationen, einfache Beziehungen. Ganz allgemein gilt nun für die Zeitableitung der kinetischen Energie

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i. \quad (4.37)$$

Speziell für konservative Kräfte können wir dies schreiben als

$$\frac{dT}{dt} = - \sum_i \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} = - \frac{dV}{dt} \quad (4.38)$$

nach der Kettenregel. Damit erhalten wir

$$\frac{d}{dt} (T + V) = 0. \quad (4.39)$$

Also ist die *Gesamtenergie*  $E := T + V$  für konservative Kräfte eine Erhaltungsgröße.

Allgemeiner können wir  $\vec{F}_i$  in einen konservativen Anteil  $-\partial V/\partial \vec{r}_i$  und einen dissipativen Anteil  $\vec{F}_i^{\text{diss}}$  aufspalten und schreiben

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i \left( -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} + \vec{F}_i^{\text{diss}} \right) \cdot \dot{\vec{r}}_i = -\frac{dV}{dt} + \sum_i \vec{F}_i^{\text{diss}} \cdot \dot{\vec{r}}_i \quad (4.40)$$

und damit

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{diss}} \cdot \dot{\vec{r}}_i. \quad (4.41)$$

Wie beim Einteilchenproblem ist die Änderung der Gesamtenergie gleich der negativen Leistung der dissipativen Kräfte.

## 4.5 Die zehn Erhaltungsgrößen

Wir fassen die Bedingungen für die Erhaltung von Gesamtimpuls, Gesamtdrehimpuls und Gesamtenergie noch einmal zusammen:

Größe	ist erhalten, wenn
$\vec{p}$	$\vec{F}^{\text{ex}} = 0$ $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \quad \forall i \neq j$
$\vec{L}$	$\vec{M}^{\text{ex}} = 0$ $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \quad \forall i \neq j$ $\vec{F}_{ij} \parallel \vec{r}_i - \vec{r}_j \quad \forall i \neq j$
$E$	$\exists V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots) : \vec{F}_i = -\partial V/\partial \vec{r}_i \quad \forall i$

Betrachten wir nun ein System, für das *alle* diese Bedingungen erfüllt sind. Dann haben wir schon sieben reelle Erhaltungsgrößen gefunden:  $p_x, p_y, p_z, L_x, L_y, L_z$  und  $E$ . Falls die Massen konstant sind, können wir drei weitere Erhaltungsgrößen finden: Der Schwerpunkt erfüllt die Bewegungsgleichung

$$M \dot{\vec{R}} = \vec{p} = \text{const.} \quad (4.42)$$

Diese können wir integrieren, d.h. lösen:

$$\vec{R}(t) = \vec{R}(0) + \frac{\vec{p}}{M} t. \quad (4.43)$$

Also ist

$$\vec{R}(t) - \frac{\vec{p}}{M} t = \vec{R}(0) = \text{const} \quad (4.44)$$

eine weitere vektorielle Erhaltungsgröße. Damit haben wir *zehn* reelle Erhaltungsgrößen gefunden, die für beliebige  $N$ -Teilchen-Systeme unter den Bedingungen aus der Tabelle gelten. Diese Erhaltungsgrößen sind i.A. unabhängig; man kann nicht eine durch die übrigen ausdrücken. Weitere Erhaltungsgrößen existieren nur unter zusätzlichen Bedingungen.

## 4.6 Der Virialsatz

Erhaltungsgrößen sind Funktionen  $g$  der Orte  $\vec{r}_i$ , der Impulse  $\vec{p}_i$  oder Geschwindigkeiten  $\dot{\vec{r}}_i$  und der Zeit, die sich zeitlich nicht ändern,

$$g(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \dots, \dot{\vec{r}}_1(t), \dot{\vec{r}}_2(t), \dots, t) = \text{const}, \quad (4.45)$$

deren totale Zeitableitung  $dg/dt$  also für alle Zeiten verschwindet. Man kann sich fragen, ob sich für nicht erhaltene Größen zumindest Aussagen über deren zeitliche Mittelwerte finden lassen. Das ist tatsächlich der Fall. Der Virialsatz ist eine solche Aussage. Wir definieren zunächst den *zeitlichen Mittelwert* einer zeitabhängigen Größe  $f(t)$  durch

$$\langle f \rangle := \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} dt f(t), \quad (4.46)$$

wobei  $t_0$  eine Anfangszeit ist, zu der wir das System präpariert haben. Für eine beschränkte (und stetige) Funktion  $f(t)$  hängt der Mittelwert nicht von  $t_0$  ab, denn für eine solche Funktion gilt

$$\frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t_0} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{f(t_0 + \tau) - f(t_0)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} [\text{beschränkt}] = 0. \quad (4.47)$$

Wir leiten nun eine Aussage über die zeitlich gemittelte kinetische Energie her. Aus  $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i$  folgt

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i. \quad (4.48)$$

Die linke Seite ist

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i - \underbrace{\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i}_{=2T}. \quad (4.49)$$

Wir beschränken uns auf konservative Kräfte. Dann ist die rechte Seite

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i = - \sum_i \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \cdot \vec{r}_i. \quad (4.50)$$

Es folgt

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i - 2T = - \sum_i \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \cdot \vec{r}_i \quad (4.51)$$

und schließlich

$$- \frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i + 2T = \sum_i \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \cdot \vec{r}_i. \quad (4.52)$$

Wir bilden nun den zeitlichen Mittelwert: Für den ersten Term ergibt sich

$$\left\langle - \frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle = - \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} dt \frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i = - \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left[ \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i \right]_{t_0}^{t_0 + \tau}. \quad (4.53)$$

Sind die Orte und Geschwindigkeiten beschränkt (im Einzelfall zu prüfen!), so ist dies wieder

$$\dots = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} [\text{beschränkt}] = 0 \quad (4.54)$$

und es folgt der *Virialsatz*

$$2 \langle T \rangle = \left\langle \sum_i \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \cdot \vec{r}_i \right\rangle. \quad (4.55)$$

Den Mittelwert auf der rechten Seite nennt man das *Virial* der Kräfte.

In dieser allgemeinen Form ist der Virialsatz nicht besonders anschaulich. Betrachten wir den wichtigen Fall, dass das Potential eine *homogene Funktion*  $k$ -ten Grades ist, d.h. es soll gelten

$$V(\lambda \vec{r}_1, \dots, \lambda \vec{r}_N) = \lambda^k V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \quad \forall \lambda, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N. \quad (4.56)$$

Dann folgt einerseits nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial V(\lambda \vec{r}_1, \dots, \lambda \vec{r}_N)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1} &= \left[ \frac{\partial V}{\partial \lambda \vec{r}_1} \cdot \vec{r}_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial \lambda \vec{r}_N} \cdot \vec{r}_N \right]_{\lambda=1} \\ &= \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_1} \cdot \vec{r}_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_N} \cdot \vec{r}_N \\ &= \sum_i \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \cdot \vec{r}_i \end{aligned} \quad (4.57)$$

und andererseits aus Gl. (4.56)

$$\left. \frac{\partial V(\lambda \vec{r}_1, \dots, \lambda \vec{r}_N)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \lambda^k V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \Big|_{\lambda=1} = k \lambda^{k-1} \Big|_{\lambda=1} V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = k V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N). \quad (4.58)$$

Also gilt für das Virial

$$\left\langle \sum_i \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \cdot \vec{r}_i \right\rangle = \langle k V \rangle = k \langle V \rangle. \quad (4.59)$$

Der Virialsatz nimmt daher für homogene Potentiale die einfache Form

$$2 \langle T \rangle = k \langle V \rangle \quad (4.60)$$

an.

Beispiele: 1. Für harmonische Oszillatoren, d.h. ideale Federkräfte, lautet das Potential

$$V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \frac{1}{2} \sum_i K_i r_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j|i < j} K'_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 \quad (4.61)$$

mit den Federkonstanten  $K_i$  für äußere Kräfte und  $K'_{ij}$  für innere Kräfte, denn die resultierenden Kräfte sind dann

$$\vec{F}_i = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} = -K_i \vec{r}_i - \sum_{j \neq i} K'_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad (4.62)$$

mit der Vereinbarung  $K'_{ji} = K'_{ij}$ . Damit ist

$$V(\lambda \vec{r}_1, \dots, \lambda \vec{r}_N) = \lambda^2 V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \quad (4.63)$$

und daher  $k = 2$ . Also folgt

$$\langle T \rangle = \langle V \rangle \quad (4.64)$$

und

$$\langle E \rangle = E = \text{const} = \langle T \rangle + \langle V \rangle = 2 \langle T \rangle. \quad (4.65)$$

2. Für Coulomb- und Gravitationskräfte ist  $V(\vec{r}) \sim 1/r$ , also  $k = -1$  und daher

$$2 \langle T \rangle = -\langle V \rangle, \quad (4.66)$$

und damit  $\langle V \rangle = -2 \langle T \rangle < 0$  sowie  $\langle E \rangle = E = \text{const} = \langle T \rangle + \langle V \rangle = -\langle T \rangle < 0$ . Das gilt aber nur, wenn die Bewegung gebunden ist, denn sonst gilt der Virialsatz nicht.

## 4.7 Zwei-Teilchen-Systeme

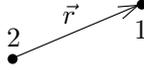
Aus den Erhaltungssätzen können wir bereits einiges über die Dynamik von Zwei-Teilchen-Systemen lernen. Wir definieren wieder den Schwerpunkt

$$\vec{R} := \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}, \quad (4.67)$$

außerdem sei der *Abstands-* oder *Relativvektor*

$$\vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (4.68)$$

(Achtung:  $\vec{r}$  wird oft mit umgekehrtem Vorzeichen definiert).



Dann gilt

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r}, \quad (4.69)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r}. \quad (4.70)$$

Aus

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1 = \vec{F}_1^{\text{ex}} + \vec{F}_{12}, \quad (4.71)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2 = \vec{F}_2^{\text{ex}} + \vec{F}_{21} \quad (4.72)$$

folgt  $M \ddot{\vec{R}} = \vec{F}_1^{\text{ex}} + \vec{F}_2^{\text{ex}} \equiv \vec{F}^{\text{ex}}$  (Schwerpunktsatz) und, mit Hilfe des 3. Axioms,

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{\vec{F}_1^{\text{ex}}}{m_1} + \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_2^{\text{ex}}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} = \frac{\vec{F}_1^{\text{ex}}}{m_1} - \frac{\vec{F}_2^{\text{ex}}}{m_2} + \underbrace{\left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}_{=: 1/\mu} \vec{F}_{12} \quad (4.73)$$

mit der *reduzierten Masse*  $\mu$ . Verschwinden die äußeren Kräfte oder ist  $\vec{F}_i^{\text{ex}} \sim m_i$  (Gewichtskraft, Gravitationskraft), so folgt

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12}. \quad (4.74)$$

Hängt außerdem  $\vec{F}_{12}$  nur vom Abstandsvektor  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  ab, so entkoppeln die Bewegungsgleichungen für  $\vec{R}$  und  $\vec{r}$  zu zwei effektiven Ein-Teilchen-Problemen.

Wir betrachten nun speziell Prozesse, bei denen die beiden Körper nicht gebunden sind, d.h. bei denen  $\vec{r}$  nicht beschränkt ist. Man spricht von Streu- oder Stoßprozessen. Es gibt zwei wichtige Bezugssysteme:

1. das *Laborsystem*  $S_L$ , das Inertialsystem (wir vernachlässigen die beschleunigte Bewegung des Labors), in dem ein Experiment durchgeführt wird und in dem wir die Dynamik beschreiben wollen und
2. das *Schwerpunktsystem*  $S_S$ , in dem der Schwerpunkt fest und im Ursprung liegt. Dabei sei die Orientierung von  $S_S$  dieselbe wie die von  $S_L$ , d.h.  $S_S$  rotiert nicht gegenüber  $S_L$ .

In diesem Abschnitt bezeichnen wir Größen im Schwerpunktsystem mit einem Unterstrich:  $\underline{\vec{r}}, \underline{\dot{\vec{r}}}$  usw. Wir betrachten das Laborsystem  $S_L$  näherungsweise als Inertialsystem. Die äußeren Kräfte mögen verschwinden, dann bewegt sich der Schwerpunkt  $\vec{R}$  in  $S_L$  geradlinig und gleichförmig. Dann ist  $S_S$  ebenfalls ein Inertialsystem, das aus  $S_L$  durch eine Galilei-Transformation hervorgeht:

$$\underline{\dot{\vec{r}}}_i - \underline{\dot{\vec{r}}}_i = \dot{\vec{R}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\vec{p}}_i - \underline{\vec{p}}_i = m_i \dot{\vec{R}}, \quad (4.75)$$

wobei  $\dot{\vec{R}}$  die konstante Geschwindigkeit des Schwerpunktes in  $S_L$  ist, und damit die Geschwindigkeit von  $S_S$  gegenüber  $S_L$ . Wir bezeichnen Größen vor dem Streueignis mit Symbolen ohne Strich und Größen nach dem Streueignis mit Symbolen mit Strich ( $'$ ). Mit „vor“ und „nach“ meinen wir die Grenzfälle  $t \rightarrow -\infty$  bzw.  $t \rightarrow \infty$ . (Das setzt voraus, dass die entsprechenden Grenzwerte existieren. Dazu muss  $\vec{F}_{12}$  hinreichend schnell mit  $|\vec{r}|$  abfallen.)

Impulserhaltung bedeutet

1. in  $S_L$ :  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = \vec{p}$ , dies sind *drei* Gleichungen für die *sechs* unbekanntenen Impulskomponenten nach dem Stoß,
2. in  $S_S$ :  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = 0$ , woraus folgt

$$\vec{p}_2 = -\vec{p}_1 \quad \text{und} \quad \vec{p}'_2 = -\vec{p}'_1. \quad (4.76)$$

Energieerhaltung bedeutet

1. in  $S_L$ :  $\frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} = \frac{(\vec{p}'_1)^2}{2m_1} + \frac{(\vec{p}'_2)^2}{2m_2} + Q'$ ,
2. in  $S_S$ :  $\frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} = \frac{(\vec{p}'_1)^2}{2m_1} + \frac{(\vec{p}'_2)^2}{2m_2} + Q'$ .

$Q'$  und  $\underline{Q}'$  bezeichnen die Energie, die während des Streuprozesses aus kinetischer in andere Energieformen umgewandelt wird. Es ist

$$\begin{aligned} Q' &= \frac{\vec{p}_1^2 - (\vec{p}'_1)^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2 - (\vec{p}'_2)^2}{2m_2} \\ &= \frac{(\vec{p}_1 + m_1 \dot{\vec{R}})^2 - (\vec{p}'_1 + m_1 \dot{\vec{R}})^2}{2m_1} + \frac{(\vec{p}_2 + m_2 \dot{\vec{R}})^2 - (\vec{p}'_2 + m_2 \dot{\vec{R}})^2}{2m_2} \\ &= \frac{\vec{p}_1^2 - (\vec{p}'_1)^2}{2m_1} + (\vec{p}_1 - \vec{p}'_1) \cdot \dot{\vec{R}} + \frac{\vec{p}_2^2 - (\vec{p}'_2)^2}{2m_2} + (\vec{p}_2 - \vec{p}'_2) \cdot \dot{\vec{R}}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Wegen  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}'_1 - \vec{p}'_2 = 0$  folgt

$$Q' = \underline{Q}'. \quad (4.78)$$

$Q'$  ist also invariant unter der Galilei-Transformation von  $S_L$  auf  $S_S$ . Wir unterscheiden:

- $Q' = 0$ : *elastische* Streuung,
- $Q' > 0$ : *inelastische endotherme* Streuung (kinetische Energie nimmt ab), Beispiel: Teilchen bleiben aneinander haften,
- $Q' < 0$ : *inelastische exotherme* Streuung (kinetische Energie nimmt zu), Beispiel: Teilchenzerfall.

Die Energieerhaltung liefert *eine* weitere Gleichung für die Bestimmung von  $\vec{p}'_1, \vec{p}'_2$  bzw.  $\vec{p}'_1, \vec{p}'_2$ : Konkret in  $S_S$  gilt  $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$  und  $\vec{p}'_2 = -\vec{p}'_1$ . Es folgt

$$\underline{T} = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} = \frac{\vec{p}_1^2}{2\mu} = \frac{\vec{p}_2^2}{2\mu} = \frac{p_i^2}{2\mu} \quad \text{für } i = 1, 2, \quad (4.79)$$

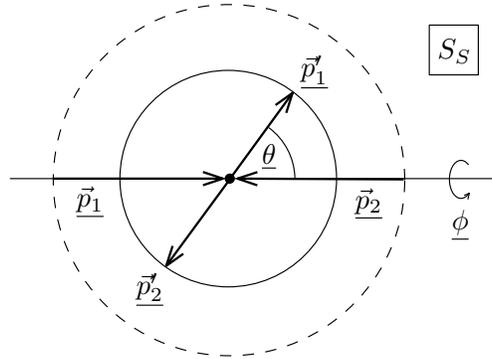
hier steht *keine* Summe über  $i$ . Wir haben wie üblich  $p_i = |\vec{p}_i|$  verwendet. Analog gilt

$$\underline{T}' = \frac{(p'_i)^2}{2\mu} \quad \text{für } i = 1, 2. \quad (4.80)$$

Aus  $\underline{T} = \underline{T}' + Q'$  folgt

$$p'_i = \sqrt{2\mu \underline{T}'} = \sqrt{2\mu \underline{T} - 2\mu Q'} = \sqrt{p_j^2 - 2\mu Q'} \quad \text{für } i, j = 1, 2. \quad (4.81)$$

Dies legt die *Beträge* der Impulse in  $S_S$  fest.



Zusammengefasst erzwingt die Impulserhaltung im Schwerpunktsystem, dass

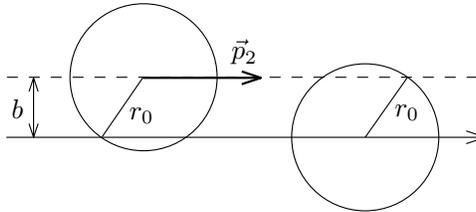
$$\vec{p}_2 = -\vec{p}_1 \quad \text{und} \quad \vec{p}'_2 = -\vec{p}'_1 \quad (4.82)$$

gilt. Die Energieerhaltung führt zusätzlich auf

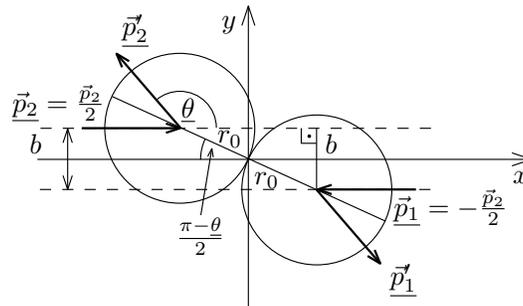
$$|\vec{p}'_1| = |\vec{p}'_2| = \sqrt{|\vec{p}_1|^2 - 2\mu Q'} = \sqrt{|\vec{p}_2|^2 - 2\mu Q'}. \quad (4.83)$$

Zwei von sechs Komponenten von  $\vec{p}'_1$  und  $\vec{p}'_2$ , nämlich z.B. die Polarwinkel von  $\vec{p}'_1$ , sind noch unbestimmt. Diese kann man durch die beiden Winkel  $\theta$  (Streuwinkel) und  $\phi$  (Azimutalwinkel) ausdrücken.  $\theta$  ist in der obigen Skizze bezeichnet.  $\phi$  beschreibt die Orientierung der Ebene, die  $\vec{p}_1$  und  $\vec{p}'_1$  (und damit  $\vec{p}_2$  und  $\vec{p}'_2$ ) enthält, relativ zu festen (Labor-) Achsen. Um  $\theta$  und  $\phi$  zu bestimmen, müssen wir den konkreten Streuprozess untersuchen.

Beispiel: Elastischer Stoß zweier harter Kugeln. Im Laborsystem ruhe eine Kugel mit der Masse  $m$  und dem Radius  $r_0$ . Eine zweite, identische Kugel trifft mit dem Impuls  $\vec{p}_2$  und dem *Stoßparameter*  $b$  (siehe Skizze) auf sie.



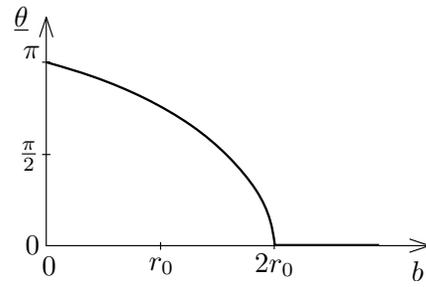
Im Schwerpunktsystem im Augenblick des Stoßes sieht die Situation wie folgt aus:



Aus Symmetriegründen gilt:

- $\vec{p}_1$ ,  $\vec{p}_2$  und  $\vec{p}'_1$ ,  $\vec{p}'_2$  liegen in einer Ebene. Wir wählen diese als  $xy$ -Ebene und haben dann  $\phi = 0$ .
- $\frac{b}{2r_0} = \sin \frac{\pi - \theta}{2} = \cos \frac{\theta}{2}$  (siehe Skizze)  $\Rightarrow \theta = 2 \arccos \frac{b}{2r_0}$ , solange  $b < 2r_0$  gilt.

- Im Fall  $b \geq 2r_0$  verfehlen sich die Kugeln und trivialerweise gilt  $\theta = 0$ .



# Kapitel 5

## Lagrange-Mechanik I

Im Prinzip enthält die bisher besprochene Newton-Mechanik bereits alles, was wir zur Beschreibung der Dynamik beliebiger klassischer Teilchensysteme benötigen. In vielen Fällen ist sie jedoch für die praktische Lösung nicht geeignet. Die wesentlichen Probleme bestehen darin, dass die Newtonschen Bewegungsgleichungen (für konstante Massen)

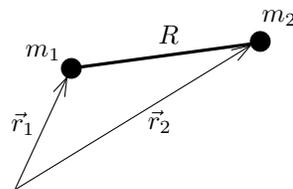
$$F_i = m_i \ddot{x}_i \quad (5.1)$$

nur für *kartesische* Koordinaten  $x_i$  in einem *Inertialsystem* gelten. Wir können die Bewegungsgleichungen natürlich in andere Koordinaten und auch andere Bezugssysteme transformieren. Der Punkt hier ist, dass wir sie nicht gleich in beliebigen Koordinaten schreiben können, weil Gl. (5.1) in anderen als kartesischen Koordinaten nicht dieselbe Form hat. Auch können wir zwar Gl. (5.1) für beschleunigte Bezugssysteme mit Hilfe von Scheinkräften schreiben, aber wir wissen *a priori* nicht, wie die Scheinkräfte aussehen; zur Herleitung der Scheinkräfte in Kapitel 3 mussten wir zunächst von einem Inertialsystem ausgehen.

Kartesische Koordinaten in Inertialsystemen können aus verschiedenen Gründen unpraktisch sein:

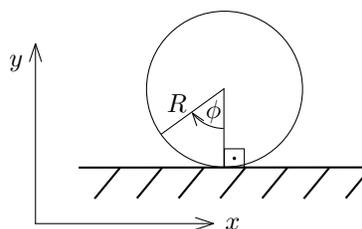
1. die Symmetrie des Systems legt andere Koordinaten nahe,
2. wir wollen die Bewegung in einem beschleunigten Bezugssystem beschreiben,
3. die kartesischen Koordinaten sind nicht unabhängig voneinander.

Der dritte Fall kann bei Anwesenheit von *Zwangsbedingungen* auftreten. Ein Beispiel ist eine starre Hantel.



Hier ist der Abstand der beiden Massenpunkte durch die Zwangsbedingung  $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = R$  festgelegt. Von den sechs reellen Größen  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  können wir also eine durch die übrigen ausdrücken. Fünf reelle Größen reichen aus, um die Lage der Hantel eindeutig zu charakterisieren.

Zweites Beispiel: Ein in zwei Dimensionen auf einer Ebene rollendes Rad.



Der Mittelpunkt  $(x, y)$  des Rades hat immer denselben Abstand von der Ebene. In unserem Koordinatensystem gilt also

$$y = y_0 = \text{const.} \quad (5.2)$$

Der Auflagepunkt des Rades gleitet nicht, ist also momentan in Ruhe. Daher gilt die Rollbedingung

$$\dot{x} = R\dot{\phi}, \quad (5.3)$$

die wir integrieren können zu

$$x = x_0 + R\phi \quad (5.4)$$

(wir müssen offenbar beliebige reelle Winkel  $\phi$  zulassen). Damit ist nur eine Größe unabhängig, z.B.  $x$  oder  $\phi$ .

Es wäre sehr nützlich, Bewegungsgleichungen in beliebigen Koordinaten aufstellen zu können. Dies leistet die Lagrangesche Formulierung der klassischen Mechanik. Im Gegensatz zur Newtonschen Bewegungsgleichung lässt sich die Lagrangesche Formulierung auch jenseits der klassischen Teilchen-Mechanik in der Feldtheorie und der Quantenmechanik/Quantenfeldtheorie sinnvoll verwenden. Innerhalb der klassischen Mechanik ist sie zur Newton-Mechanik äquivalent, d.h. sie enthält keine „neue Physik“.

## 5.1 Zwangsbedingungen und Zwangskräfte

Wir definieren zunächst zwei zentrale Begriffe: *Zwangsbedingungen* sind geometrische Bedingungen, die die Bewegung einschränken. *Zwangskräfte* sind die Kräfte, die in den Bewegungsgleichungen für die Einhaltung der Zwangsbedingungen sorgen. Beispiele sind Auflagekräfte (Fußboden auf Schuhsohlen) und Faden-/Seilspannungen (Pendel). Wenn wir ein mechanisches System mit Zwangsbedingungen durch Newtonsche Bewegungsgleichungen unter Einschluss der Zwangskräfte zu beschreiben versuchen, stoßen wir auf ein Problem: Wir kennen die Zwangskräfte gar nicht explizit.

Um Fortschritte zu machen, ist es sinnvoll, das Problem möglichst genau zu verstehen. Daher untersuchen wir zunächst, welche Typen von Zwangsbedingungen auftreten können.

### 5.1.1 Holonome Zwangsbedingungen

Eine naheliegende Klasse von Zwangsbedingungen sind solche, die sich als Gleichungen für die Koordinaten und evtl. die Zeit schreiben lassen:

$$f_\nu(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad (5.5)$$

für  $\nu = 1, \dots, p$  ( $p$  ist hier die Anzahl der Zwangsbedingungen dieser Form). Man unterscheidet

- *holonom-skleronome* Zwangsbedingungen: diese hängen nicht explizit von der Zeit ab,  $\partial f_\nu / \partial t \equiv 0$ ,
- *holonom-rheonome* Zwangsbedingungen: diese hängen explizit von der Zeit ab,  $\partial f_\nu / \partial t \neq 0$ .

Allgemein können sowohl holonom-skleronome als auch holonom-rheonome Zwangsbedingungen vorliegen.

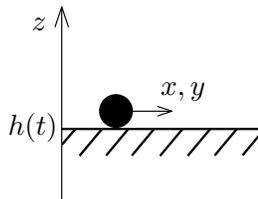
Beispiele:

- Hantel: holonom-skleronom,

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = R \quad \Rightarrow \quad f_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) := |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| - R = 0. \quad (5.6)$$

- Teilchen im Aufzug (das Teilchen soll nicht abheben): holonom-rheonom,

$$z = h(t) \quad \Rightarrow \quad f_1(\vec{r}, t) := z - h(t) = 0. \quad (5.7)$$



Alle holonomen Zwangsbedingungen reduzieren die Anzahl der unabhängigen Koordinaten. Existieren bei  $N$  Teilchen mit  $3N$  Koordinaten nämlich  $p$  unabhängige holonome Zwangsbedingungen

$$f_\nu(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0, \quad \nu = 1, \dots, p, \quad (5.8)$$

so kann man  $p$  Koordinaten mittels dieser Gleichungen durch die übrigen ausdrücken und es bleiben

$$S = 3N - p \quad (5.9)$$

Koordinaten übrig.

### 5.1.2 Nicht-holonome Zwangsbedingungen

Das sind natürlich gerade solche Zwangsbedingungen, die sich nicht als  $f_\nu(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$  schreiben lassen und die daher die Anzahl der Koordinaten nicht reduzieren.

(a) Eine wichtige Klasse sind Zwangsbedingungen in der Form von *Ungleichungen*

$$g_\nu(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) \geq 0. \quad (5.10)$$

Beispiel 1: Skispringer. Beispiel 2: Teilchen im schnell beschleunigten Aufzug. Die Beschleunigung des Aufzugs kann  $\ddot{h} < -g$  sein, er beschleunigt dann mit mehr als Erdbeschleunigung nach unten, so dass das Teilchen vom Boden abhebt. Also gilt nur noch

$$z \geq h(t) \quad \Rightarrow \quad g_1(\vec{r}, t) := z - h(t) \geq 0. \quad (5.11)$$

In beiden Beispielen ergibt sich eine Lösungsmöglichkeit daraus, dass entlang der Bahn stückweise eine holonome Zwangsbedingung  $g_1 = 0$  gilt und stückweise gar keine. Man kann die beiden Fälle getrennt betrachten und die Lösungen so aneinander setzen, dass Ort und Geschwindigkeit stetig sind.

(b) Eine zweite Klasse sind Zwangsbedingungen in *differentieller*, nicht integrierbarer Form, also

$$\delta f_\nu := \vec{a}_{\nu 1} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{a}_{\nu 2} \cdot d\vec{r}_2 + \dots + b_\nu dt = 0, \quad \nu = 1, \dots, p, \quad (5.12)$$

wobei die  $\vec{a}_{\nu n}$  und  $b_\nu$  selbst Funktionen von  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t$  sein können. „Nicht integrierbar“ bedeutet, dass  $\delta f_\nu$  kein totales Differential ist. D.h. es gibt keine Funktion  $f_\nu(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t)$ , so dass

$$\vec{a}_{\nu 1} = \frac{\partial f_\nu}{\partial \vec{r}_1}, \quad \vec{a}_{\nu 2} = \frac{\partial f_\nu}{\partial \vec{r}_2}, \quad \dots, \quad b_\nu = \frac{\partial f_\nu}{\partial t} \quad (5.13)$$

gilt. Denn sonst wäre

$$\delta f_\nu = \frac{\partial f_\nu}{\partial \vec{r}_1} \cdot d\vec{r}_1 + \frac{\partial f_\nu}{\partial \vec{r}_2} \cdot d\vec{r}_2 + \dots + \frac{\partial f_\nu}{\partial t} dt = df_\nu \quad (5.14)$$

doch ein totales Differential und aus  $\delta f_\nu = df_\nu = 0$  würde

$$f_\nu(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = \text{const} \quad (5.15)$$

folgen und wir hätten eine holonome Zwangsbedingung (die Konstante kann auf die linke Seite gebracht werden).

Zwangsbedingungen in differentieller Form lassen sich anschaulicher als Bedingungen für *Geschwindigkeiten* formulieren. Aus

$$\vec{a}_{\nu 1} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{a}_{\nu 2} \cdot d\vec{r}_2 + \dots + b_\nu dt = 0 \quad (5.16)$$

folgt durch formale Division durch  $dt$ ,

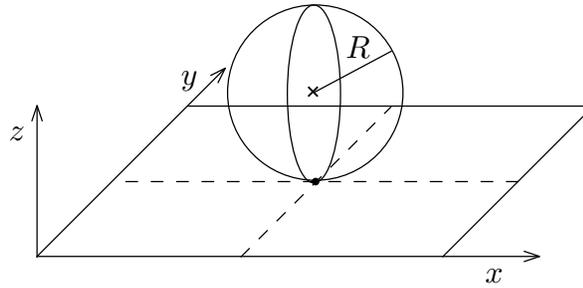
$$\vec{a}_{\nu 1} \cdot \dot{\vec{r}}_1 + \vec{a}_{\nu 2} \cdot \dot{\vec{r}}_2 + \dots + b_\nu = 0. \quad (5.17)$$

Beachte, dass  $\vec{a}_{\nu n}$  und  $b_{\nu}$  allgemein von  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$  und  $t$  abhängen dürfen. Gleichung (5.17) ist dagegen von spezieller Form, nämlich linear, in den Geschwindigkeiten  $\dot{\vec{r}}_n$ . Die Zwangsbedingung ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung für  $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \dots$ , die simultan mit den Bewegungsgleichungen (2. Ordnung)

$$\vec{F}_1 = m_1 \ddot{\vec{r}}_1, \quad \vec{F}_2 = m_2 \ddot{\vec{r}}_2, \dots \quad (5.18)$$

gelöst werden muss. Zwangsbedingungen in Form von Differentialgleichungen 2. Ordnung können nicht auftreten, weil die Bewegungsgleichungen ebenfalls 2. Ordnung sind und jede weitere Gleichung 2. Ordnung entweder redundant oder unerfüllbar ist.

Beispiel: Rollende Kugel auf Ebene.



Wir haben eine holonome Zwangsbedingung für den Mittelpunkt  $\vec{r}$  der Kugel:  $z = R$ . Die Kugel kann nun in zwei unabhängige Richtungen rollen. Die zugehörigen Rollbedingungen (rollen ohne zu gleiten) sind analog zum rollenden Rad:

- Rollt die Kugel in  $x$ -Richtung, so rotiert sie um die positive  $y$ -Achse (Rechte-Hand-Regel), d.h. die Komponente  $\omega_2$  der vektoriellen Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  beschreibt diese Rotation. Die Rollbedingung lautet

$$\dot{x} = R\omega_2 \quad \Leftrightarrow \quad dx - R\omega_2 dt = 0. \quad (5.19)$$

- Rollt die Kugel in  $y$ -Richtung, so rotiert sie um die *negative*  $x$ -Achse, d.h. die Rotation wird durch die Winkelgeschwindigkeit  $-\omega_1$  beschrieben. Die Rollbedingung lautet

$$\dot{y} = -R\omega_1 \quad \Leftrightarrow \quad dy + R\omega_1 dt = 0. \quad (5.20)$$

$\vec{\omega}$  ist i.A. zeitabhängig und man kann die Rollbedingungen daher nicht allgemein integrieren, um holonome Zwangsbedingungen zu erhalten. Anschaulich können wir verstehen, dass die Rollbedingungen die Lage der Kugel nicht einschränken: Wir können eine Kugel so bewegen, dass sie in jeder beliebigen Orientierung an jedem beliebigen Punkt endet.

## 5.2 Generalisierte Koordinaten

Wir nehmen an, dass  $p$  *holonome* Zwangsbedingungen vorliegen, dann haben wir  $S = 3N - p$  unabhängige Koordinaten. Die Lagrangesche Formulierung der Mechanik verwendet *generalisierte Koordinaten*, die nicht kartesisch oder auf ein Inertialsystem bezogen sein müssen. Wir stellen nur die folgenden viel schwächeren Forderungen: Die generalisierten Koordinaten  $q_1, q_2, \dots$  müssen

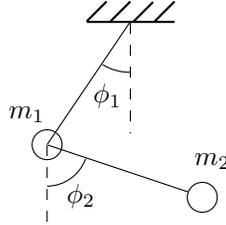
- die Konfiguration *eindeutig* beschreiben und
- *unabhängig* sein.

Es müssen dann genau  $S$  generalisierte Koordinaten existieren. Wegen der Eindeutigkeit gilt für die kartesischen Koordinaten, unter Verwendung der Zwangsbedingungen,  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_S; t)$  für  $i = 1, \dots, N$ . (Wir werden gelegentlich die Bedingungen lockern und generalisierte Koordinaten betrachten, die nicht unabhängig sind.)

Die Ableitungen  $\dot{q}_i := dq_i/dt$  bezeichnen wir als *generalisierte Geschwindigkeiten*. Der *Konfigurationsraum* ist eine Menge von Tupeln  $(q_1, \dots, q_S)$ , die die Konfiguration fast überall *eindeutig* (bijektiv) beschreiben. Er muss nicht der Raum  $\mathbb{R}^S$  sein, da einige der  $q_j$  z.B. Winkel sein können.

Beispiele:

- Ebenes Doppelpendel:



Günstige generalisierte Koordinaten sind die Winkel  $\phi_1$  und  $\phi_2$ . Der Konfigurationsraum ist  $[0, 2\pi[ \otimes [0, 2\pi[$ . Dieser ist isomorph zu  $S^1 \otimes S^1$ , wobei  $S^1$  einen Kreis bezeichnet.

- Hantel: Geeignete generalisierte Koordinaten sind die kartesischen Koordinaten des Schwerpunktes und zwei Polarwinkel  $\theta, \phi$ , die die Orientierung des Relativvektors  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$  beschreiben. Der Konfigurationsraum ist  $\mathbb{R}^3 \otimes S^2$  ( $S^2$  ist die zweidimensionale Kugelfläche).
- Teilchen im Zentralkraftfeld: Geeignete generalisierte Koordinaten sind die Kugelkoordinaten  $r, \theta, \phi$ . Der Konfigurationsraum ist  $\{0\} \cup ]0, \infty[ \otimes S^2$ , isomorph zu  $\mathbb{R}^3$ . Dieses Beispiel illustriert, dass generalisierte Koordinaten auch ohne Zwangsbedingungen sinnvoll sein können.

### 5.3 Das d'Alembertsche Prinzip

Unser Ziel ist die Herleitung der allgemeinen Bewegungsgleichung für die generalisierten Koordinaten  $q_1, \dots, q_S$ . Die einzige Bewegungsgleichung, die wir bisher kennen, ist Newtons 2. Axiom

$$\dot{\vec{p}}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i, \quad i = 1, \dots, N \tag{5.21}$$

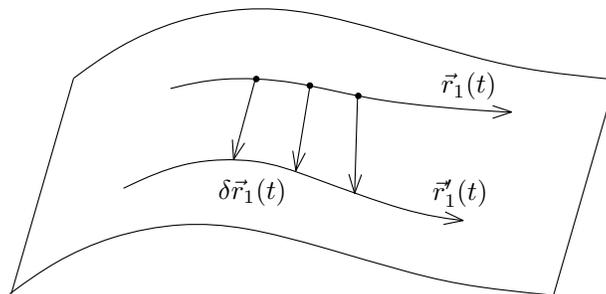
(für konstante Massen). Davon müssen wir also ausgehen. Wir schreiben

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{Z}_i + \vec{K}_i \tag{5.22}$$

mit der Zwangskraft  $\vec{Z}_i$  und der bekannten *treibenden Kraft*  $\vec{K}_i$ . Unser Problem ist, dass wir zwar die Zwangsbedingungen kennen, aber nicht die Zwangskräfte  $\vec{Z}_i$ . Da wir die Zwangsbedingungen kennen, können wir alle mit ihnen vereinbaren Bewegungen  $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \dots$  der Teilchen angeben, wissen aber noch nicht, welche davon die richtige ist. Seien nun  $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \dots$  und  $\vec{r}'_1(t), \vec{r}'_2(t), \dots$  zwei mit den Zwangsbedingungen verträgliche Bewegungen, die sich nur um infinitesimale Größen

$$\delta \vec{r}_i(t) := \vec{r}'_i(t) - \vec{r}_i(t) \tag{5.23}$$

unterscheiden. Diese nennt man *virtuelle Verrückungen*, was, zusammen mit dem Symbol „ $\delta$ “, ausdrücken soll, dass es i.A. keine realen Verschiebungen der Massenpunkte *entlang* irgendeiner möglichen Bahn sind.



Nun ist plausibel, dass die Zwangskräfte unter virtuellen Verrückungen keine Arbeit leisten,  $\sum_i \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$  für alle Zeiten  $t$ . Wir betrachten z.B. einen auf einer Oberfläche gleitenden Körper: Die Zwangskraft ist die *Normalkraft*  $\vec{F}_N$  und die virtuellen Verrückungen, die ja die Zwangsbedingungen respektieren, liegen *tangential* zur Oberfläche, also  $\vec{Z} \cdot \delta \vec{r} = \vec{F}_N \cdot \delta \vec{r} = 0$ . Allgemein halten die Zwangskräfte die Teilchen auf den erlaubten Bahnen und müssen daher senkrecht zur Schar aller erlaubten Bahnen stehen. Diese Aussage ist das wichtige *Prinzip der virtuellen Arbeit*,

$$\sum_i \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad \forall t. \quad (5.24)$$

Man kann dieses Prinzip nicht aus den Newtonschen Axiomen herleiten, und z.B. Kuypers bezeichnet es deshalb als ein zusätzliches Axiom. Es ist eigentlich offensichtlich, dass es nicht aus den Newtonschen Axiomen hergeleitet werden kann, weil die Newton-Mechanik das Konzept der Zwangskraft gar nicht kennt. Man kann das Prinzip der virtuellen Arbeit als *Teil der Definition der Zwangskraft* für holonome Zwangsbedingungen ansehen.

Wegen  $\dot{\vec{p}}_i = \vec{K}_i + \vec{Z}_i$  folgt sofort das *d'Alembertsche Prinzip*

$$\sum_i (\vec{K}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad \forall t. \quad (5.25)$$

Wir haben damit die unbekanntenen Zwangskräfte aus der Beschreibung eliminiert. Allerdings können wir praktisch noch nicht viel damit anfangen, weil die  $3N$  Komponenten der  $\delta \vec{r}_i$  wegen der  $p$  Zwangsbedingungen nicht unabhängig sind. Daher führen wir jetzt generalisierte Koordinaten  $q_1, q_2, \dots, q_S$  ein, wobei  $S = 3N - p$  ist.

Aus  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_S; t)$  mit  $i = 1, \dots, N$  folgt

$$\dot{\vec{r}}_i \equiv \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}. \quad (5.26)$$

Hierin sind  $\partial \vec{r}_i / \partial q_j$  und  $\partial \vec{r}_i / \partial t$  Funktionen von  $q_1, \dots, q_S$  und  $t$ . Also erhalten wir die  $\dot{\vec{r}}_i$  als Funktionen  $\dot{\vec{r}}_i(q_1, \dots, q_S; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_S; t)$ . Diese Funktion ist *linear* in den  $\dot{q}_j$ . Aus Gleichung (5.26) lesen wir ab

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \quad (5.27)$$

Aus  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_S; t)$  folgt andererseits für die virtuellen Verrückungen, bei denen die Zeit ja nicht verändert wird,

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (5.28)$$

Damit wird der erste Term im d'Alembertschen Prinzip

$$\sum_{i=1}^N \vec{K}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^S \vec{K}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^S Q_j \delta q_j \quad (5.29)$$

mit den *generalisierten Kräften*

$$Q_j := \sum_{i=1}^N \vec{K}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \quad (5.30)$$

Der zweite Term im d'Alembertschen Prinzip lautet

$$-\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = -\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = -\sum_i \sum_j m_i \underbrace{\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}} \delta q_j. \quad (5.31)$$

Der unterklammerte Ausdruck ist

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \dot{r}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{1}{2} \dot{r}_i^2 \right). \quad (5.32)$$

Nun ist die kinetische Energie  $T = \sum_i (1/2) m_i \dot{r}_i^2$ , also ergibt sich

$$- \sum_i \dot{p}_i \cdot \delta \vec{r}_i = - \sum_j \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \quad (5.33)$$

Das gesamte d'Alembertsche Prinzip lautet also

$$0 = \sum_i (\vec{K}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_j \left( Q_j - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

und schließlich

$$\sum_{j=1}^S \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0. \quad (5.34)$$

Dies ist das d'Alembertsche Prinzip in generalisierten Koordinaten.

Für holonome Zwangsbedingungen sind die Koordinaten  $q_j$  voneinander unabhängig. Ihre Variationen (virtuellen Verrückungen)  $\delta q_j$  können also unabhängig voneinander gewählt werden (z.B. können wir alle  $\delta q_j$  bis auf eines gleich Null setzen). Aus dem d'Alembertschen Prinzip folgt dann, dass alle Koeffizienten verschwinden müssen. Es gilt also

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, S. \quad (5.35)$$

Beachte, dass diese Gleichung für kartesische Koordinaten ohne Zwangsbedingungen  $m_i \ddot{r}_i = \vec{F}_i$  ergibt. Die Gleichung ist also eine Verallgemeinerung des Newtonschen Bewegungsgesetzes. Wir haben unser Hauptziel erreicht: Die Bewegungsgleichungen sind explizit für die  $S$  unabhängigen generalisierten Koordinaten formuliert und enthalten die Zwangskräfte nicht mehr.

### 5.3.1 Mechanisches Gleichgewicht

An dieser Stelle können wir das Konzept des *mechanischen Gleichgewichts* einführen. Ein mechanisches System ist im Gleichgewicht, wenn sich die kartesischen Koordinaten in einem Inertialsystem,  $\vec{r}_i$ , nicht mit der Zeit ändern. Dann gilt, unter der Annahme konstanter Massen,  $\dot{\vec{p}}_i = 0$  und das d'Alembertsche Prinzip in der Form (5.25) wird zu

$$\sum_i \vec{K}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (5.36)$$

Im Gleichgewicht verschwindet also die virtuelle Arbeit der treibenden Kräfte. In der obigen Herleitung fällt also der Term der kinetischen Energie weg und wir erhalten die analoge Bedingung

$$\sum_j Q_j \delta q_j = 0 \quad (5.37)$$

auch für die generalisierten Kräfte und Koordinaten. Für holonome Zwangsbedingungen folgt  $Q_j = 0$  für  $j = 1, \dots, S$  als Gleichgewichtsbedingung.

## 5.4 Lagrange-Funktion und Lagrange-Gleichungen 2. Art

Wir untersuchen nun, wie die allgemeine Bewegungsgleichung (5.35) speziell für *konservative* treibende Kräfte aussieht. Für konservative Kraftfelder gilt

$$\vec{K}_i = - \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \quad \text{mit} \quad V = V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N). \quad (5.38)$$

Damit können wir für die generalisierten Kräfte schreiben (Kettenregel!)

$$Q_j = \sum_i \vec{K}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_i \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, S. \quad (5.39)$$

Für konservative Kräfte sind die generalisierten Kräfte also durch die Änderungen der potentiellen Energie mit den entsprechenden generalisierten Koordinaten gegeben. Der Zusammenhang zwischen Kräften und Potential bleibt also im Vergleich zur Newton-Mechanik i.W. unverändert.

Da das Potential nicht von den Geschwindigkeiten  $\dot{r}_i$  bzw.  $\dot{q}_j$  abhängt, gilt außerdem

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0. \quad (5.40)$$

Mit dem d'Alembertschen Prinzip folgt

$$\sum_j \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - V) - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) \right) \delta q_j = \sum_j \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - 0 - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0 \quad (5.41)$$

und für *holonome* Zwangsbedingungen (unabhängige  $\delta q_j$ )

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - V) - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) = 0, \quad j = 1, \dots, S. \quad (5.42)$$

Wir definieren die *Lagrange-Funktion*

$$L := T - V \quad (5.43)$$

oder ausführlicher

$$L(q_1, \dots, q_S; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_S; t) := T(q_1, \dots, q_S; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_S; t) - V(q_1, \dots, q_S). \quad (5.44)$$

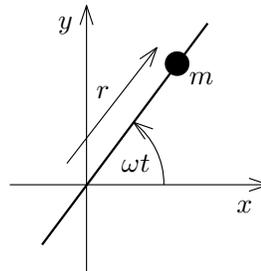
Im Folgenden ist die *Funktion* (Abbildung)  $(q_1, \dots, q_S; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_S; t) \mapsto L$  wichtig, nicht nur der Wert von  $L$ , daher müssen wir beachten, was die unabhängigen Variablen sind.

Damit erhalten wir die *Lagrange-Gleichungen 2. Art*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, S. \quad (5.45)$$

Die Lagrange-Gleichungen sind i.A.  $S$  Differentialgleichungen 2. Ordnung (!) für die  $q_j(t)$ . Die allgemeine Lösung enthält demnach i.A.  $2S$  freie Parameter. Wir brauchen also z.B.  $2S$  Anfangsbedingungen, um eine spezielle Lösung festzulegen. (Offenbar gibt es auch Lagrange-Gleichungen 1. Art. Diese werden wir im folgenden Kapitel besprechen.)

Beispiele: 1. Gleitende Perle auf gleichförmig rotierendem Draht:



Die Zwangsbedingungen sind  $z = 0$  (holonom-skleronom) und  $y = x \tan \omega t$  (holonom-rheonom). Damit ist  $S = 1$  und wir brauchen genau eine generalisierte Koordinate. Eine geeignete Wahl ist  $q = r$ , die Position entlang des Drahtes.  $r$  ist nicht der Abstand (die Radius-Polarkoordinate), da  $r$  auch negativ werden kann, wenn die Perle auf

der anderen Hälfte des Drahtes sitzt. Tatsächlich können wir  $r$  als *kartesische* Koordinate in einem rotierenden, und damit nicht inertialen, Bezugssystem verstehen.

Die kinetische Energie ist

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2), \quad (5.46)$$

vgl. Abschnitt 2.1. Mit  $\phi = \omega t$  folgt

$$T = \frac{m}{2} (\dot{q}^2 + q^2 \omega^2). \quad (5.47)$$

Mit  $V \equiv 0$  wird

$$L = T = \frac{m}{2} (\dot{q}^2 + q^2 \omega^2) \quad (5.48)$$

und die Lagrange-Gleichung für  $q$  lautet

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} m\dot{q} - m\omega^2 q = m\ddot{q} - m\omega^2 q \quad (5.49)$$

und es folgt

$$\ddot{q} = \omega^2 q. \quad (5.50)$$

Diese Gleichung ist *nicht* analog zum harmonischen Oszillator, da die generalisierte Kraft nicht rücktreibend ist. Wir lösen die Gleichung mit dem Ansatz  $q = e^{\lambda t}$ . Es folgt  $\lambda^2 = \omega^2$  und  $\lambda = \pm\omega$ . Die allgemeine Lösung ist

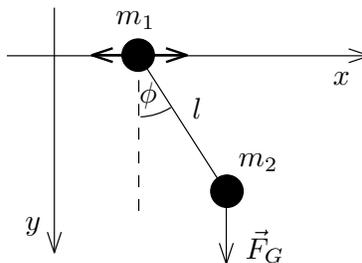
$$q(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} \quad (5.51)$$

(in den Exponenten steht kein  $i$ !). Z.B. für die Anfangsbedingungen  $q(0) = r(0) = r_0 > 0$  und  $\dot{q}(0) = 0$  folgt  $A + B = r_0$  und  $A - B = 0$ , also  $A = B = r_0/2$  und damit

$$q(t) = r_0 \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} = r_0 \cosh \omega t. \quad (5.52)$$

Die Perle bewegt sich also beschleunigt vom Ursprung fort, obwohl gar keine treibende Kraft vorhanden ist. Die Beschleunigung muss daher aufgrund der Zwangskräfte erfolgen. Bei rheonomen Zwangsbedingungen ist dies i.A. möglich.

2. Pendel mit gleitender Aufhängung:



Zwangsbedingungen:  $z_1 = z_2 = 0$ ,  $y_1 = 0$  und  $(x_1 - x_2)^2 + y_2^2 - l^2 = 0$ . Wir erhalten  $S = 6 - 4 = 2$  unabhängige Koordinaten. Wir wählen  $q_1 = x_1$  und  $q_2 = \phi$ . Dann ist

$$x_2 = q_1 + l \sin q_2, \quad (5.53)$$

$$y_2 = l \cos q_2. \quad (5.54)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (l^2 \dot{q}_2^2 + 2l\dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos q_2) \end{aligned} \quad (5.55)$$

und

$$V = -m_2 gl \cos q_2. \quad (5.56)$$

Also ist

$$L = T - V = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2} l^2 \dot{q}_2^2 + m_2 l \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos q_2 + m_2 gl \cos q_2. \quad (5.57)$$

Wir können jetzt sofort die Lagrange-Gleichungen für  $q_1$  und  $q_2$  hinschreiben. Sie lassen sich mit etwas Mühe in geschlossener Form lösen. Wir stellen hier nur fest, dass  $L$  gar nicht von  $q_1$  selbst abhängt, nur von  $\dot{q}_1$ . Damit ist die Lagrange-Gleichung für  $q_1$  relativ einfach:

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{d}{dt} [(m_1 + m_2) \dot{q}_1 + m_2 l \dot{q}_2 \cos q_2]. \quad (5.58)$$

Also ist

$$(m_1 + m_2) \dot{q}_1 + m_2 l \dot{q}_2 \cos q_2 = \text{const} \quad (5.59)$$

eine *Erhaltungsgröße* (nämlich die  $x$ -Komponente des Gesamtimpulses). Diese erlauben Einsicht in das gegebene Problem und sind nützlich bei der mathematischen Lösung. Wir kommen darauf zurück.

### 5.4.1 Forminvarianz der Lagrange-Gleichungen

Eine Motivation der Lagrange-Mechanik war, dass sie für beliebige generalisierte Koordinaten gilt. Dies wird formal durch die *Forminvarianz* der Lagrange-Gleichungen unter *Punkttransformationen* ausgedrückt: Wenn

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, S \quad (5.60)$$

gilt und eine bijektive, differenzierbare Abbildung

$$q'_j = q'_j(q_1, \dots, q_S; t), \quad j = 1, \dots, S \quad (5.61)$$

existiert, so gibt es eine Funktion

$$L'(q'_1, \dots, q'_S; \dot{q}'_1, \dots, \dot{q}'_S; t), \quad (5.62)$$

so dass gilt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_j} - \frac{\partial L'}{\partial q'_j} = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, S. \quad (5.63)$$

Beweis: Wegen der Bijektivität können wir schreiben  $q_j = q_j(q'_1, \dots, q'_S; t)$ . Es folgt mittels der Kettenregel

$$\dot{q}_j = \sum_l \frac{\partial q_j}{\partial q'_l} \dot{q}'_l + \frac{\partial q_j}{\partial t} \quad (5.64)$$

und wir können ablesen, dass gilt

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}'_l} = \frac{\partial q_j}{\partial q'_l}. \quad (5.65)$$

Wir beweisen hier sogar eine stärkere Aussage, dass nämlich  $L'$  gleich  $L$  ist, aber ausgedrückt durch die neuen Variablen  $q'_i, \dot{q}'_i$ :

$$L'(q'_1, \dots, q'_S; \dot{q}'_1, \dots, \dot{q}'_S; t) = L(q_1(q'_1, \dots, q'_S; t), \dots, q_S(q'_1, \dots, q'_S; t); \dot{q}_1(q'_1, \dots, q'_S; \dot{q}'_1, \dots, \dot{q}'_S; t), \dots, \dot{q}_S(q'_1, \dots, q'_S; \dot{q}'_1, \dots, \dot{q}'_S; t)). \quad (5.66)$$

Für die so definierte Funktion  $L'$  gilt

$$\frac{\partial L'}{\partial q'_l} = \sum_j \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial q'_l} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q'_l} \right) \quad (5.67)$$

und

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_i} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}'_i} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial q'_i} \quad (5.68)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_i} = \sum_j \left[ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial q'_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial q_j}{\partial q'_i}}_{= \partial \dot{q}_j / \partial \dot{q}'_i} \right]. \quad (5.69)$$

Also folgt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_i} - \frac{\partial L'}{\partial q'_i} = \sum_j \underbrace{\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right)}_{=0} \frac{\partial q_j}{\partial q'_i} = 0. \quad (5.70)$$

$L'$  als Funktion von  $q'_j$ ,  $\dot{q}'_j$  und  $t$  erfüllt also die Lagrange-Gleichungen 2. Art, was zu zeigen war. Diese Forminvarianz ist eine sehr umfangreiche Symmetrie – die Abbildung  $(q_1, \dots, q_S) \mapsto (q'_1, \dots, q'_S)$  muss nur bijektiv und differenzierbar sein.

## 5.5 Verallgemeinerte Potentiale

Bei holonomen Zwangsbedingungen und beliebigen, nicht unbedingt konservativen, Kräften gelten die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0, \quad (5.71)$$

vgl. Abschnitt 5.3. Wir hatten gesehen, dass für *konservative* Kräfte die Lagrange-Gleichungen folgen, wobei die generalisierten Kräfte als Gradienten

$$Q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (5.72)$$

geschrieben werden können.

Lagrange-Gleichungen 2. Art ergeben sich auch für noch allgemeinere Kräfte, nämlich wenn ein *verallgemeinertes Potential*  $U(q_1, \dots, q_S; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_S; t)$  existiert, so dass

$$Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (5.73)$$

gilt. Hängt  $U$  nur von den Koordinaten  $q_j$  ab, so ist  $U$  ein Potential im engeren Sinne und die resultierende Kraft ist konservativ. Allgemein folgt aus Gleichung (5.71)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = 0, \quad (5.74)$$

also

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (5.75)$$

mit der *verallgemeinerten Lagrange-Funktion*  $L = T - U$ .

Kräfte, die nicht konservativ sind, aber (5.73) erfüllen, existieren tatsächlich. Ein Beispiel sind explizit zeitabhängige Gradientenfelder

$$Q_j(q_1, \dots, q_S; t) = - \frac{\partial}{\partial q_j} U(q_1, \dots, q_S; t). \quad (5.76)$$

Dadurch wird z.B. eine Mondfähre oder ein leichter Asteroid im Gravitationsfeld von Erde und Mond beschrieben. Das wohl wichtigste Beispiel ist aber die Lorentz-Kraft

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (5.77)$$

Man kann die Felder  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  durch das skalare und das Vektorpotential ausdrücken (siehe Vorlesung Elektrodynamik),

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad (5.78)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (5.79)$$

Das verallgemeinerte Potential lautet

$$U = q(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) = q \left( \phi - \sum_{j=1}^3 \dot{x}_j A_j \right), \quad (5.80)$$

wie wir jetzt zeigen: In kartesischen Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial U}{\partial x_j} &= -q \frac{dA_j}{dt} - q \frac{\partial \phi}{\partial x_j} + q \sum_l \dot{x}_l \frac{\partial A_l}{\partial x_j} \\ &= -q \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x_j} - q \frac{\partial A_j}{\partial t}}_{= qE_j} - q \sum_l \frac{\partial A_j}{\partial x_l} \dot{x}_l + q \sum_l \dot{x}_l \frac{\partial A_l}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Im zweiten Schritt haben wir die Kettenregel auf  $dA_j/dt$  angewendet. Die letzten beiden Terme lauten in Vektornotation

$$-q(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + q\vec{\nabla}(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) = q\dot{\vec{r}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = q\dot{\vec{r}} \times \vec{B}. \quad (5.82)$$

Also folgt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial U}{\partial x_j} = qE_j + q(\vec{v} \times \vec{B})_j, \quad (5.83)$$

was zu zeigen war.

Zusammenfassend erhalten wir die verallgemeinerte Lagrange-Funktion für ein geladenes Teilchen in einem beliebigen, orts- und zeitabhängigen elektromagnetischen Feld:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - q\phi + q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}. \quad (5.84)$$

Das ist ein über die klassische Mechanik hinaus wichtiges Ergebnis.

## 5.6 Das Hamiltonsche Prinzip

Wir hatten die Lagrange-Gleichung aus dem d'Alembertschen Prinzip erhalten, das wiederum aus den Newtonschen Axiomen und der Definition der Zwangskräfte folgt. Das d'Alembertsche Prinzip

$$\sum_j \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0 \quad (5.85)$$

ist *lokal* für jeden Punkt entlang der Bahn formuliert. Wir betrachten nun ein äquivalentes Prinzip, das *global*, also für die gesamte Bahn, formuliert ist. Lokale Variationsprinzipien nennen wir auch *Differentialprinzipien*, während globale Variationsprinzipien *Integralprinzipien* genannt werden. Wir beschränken uns auf Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen. Dazu schreiben wir  $\vec{q} := (q_1, \dots, q_S)$  und nennen  $\vec{q}(t)$  die *Konfigurationsbahn* des Systems.

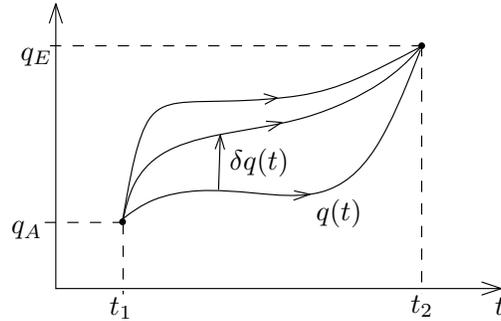
Die *Wirkung* einer Konfigurationsbahn  $\vec{q}(t)$  auf dem Zeitintervall  $[t_1, t_2]$  ist definiert als

$$S[\vec{q}(t)] := \int_{t_1}^{t_2} dt L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t). \quad (5.86)$$

Die Wirkung ist ein *Funktional*, d.h. eine Abbildung von einer Menge von *Funktionen*, hier der Funktionen  $\vec{q}(t)$ , in eine Menge von Zahlen. Funktionale werden dadurch gekennzeichnet, dass man das Argument in eckige Klammern setzt.

Die *Konkurrenzchar* ist die Menge aller Konfigurationsbahnen mit gegebenen, festen Anfangs- und Endzeitpunkten  $t_1, t_2$  und gegebenen, festen Anfangs- und Endkonfigurationen  $\vec{q}(t_1) = \vec{q}_A, \vec{q}(t_2) = \vec{q}_E$ :

$$M := (\vec{q}(t) \mid \vec{q}(t_1) = \vec{q}_A \wedge \vec{q}(t_2) = \vec{q}_E). \quad (5.87)$$



Die Differenzen zwischen verschiedenen Bahnen sind wieder virtuelle Verrückungen, die  $\delta \vec{q}_A = \delta \vec{q}_E = 0$  erfüllen müssen, aber sonst beliebig sind. Nützlich sind später insbesondere infinitesimale Verrückungen. Nun können wir das *Hamiltonsche Prinzip* formulieren: Die tatsächliche Konfigurationsbahn  $\vec{q}(t)$  macht die Wirkung  $S[\vec{q}(t)]$  auf  $M$  stationär.

Eine äquivalente Formulierung ist: Für die tatsächliche Konfigurationsbahn  $\vec{q}(t)$  verschwindet die *Variation* von  $S$  für infinitesimale virtuelle Verrückungen in  $M$ :

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) = 0. \quad (5.88)$$

Für das *Funktional*  $S$  entspricht das der bekannten Äquivalenz für *Funktionen*  $f$ :  $f(x)$  hat einen stationären Punkt  $\Leftrightarrow df/dx = 0 \Leftrightarrow df = 0$ . Das Symbol „ $\delta$ “ verhält sich im Wesentlichen wie „ $d$ “ für das totale Differential, nur sind die Argumente der Funktionals  $S[\vec{q}(t)]$  nicht Zahlen, sondern ganze Funktionen, die überabzählbar unendlich viele Zahlen  $q_j(t)$  für alle  $t \in [t_1, t_2]$  repräsentieren. (Das Symbol „ $\delta$ “ hat *nichts* mit einem nicht vollständigen Differential zu tun!)

Wir zeigen nun, dass das Hamiltonsche Prinzip aus dem d'Alembertschen folgt, und illustrieren zugleich die Rechnung mit Variationen: Es ist

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{K}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_i (m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i - \vec{K}_i \cdot \delta \vec{r}_i) \\ &= \sum_i \left[ m_i \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i) - m_i \underbrace{\dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \dot{\vec{r}}_i}_{=(1/2) \delta \dot{\vec{r}}_i^2} - \vec{K}_i \cdot \delta \vec{r}_i \right]. \end{aligned} \quad (5.89)$$

Wir integrieren dies über  $[t_1, t_2]$ :

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left( \frac{d}{dt} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i - \frac{m_i}{2} \delta \dot{\vec{r}}_i^2 - \vec{K}_i \cdot \delta \vec{r}_i \right). \quad (5.90)$$

Der erste Term ist (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i \Big|_{t_1}^{t_2} = 0, \quad (5.91)$$

da Anfangs- und Endkonfiguration festgehalten werden sollen:  $\delta\vec{r}_i(t_1) = \delta\vec{r}_i(t_2) = 0$ .

Es bleibt, nach Vorzeichenwechsel,

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \underbrace{\delta \left( \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{r}_i^2 \right)}_{=T} + \underbrace{\sum_i \vec{K}_i \cdot \delta\vec{r}_i}_{= \sum_{j=1}^S Q_j \delta q_j} \right] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \delta T + \sum_j Q_j \delta q_j \right). \quad (5.92)$$

Sind die Kräfte konservativ, so ist

$$\sum_j Q_j \delta q_j = - \sum_j \frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j = -\delta V \quad (5.93)$$

und es folgt das Hamiltonsche Prinzip:

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt (\delta T - \delta V) = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt (T - V) = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L = \delta S. \quad (5.94)$$

Existiert zumindest ein verallgemeinertes Potential  $U$ , so ist

$$\begin{aligned} \sum_j Q_j \delta q_j &= \sum_j \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j - \sum_j \frac{\partial U}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \underbrace{\frac{d}{dt} \sum_j \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j}_{\text{Integral ergibt Null wegen } \delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0} - \underbrace{\sum_j \frac{\partial U}{\partial q_j} \delta q_j}_{= -\delta U}. \end{aligned} \quad (5.95)$$

Also folgt auch hier, wie zuvor,

$$0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L = \delta S. \quad (5.96)$$

### 5.6.1 Euler-Lagrange-Gleichungen

Die Lagrange-Gleichungen 2. Art lassen sich recht einfach direkt aus dem Hamiltonschen Prinzip herleiten, wie wir nun zeigen wollen:

$$0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) \quad (5.97)$$

(das Zeit-Integral und die Variation vertauschen, weil bei den virtuellen Verrückungen die Zeit festgehalten wird; sie ist einfach ein Parameter)

$$\dots = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t} \delta t}_{t \text{ ist fest; } \delta t = 0} \right). \quad (5.98)$$

Wir integrieren im zweiten Term partiell:

$$\begin{aligned} \dots &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \underbrace{\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2}}_{= 0 \text{ wegen } \delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0} - \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_j \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_j \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j(t). \end{aligned} \quad (5.99)$$

Nun sind die generalisierten Koordinaten für holonome Zwangsbedingungen unabhängig und daher sind  $\delta q_j(t)$ ,  $\delta q_l(t)$  für  $j \neq l$  zu derselben Zeit unabhängig. Zu verschiedenen Zeiten  $t \neq t'$  sind  $\delta q_j(t)$  und  $\delta q_l(t')$  ohnehin unabhängig, auch für  $j = l$ . Das Integral kann also für alle Variationen  $\delta q_j(t)$  nur verschwinden, wenn gilt

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, S \quad \forall t \in [t_1, t_2]. \quad (5.100)$$

Das sind die Lagrange-Gleichungen 2. Art. Die Herleitung eines Systems von Differentialgleichungen aus einem Variationsprinzip der Form von Gl. (5.88) wurde zuerst von L. Euler durchgeführt. Man nennt die Gleichungen in diesem Zusammenhang auch *Euler-Lagrange-Gleichungen*. Die Idee der Variationsrechnung und der Euler-Gleichungen sind aber allgemeiner anwendbar und nicht auf mechanische Probleme beschränkt.

Im Prinzip könnten wir den Ballast der Newtonschen Axiome über Bord werfen und  $\delta S = 0$  als Axiom an den Anfang der Mechanik stellen. Im Übrigen ist das Hamiltonsche Prinzip nicht nur eine sehr kompakte Formulierung der Grundlage der klassischen Mechanik, sondern auch außerhalb dieser anwendbar. Richard Feynman soll einmal auf die Frage nach der Weltformel „ $\delta S = 0$ “ hingeschrieben haben. Die Frage ist natürlich, wie  $S$  konkret aussieht.

### 5.6.2 Eichinvarianz der Euler-Lagrange-Gleichungen

Mit Hilfe des Hamiltonschen Prinzips können wir auch leicht erkennen, dass die Bewegungsgleichungen unter gewissen Änderungen der Lagrange-Funktion  $L$  invariant sind. Der Begriff „Eichinvarianz“ kann erst in der Vorlesung Elektrodynamik erklärt werden. Zum einen ändern sich die Bewegungsgleichungen nicht, wenn man eine totale Zeitableitung zu  $L$  addiert, d.h.  $L$  und

$$L' = L + \frac{d}{dt} F(\vec{q}, t) \quad (5.101)$$

liefern dieselben Bewegungsgleichungen.  $F$  kann nicht von  $\dot{\vec{q}}$  abhängen, da sonst  $L'$  von  $\ddot{\vec{q}}$  abhängen würde. Zur Vermeidung von Verwirrungen sei darauf hingewiesen, dass  $F$  trotz des Symbols keine Kraft ist.

Beweis: Mit

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} dt L' \quad (5.102)$$

gilt

$$\delta S' = \delta S + \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} F = \delta S + \delta F(\vec{q}(t_2), t_2) - \delta F(\vec{q}(t_1), t_1) = \delta S, \quad (5.103)$$

da  $t_1$ ,  $t_2$  und  $\vec{q}(t_1)$ ,  $\vec{q}(t_2)$  bei der Variation festgehalten werden. Also sind  $\delta S = 0$  und  $\delta S' = 0$  äquivalent und führen daher zu denselben Bewegungsgleichungen.

Beispiele: Terme in der Lagrange-Funktion, die zu

$$\dot{q}_j \quad \text{oder} \quad q_j \dot{q}_j \equiv \frac{d}{dt} \frac{1}{2} q_j^2 \quad (5.104)$$

proportional sind, haben als totale Zeitableitungen keinen Einfluss auf die Bewegungsgleichungen. Sie können daher weggelassen werden. Dies kann man verwenden, um die Lagrange-Funktion zu vereinfachen.

Zum anderen ändern sich die Bewegungsgleichungen nicht unter Multiplikation von  $L$  mit einer Konstanten  $c \neq 0$ :

$$L' = cL \quad (5.105)$$

führt auf

$$\delta S' = c \delta S. \quad (5.106)$$

Also sind  $\delta S = 0$  und  $\delta S' = 0$  wieder äquivalent.

## 5.7 Zyklische Koordinaten und generalisierte Impulse

Wir hatten am Beispiel des Pendels mit gleitender Aufhängung bereits gesehen, dass sich die Lagrange-Gleichung für eine Koordinate  $q_j$  vereinfacht, wenn die Lagrange-Funktion nicht von  $q_j$  (aber von  $\dot{q}_j$ ) abhängt. In diesem Fall hatten wir eine Erhaltungsgröße gefunden. Wir formulieren den Zusammenhang nun allgemeiner.

Zunächst zwei wichtige Definitionen: Zum einen definieren wir den zu einer Koordinate  $q_j$  *konjugierten Impuls* durch

$$p_j := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}. \quad (5.107)$$

Die so definierten Größen nennen wir auch *generalisierte* oder *kanonische Impulse*.

Zum anderen nennen wir eine generalisierte Koordinate  $q_j$  *zyklisch*, wenn gilt

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (5.108)$$

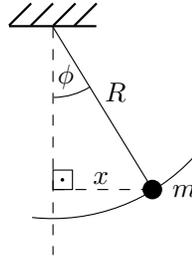
d.h. wenn  $q_j$  nicht in  $L$  vorkommt. Dafür ist unerheblich, ob  $\dot{q}_j$  in  $L$  vorkommt. (Wir müssen aber nur Fälle betrachten, in denen  $\dot{q}_j$  vorkommt, denn wenn weder  $q_j$  noch  $\dot{q}_j$  auftreten, können wir gar keine Bewegungsgleichung für  $q_j(t)$  herleiten. Die Lagrange-Funktion ist dann nicht geeignet, die Koordinate  $q_j$  zu beschreiben.)

Für eine zyklische Koordinate  $q_j$  gilt nun

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} p_j - 0 = \dot{p}_j, \quad (5.109)$$

also  $p_j = \text{const.}$  Der zu einer zyklischen Koordinate konjugierte Impuls ist also eine Erhaltungsgröße. Es ist sicherlich wünschenswert, möglichst viele generalisierte Koordinaten so zu wählen, dass sie zyklisch sind.

Beispiel: Mittels einer starren Stange an einem Drehpunkt befestigter Massenpunkt in zwei Dimensionen (ebenes Pendel ohne Schwerkraft).



Die geeignete generalisierte Koordinate ist  $\phi$ . Die Lagrange-Funktion lautet

$$L = T - V = \frac{m}{2} R^2 \dot{\phi}^2 - 0. \quad (5.110)$$

$\phi$  ist also zyklisch. Der konjugierte Impuls

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mR^2 \dot{\phi} \quad (5.111)$$

ist erhalten.  $p_\phi$  ist hier der Drehimpuls um die Drehachse, die auf der Zeichenebene senkrecht steht.

Hätten wir dagegen die horizontale Auslenkung  $x = R \sin \phi$  als generalisierte Koordinate gewählt, so wäre

$$L = T = \frac{m}{2} R^2 \left( \frac{d}{dt} \arcsin \frac{x}{R} \right)^2 = \frac{m}{2} R^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - x^2/R^2}} \frac{\dot{x}}{R} \right)^2 = \frac{m}{2} \frac{R^2 \dot{x}^2}{R^2 - x^2}. \quad (5.112)$$

$x$  ist nicht zyklisch! Die Wahl von  $\phi$  ist also günstiger. Wir sehen, dass die Zahl der zyklischen Koordinaten nicht invariant unter Punkttransformationen ist.

## 5.8 Das Noether-Theorem

Wir hatten gesehen, dass die Existenz einer zyklischen Koordinate  $q_j$  einen Erhaltungssatz impliziert. Ist  $q_j$  zyklisch, so können wir diese Koordinate um eine beliebige Konstante verschieben,  $q_j \mapsto q'_j = q_j + c$ , ohne dass sich die Lagrange-Funktion und damit die Bewegungsgleichungen ändern. Den Zusammenhang zwischen Invarianzen der Lagrange-Funktion und Erhaltungssätzen wollen wir nun allgemeiner formulieren.

Wir betrachten bijektive, also umkehrbare, Koordinatentransformationen (Punkttransformationen)

$$\vec{q} = (q_1, \dots, q_S) \mapsto \vec{q}' = (q'_1, \dots, q'_S). \quad (5.113)$$

Eine Koordinatentransformation heißt *Symmetrietransformation*, wenn sie die Lagrange-Funktion bis auf Umeichung invariant lässt:

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \mapsto L'(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t) = \underbrace{L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t)}_{\text{alte Lagrange-Funktion}} + \frac{d}{dt} F(\vec{q}', t). \quad (5.114)$$

Hier ist  $L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t)$  die alte Lagrange-Funktion angewandt auf die *neuen* Koordinaten und Geschwindigkeiten. Das ist nicht dasselbe wie die alte Lagrange-Funktion angewendet auf die *alten* Koordinaten und Impulse ausgedrückt durch die neuen; dafür hatten wir in Abschnitt 5.4 gesehen, dass ganz allgemein gilt

$$L(\vec{q}(\vec{q}', t), \dot{\vec{q}}(\vec{q}', t), t) = L'(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t). \quad (5.115)$$

Gilt Gl. (5.114), so heißt die Lagrange-Funktion *symmetrisch* unter der Transformation. Die totale Zeitableitung  $dF/dt$  beeinflusst die Bewegungsgleichungen nicht, wie wir gesehen hatten.

Eine Symmetrietransformation heißt *kontinuierlich*, wenn ein Parameter  $\alpha$  existiert, so dass

$$\vec{q}' = \vec{q}'(\vec{q}, t, \alpha) \quad (5.116)$$

bzw.

$$\vec{q} = \vec{q}(\vec{q}', t, \alpha) \quad (5.117)$$

für alle  $\alpha$  in einem gewissen Intervall Symmetrietransformationen sind und  $\vec{q}'$  sowie  $\vec{q}$  nach  $\alpha$  stetig differenzierbar sind. Außerdem fordern wir, dass diese Schar von Abbildungen die Identität enthält. O.B.d.A. soll  $\alpha = 0$  die Identität ergeben:

$$\vec{q}'(\vec{q}, t, \alpha = 0) = \vec{q}. \quad (5.118)$$

Allgemeiner kann eine kontinuierliche Symmetrietransformation auch von mehreren Parametern  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  abhängen. Die hier relevante Theorie der *Lie-Gruppen* wollen wir aber nicht diskutieren. Eine Symmetrietransformation, die sich nicht als Element eines solchen Kontinuums darstellen lässt, heißt *diskret*.

Beispiele: 1. Für einen freien Massenpunkt bilden die Translationen

$$\vec{r} \mapsto \vec{r}' = \vec{r} + \vec{\alpha}, \quad (5.119)$$

$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  kontinuierliche Symmetrietransformationen.

2. Für ein Zentralpotential  $V = V(r)$  bilden die Rotationen

$$\vec{r} \mapsto \vec{r}' = \overset{\leftrightarrow}{R} \vec{r} \quad \text{mit} \quad \overset{\leftrightarrow}{R} \in \text{SO}(3) \quad (5.120)$$

kontinuierliche Symmetrietransformationen. Die Rotationsmatrizen  $\overset{\leftrightarrow}{R}$  lassen sich durch drei Zahlen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  parametrisieren, wie wir noch sehen werden.

3. Für das eindimensionale Potential  $V = V_0 \cos kx$  sind die Translationen

$$x \mapsto x' = x + \frac{2\pi}{k} n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (5.121)$$

*diskrete* Symmetrietransformationen.

4. Die Inversion

$$\vec{r} \mapsto \vec{r}' = -\vec{r} \quad (5.122)$$

ist für einen freien Massenpunkt und auch für einen Massenpunkt in einem Zentralpotential oder einem anderen in  $\vec{r}$  geraden Potential ebenfalls eine diskrete Symmetrietransformation. Solche diskreten Symmetrietransformationen sind von zentraler Bedeutung in der Festkörperphysik.

Das *Noether-Theorem* zeigt nun, dass für eine kontinuierliche Symmetrietransformation

$$\vec{q}' = \vec{q}'(\vec{q}, t, \alpha), \quad (5.123)$$

$$\vec{q} = \vec{q}(\vec{q}', t, \alpha), \quad (5.124)$$

die Größe

$$J(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) := \sum_j \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{=p_j} \frac{\partial q_j(\vec{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial F(\vec{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \quad (5.125)$$

eine Erhaltungsgröße ist. Offenbar hängt  $J$  nur von *infinitesimalen* Symmetrietransformationen ( $\alpha \rightarrow 0$ ) ab.

Beweis: Wir zeigen, dass die Ableitung  $dJ/dt$  verschwindet. Dazu betrachten wir zunächst die Transformation der Lagrange-Funktion:

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = L\left(\vec{q}(\vec{q}', t, \alpha), \frac{d}{dt} \vec{q}(\vec{q}', t, \alpha), t\right) \equiv L'(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t, \alpha), \quad (5.126)$$

dies gilt nach Abschnitt 5.4 allgemein. In diesem Beweis behandeln wir die  $q'_j$  und  $\dot{q}'_j$  sowie  $\alpha$  und  $t$  als unabhängige Variablen, wenn wir partielle Ableitungen ausführen. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} &= \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_j \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \quad \left| \text{mit Lagrange-Gl. 2. Art} \right. \\ &= \frac{d}{dt} \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}. \end{aligned} \quad (5.127)$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) &= \frac{d}{dt} \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \\ &= \frac{\partial L'}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{dF}{dt} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( L' - \frac{dF}{dt} \right) \Big|_{\alpha=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t) \Big|_{\alpha=0}, \end{aligned} \quad (5.128)$$

wobei wir im letzten Schritt ausgenutzt haben, dass  $\vec{q} \mapsto \vec{q}'$  eine Symmetrietransformation ist und somit Gl. (5.114) gilt. Aber  $\alpha$  tritt in  $L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t)$  nicht explizit auf und die partielle Ableitung verschwindet daher:

$$\frac{d}{dt} J(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \frac{\partial}{\partial \alpha} L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t) \Big|_{\alpha=0} = 0. \quad (5.129)$$

Damit ist gezeigt, dass  $J(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$  eine Erhaltungsgröße ist.

Also existiert zu jeder einparametrischen Symmetrietransformation eine Erhaltungsgröße. Enthält die allgemeinste Symmetrietransformation für ein gegebenes Problem  $M$  unabhängige kontinuierliche Parameter  $\alpha_1, \dots, \alpha_M$ , so existieren  $M$  Erhaltungsgrößen. In den obigen Beispielen sind das bei 1. der Impuls  $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$  und bei 2. der Drehimpuls  $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$ . Die Umkehrung des Theorems gilt im Rahmen der Lagrange-Mechanik nicht: Man kann nicht zu jeder Erhaltungsgröße eine kontinuierliche Symmetrie finden. Diskrete Symmetrien sind für das Noether-Theorem unerheblich, sie führen i.A. nicht auf Erhaltungsgrößen.

Beispiele: 1. Die Existenz einer zyklischen Koordinate  $q_i$  ist ein Spezialfall: Die kontinuierliche Symmetrietransformation lautet

$$q'_i = q_i + \alpha \quad \Leftrightarrow \quad q_i = q'_i - \alpha. \quad (5.130)$$

In diesem Fall ändert sich  $L$  überhaupt nicht, d.h. die Funktion  $F$  verschwindet identisch. Nach dem Noether-Theorem existiert eine Erhaltungsgröße

$$J = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial F}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} (-\delta_{ij}) = -p_i. \quad (5.131)$$

Wir reproduzieren unser altes Ergebnis, dass der zu einer zyklischen Koordinate konjugierte Impuls erhalten ist.

2. Die Galilei-Transformation  $z' = z - Vt$  ( $V$  ist die Geschwindigkeit des Inertialsystems  $S'$  relativ zum Inertialsystem  $S$ ) ist nicht nur für das freie Teilchen, sondern auch für den Massenpunkt im homogenen Schwerfeld eine Symmetrietransformation. Die Lagrange-Funktion lautet, zunächst für eindimensionale Bewegung,

$$L(z, \dot{z}) = \frac{m}{2} \dot{z}^2 - mgz. \quad (5.132)$$

Es folgt ( $V$  spielt die Rolle von  $\alpha$ )

$$\begin{aligned} L'(z', \dot{z}', t, V) &= \frac{m}{2} \left[ \frac{d}{dt} (z' + Vt) \right]^2 - mg(z' + Vt) \\ &= \frac{m}{2} (\dot{z}' + V)^2 - mgz' - mgVt \\ &= \underbrace{\frac{m}{2} (\dot{z}')^2 - mgz'}_{= L(z', \dot{z}')} + \underbrace{mV\dot{z}' + \frac{m}{2} V^2 - mgVt}_{= \frac{d}{dt} (mVz' + \frac{m}{2} V^2 t - \frac{m}{2} gVt^2)} \\ &= L(z', \dot{z}') + \frac{d}{dt} F(z', t, V), \end{aligned} \quad (5.133)$$

wobei

$$F(z', t, V) = mV \left( z' + \frac{1}{2} Vt - \frac{1}{2} gt^2 \right). \quad (5.134)$$

Die Galilei-Transformation ist also eine kontinuierliche Symmetrietransformation mit dem Parameter  $V$ . Die zugehörige Erhaltungsgröße ist

$$\begin{aligned} J(z, \dot{z}, t) &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \frac{\partial z(z', t, V)}{\partial V} \Big|_{V=0} - \frac{\partial F(z', t, V)}{\partial V} \Big|_{V=0} \\ &= m\dot{z} \underbrace{- mz'}_{=-mz} \Big|_{V=0} - 0 + \frac{m}{2} gt^2 \\ &= -m \left( z - \dot{z}t - \frac{1}{2} gt^2 \right). \end{aligned} \quad (5.135)$$

Die Invarianz dieser Größe können wir am Beispiel mit den Anfangsbedingungen  $z(0) = 0$ ,  $\dot{z}(0) = 0$  überprüfen. In diesem Fall gilt

$$\dot{z} = -gt, \quad (5.136)$$

$$z = -\frac{1}{2} gt^2, \quad (5.137)$$

also

$$z - \dot{z}t - \frac{1}{2} gt^2 = -\frac{1}{2} gt^2 + gt^2 - \frac{1}{2} gt^2 = 0 = \text{const.} \quad (5.138)$$

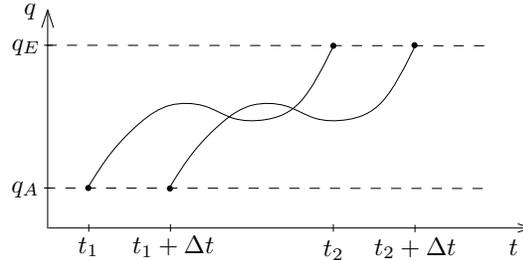
Der Spezialfall verschwindender Schwerkraft, also  $g = 0$ , ist auch interessant. In diesem Fall ist offenbar  $z - \dot{z}t$  erhalten. Natürlich gilt entsprechendes für die kartesischen Koordinaten  $x, y$ , insgesamt also  $\vec{r} - \dot{\vec{r}}t = \text{const} \equiv$

$\vec{r}(t = 0)$ . Das ist dasselbe wie Gl. (4.44); das Noether-Theorem liefert uns also auch die „zusätzlichen“ drei Erhaltungsgrößen aus dem Abschnitt 4.5 zu den zehn Erhaltungsgrößen für Mehrteilchensysteme. Die Erhaltung der Impuls- und Drehimpulsvektoren ergeben sich ebenfalls aus dem Noether-Theorem, wie wir gesehen haben. Zur Energieerhaltung kommen wir im nächsten Abschnitt.

Wir haben damit gezeigt, dass das 1. Newtonsche Axiom (kräftefreie Massenpunkte bewegen sich in Inertialsystemen gleichförmig und geradlinig) aus der Forderung der Galilei-Invarianz abgeleitet werden kann. Es ist also möglich, diese als Axiom der Mechanik an den Anfang zu stellen.

## 5.9 Homogenität in der Zeit und Energieerhaltung

Hängt die Lagrange-Funktion  $L$  nicht *explizit* von der Zeit ab,  $\partial L/\partial t = 0$ , so ergibt sich offenbar dieselbe Konfigurationsbahn für dieselbe Anfangs- und Endkonfiguration, unabhängig von der Anfangszeit.



$L$  ist invariant unter der Zeittransformation  $t \mapsto t + \Delta t$ . Das Noether-Theorem in der besprochenen Form ist hier nicht anwendbar, da es sich auf Transformationen der Koordinaten, nicht in der Zeit, bezieht. Wir zeigen nun, dass dennoch eine Erhaltungsgröße existiert, die Hamilton-Funktion genannt wird und mit der Gesamtenergie verwandt ist. Aus der Kettenregel

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_j \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) \quad (5.139)$$

folgt

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dL}{dt} - \sum_j \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right). \quad (5.140)$$

Der erste Term in der Klammer wird, mit der Lagrange-Gleichung,

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j = \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j. \quad (5.141)$$

Es folgt

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dL}{dt} - \frac{d}{dt} \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \left( L - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right). \quad (5.142)$$

Wir hatten in Abschnitt 5.4 den *generalisierten Impuls*  $p_j = \partial L/\partial \dot{q}_j$  definiert. Wir definieren außerdem die *Hamilton-Funktion*

$$H := \sum_j p_j \dot{q}_j - L. \quad (5.143)$$

Dann folgt

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left( L - \sum_j p_j \dot{q}_j \right) = -\frac{dH}{dt}, \quad (5.144)$$

also wenn  $\partial L/\partial t = 0$  gilt, dann ist

$$\frac{dH}{dt} = 0. \quad (5.145)$$

Es ist sehr wichtig zu beachten, dass hier eine *totale* Ableitung steht. Ihr Verschwinden bedeutet, dass  $H = \text{const}$  gilt. Dagegen bedeutet  $\partial L/\partial t = 0$  nur, dass  $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$  ist, d.h., dass  $L$  nicht *explizit* von  $t$  abhängt.  $dL/dt$  ist i.A. nicht Null. Als Beispiel können wir einen Massenpunkt im Schwerfeld betrachten, der zur Zeit  $t = 0$  in Ruhe startet. Es ist  $\partial L/\partial t = 0$  für alle  $t$ , da  $L = T - V$  nicht explizit von der Zeit abhängt. Für  $t > 0$  nimmt  $T$  monoton mit der Zeit zu,  $V$  dagegen ab. Die Differenz  $L = T - V$  nimmt also monoton mit der Zeit zu und es gilt  $dL/dt > 0$  für alle  $t > 0$ .

Was bedeutet  $H = \text{const}$  physikalisch? Damit die Lagrange-Gleichungen 2. Art überhaupt gelten, müssen

- alle Zwangsbedingungen holonom sein und
- zumindest ein verallgemeinertes Potential existieren.

Wir nehmen nun zusätzlich an, dass 1. alle Zwangsbedingungen holonom-*skleronom* und 2. alle Kräfte *konservativ* sind. Dann ist

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = \sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - T + V. \quad (5.146)$$

Für holonom-skleronome Zwangsbedingungen existieren generalisierte Koordinaten, für die die Transformation zwischen diesen und den kartesischen Koordinaten nicht explizit von der Zeit abhängt. Daher können wir schreiben

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_S) \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j. \quad (5.147)$$

Damit ist die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \sum_{j,k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \mu_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (5.148)$$

mit den verallgemeinerten Massen

$$\mu_{jk} := \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \mu_{kj}. \quad (5.149)$$

Diese hängen i.A. von den Koordinaten  $\vec{q}$  ab, sie können aber nicht explizit von der Zeit oder von den Geschwindigkeiten  $\dot{\vec{q}}$  abhängen, da die  $\vec{r}_i$  dies nicht tun. Damit ist  $T$  eine homogene Funktion 2. Grades der Geschwindigkeiten, vgl. die Herleitung des Virialsatzes. Es folgt

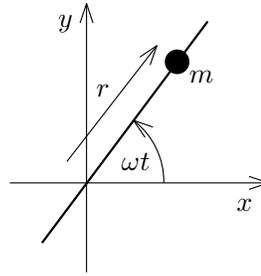
$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_l} \frac{1}{2} \sum_{j,k} \mu_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \mu_{jk} (\delta_{jl} \dot{q}_k + \dot{q}_j \delta_{kl}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_k (\mu_{lk} + \mu_{kl}) \dot{q}_k = \sum_k \mu_{kl} \dot{q}_k. \end{aligned} \quad (5.150)$$

Also ist

$$\begin{aligned} H &= \sum_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \dot{q}_l - T + V = \sum_{k,l} \mu_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l - T + V \\ &= 2T - T + V = T + V = E. \end{aligned} \quad (5.151)$$

In *diesem* Fall ist die Hamilton-Funktion also mit der Gesamtenergie identisch. Es gilt außerdem  $\partial T/\partial t = 0$  und  $\partial V/\partial t = 0$ , also  $\partial L/\partial t = 0$  und daher  $dH/dt = dE/dt = 0$ . Somit folgt *Energieerhaltung*. Gilt dagegen zwar  $\partial L/\partial t = 0$ , treten aber *rheonome* Zwangsbedingungen oder *nicht konservative* Kräfte auf, so ist zwar die Hamilton-Funktion  $H$  erhalten, sie ist aber nicht die Gesamtenergie.

Beispiel: Perle auf gleichförmig rotierendem Draht, siehe auch Abschnitt 5.4.



Die Zwangsbedingungen lauten  $z = 0$ ,  $y = x \tan \omega t$  (rheonom!). Die Lagrange-Funktion ist

$$L = T = \frac{m}{2} (\dot{q}^2 + q^2 \omega^2), \quad (5.152)$$

also  $\partial L / \partial t = 0$ . Es folgt  $H = p\dot{q} - L = \text{const}$ , wobei

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L = m\dot{q}^2 - \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{m}{2} q^2 \omega^2 = \frac{m}{2} (\dot{q}^2 - q^2 \omega^2). \quad (5.153)$$

Andererseits ist die Gesamtenergie

$$E = T = \frac{m}{2} (\dot{q}^2 + q^2 \omega^2) \neq H. \quad (5.154)$$

Die Gesamtenergie ist hier nicht mit der Hamilton-Funktion identisch, da eine der Zwangsbedingungen rheonom ist. In der Tat ist hier  $E = H + m q^2 \omega^2$  und die Hamilton-Funktion  $H$  ist erhalten, die Gesamtenergie  $E$  aber nicht. Die Energie ändert sich, weil die Zwangskräfte Arbeit leisten.

# Kapitel 6

## Lagrange-Mechanik II

Dieses Kapitel behandelt einige Verallgemeinerungen des Lagrange-Formalismus. Es geht insbesondere um die Lagrange-Mechanik in Anwesenheit von Reibungskräften und um nicht holonome Zwangsbedingungen.

### 6.1 Lagrange-Formalismus für Reibungskräfte

Wir hatten in Abschnitt 5.3 gesehen, dass für holonome Zwangsbedingungen und beliebige treibende Kräfte die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \equiv \sum_{i=1}^N \vec{K}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (6.1)$$

gelten.  $Q_j$  sind die generalisierten treibenden Kräfte und  $\vec{K}_i$  sind dieselben Kräfte in kartesischen Koordinaten. Wir teilen  $Q_j$  in einen von einem verallgemeinerten Potential  $U$  ableitbaren Anteil und einen Anteil aufgrund von Reibung auf:

$$Q_j = Q_j^{(U)} + Q_j^{(R)} \quad (6.2)$$

mit

$$Q_j^{(U)} = - \frac{\partial U}{\partial q_j}. \quad (6.3)$$

Wir definieren die Lagrange-Funktion durch

$$L := T - U. \quad (6.4)$$

Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{(R)} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{R}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \quad (6.5)$$

$\vec{R}_i$  ist die Reibungskraft auf Teilchen  $i$  in kartesischen Koordinaten. Sie muss als Reibungskraft der Geschwindigkeit  $\dot{\vec{r}}_i$  entgegen gerichtet sein. Wir nehmen nun an, dass nur zwei Arten von Reibungskräften vorliegen:

1. Reibung an im Laborsystem ruhenden Medien. Diese hat die Form

$$\vec{R}_i^{(1)} = -R_i^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots; |\dot{\vec{r}}_i|; t) \frac{\dot{\vec{r}}_i}{|\dot{\vec{r}}_i|}, \quad (6.6)$$

d.h. sie hängt nur vom Betrag der Geschwindigkeit des jeweiligen Massenpunktes im Laborsystem,  $\dot{\vec{r}}_i$ , ab und ist ihr entgegen gerichtet.

2. Reibung von Massenpunkten (bzw. Körpern) aneinander. Diese hat die Form

$$\vec{R}_i^{(2)} = - \sum_{j \neq i} R_{ij}^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots; |\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j|; t) \frac{\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j}{|\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j|}, \quad (6.7)$$

d.h. sie hängt nur vom Betrag der *Relativgeschwindigkeit* je zweier Massenpunkte ab und ist ihr entgegen gerichtet. Das 3. Newtonsche Axiom erfordert  $R_{ij}^{(2)} = R_{ji}^{(2)}$ .

Wir lassen zu, dass die Reibungskräfte außerdem von allen Teilchenorten und von der Zeit abhängen, da dies die Herleitung nicht erschwert.

In Abschnitt 3.7 hatten wir kugelsymmetrische Zentralkräfte besprochen. Die hier betrachteten Reibungskräfte sind damit verwandt, allerdings sind sie zentral und kugelsymmetrisch als Funktion der *Geschwindigkeit*, nicht des Ortes. Wir können dort entwickelte Ideen übertragen, wenn wir Orte durch Geschwindigkeiten ersetzen. Wir bezeichnen nun die Geschwindigkeiten mit

$$\vec{v}_i := \dot{\vec{r}}_i \quad \text{bzw.} \quad \vec{v}_{ij} := \dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j \equiv \vec{v}_i - \vec{v}_j \quad (6.8)$$

und unterdrücken in den Funktionen  $\vec{R}_i^{(1)}$ ,  $\vec{R}_{ij}^{(2)}$  alle Argumenten bis auf die Geschwindigkeit. Außerdem seien  $v_i = |\vec{v}_i|$  und  $v_{ij} = |\vec{v}_{ij}|$ . Wir definieren die Funktion

$$P := \sum_i \int_0^{v_i} dv'_i R_i^{(1)}(v'_i) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \int_0^{v_{ij}} dv'_{ij} R_{ij}^{(2)}(v'_{ij}). \quad (6.9)$$

Der negative Gradient von  $P$  bezüglich der Geschwindigkeit  $\vec{v}_k$  ist

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial \vec{v}_k} P &= - \sum_i \delta_{ik} R_k^{(1)}(v_k) \frac{\partial}{\partial v_k} v_k - \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} R_{ij}^{(2)}(v_{ij}) \frac{\partial}{\partial v_k} |\vec{v}_i - \vec{v}_j| \\ &= -R_k^{(1)}(v_k) \frac{\vec{v}_k}{|\vec{v}_k|} - \sum_{j \neq k} R_{kj}^{(2)}(|\vec{v}_k - \vec{v}_j|) \frac{\vec{v}_k - \vec{v}_j}{|\vec{v}_k - \vec{v}_j|} \\ &= \vec{R}_k^{(1)} + \vec{R}_k^{(2)} = \vec{R}_k. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Für die Ableitungen nach den *generalisierten* Geschwindigkeiten gilt

$$-\frac{\partial P}{\partial \dot{q}_j} = - \sum_k \frac{\partial P}{\partial \vec{v}_k} \cdot \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_j} = - \sum_k \frac{\partial P}{\partial \vec{v}_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}, \quad (6.11)$$

wobei wir Gl. (5.27) verwendet haben. Es folgt

$$-\frac{\partial P}{\partial \dot{q}_j} = \sum_k \vec{R}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = Q_j^{(R)}. \quad (6.12)$$

Somit sind auch in generalisierten Koordinaten die Reibungskräfte der betrachteten Form die negativen Ableitungen der Funktion  $P$  nach den Geschwindigkeiten („Geschwindigkeits-Gradient“).  $P$  heißt *Rayleighsche Dissipationsfunktion*. Es sei daran erinnert, dass diese und die Reibungskräfte auch von  $\vec{q}$  und  $t$  abhängen dürfen.

Schließlich erhalten wir die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_j} = 0. \quad (6.13)$$

Für Stokessche Reibung hat  $P$  eine besonders einfache Form: Es ist

$$\vec{R}_i = -\alpha \dot{\vec{r}}_i \quad \Rightarrow \quad R_i^{(1)} = \alpha v_i \quad (6.14)$$

und damit

$$P = \sum_{i=1}^N \int_0^{v_i} dv'_i \alpha v'_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \alpha v_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \alpha \dot{\vec{r}}_i^2. \quad (6.15)$$

Beachte die Analogie zum Hookeschen Gesetz und dem quadratischen Potential.

## 6.2 Die Lagrange-Gleichungen 1. Art

Eine Lagrange-Gleichung 2. Art lässt sich nur aufstellen, wenn alle Zwangsbedingungen holonom sind. Die hier zu besprechende Methode hat demgegenüber zwei Vorteile:

- sie ist auch für nicht holonome, differentielle Zwangsbedingungen anwendbar und
- sie gestattet die explizite Bestimmung der Zwangskräfte. Diese sind z.B. für die Auslegung von Maschinen wichtig.

Wir beschränken uns auf Systeme, bei denen die treibenden Kräfte aus einem verallgemeinerten Potential  $U$  abgeleitet werden können. Außerdem sollen alle  $k$  Zwangsbedingungen holonom oder differentiell sein.

Holonome Zwangsbedingungen lauten

$$f_\nu(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0, \quad (6.16)$$

woraus folgt

$$df_\nu = \frac{\partial f_\nu}{\partial \vec{r}_1} \cdot d\vec{r}_1 + \dots + \frac{\partial f_\nu}{\partial \vec{r}_N} \cdot d\vec{r}_N + \frac{\partial f_\nu}{\partial t} dt = 0. \quad (6.17)$$

Wir können holonome Zwangsbedingungen also genau wie differentielle schreiben,

$$\delta f_\nu = \vec{A}_{\nu 1} \cdot d\vec{r}_1 + \dots + \vec{A}_{\nu N} \cdot d\vec{r}_N + B_\nu dt = 0, \quad (6.18)$$

wobei  $\delta f_\nu$  für holonome Zwangsbedingungen ein totales Differential ist, wie wir schon in Abschnitt 5.1 gesehen hatten. Formale Division durch  $dt$  ergibt eine Bedingung für die Geschwindigkeiten.

Als nächstes verallgemeinern wir den Begriff der generalisierten Koordinaten, indem wir nur noch fordern, dass sie die Konfiguration eindeutig beschreiben, nicht mehr, dass sie unabhängig sind. In der Tat führen wir, obwohl einige Zwangsbedingungen möglicherweise holonom sind,  $3N$  generalisierte Koordinaten  $q_1, \dots, q_{3N}$  ein. Die Verrückungen  $\delta q_j$  sind aufgrund der  $k$  Zwangsbedingungen Glg. (6.18) nicht unabhängig. Gemäß Abschnitt 5.3 können wir das d'Alembertsche Prinzip

$$\sum_{i=1}^N (\vec{K}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (6.19)$$

umschreiben zu

$$\sum_{j=1}^{3N} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0. \quad (6.20)$$

Da ein verallgemeinertes Potential existieren soll, können wir auch schreiben

$$\sum_{j=1}^{3N} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0. \quad (6.21)$$

Dieselbe Gleichung erhalten wir natürlich auch aus dem Hamiltonschen Prinzip. Nun sind die  $\delta q_j$  jedoch nicht mehr unabhängig. Daher können wir jetzt nicht mehr folgern, dass der Ausdruck

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \quad (6.22)$$

für alle  $j$  verschwindet.

Welche Variationen der Konfigurationsbahn  $q_1(t), \dots, q_{3N}(t)$  sind nun erlaubt? Die virtuellen Verrückungen müssen die Zwangsbedingungen erfüllen. Die Zwangsbedingungen für die generalisierten Koordinaten  $q_j$  können wir aus den Zwangsbedingungen für die kartesischen Koordinaten ermitteln:

$$0 = \delta f_\nu = \sum_{i=1}^N \vec{A}_{\nu i} \cdot d\vec{r}_i + B_\nu dt$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{3N} \vec{A}_{\nu i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j + \sum_{i=1}^N \vec{A}_{\nu i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt + B_\nu dt \\
&=: \sum_{j=1}^{3N} a_{\nu j} dq_j + b_\nu dt,
\end{aligned} \tag{6.23}$$

also

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{\nu j} dq_j + b_\nu dt = 0 \quad \text{für } \nu = 1, \dots, k. \tag{6.24}$$

Bei virtuellen Verrückungen wird die Zeit aber festgehalten, so dass die Verrückungen die  $k$  Bedingungen

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{\nu j} \delta q_j = 0 \quad \forall t \tag{6.25}$$

erfüllen müssen.

Wir verwenden die Methode der *Lagrange-Multiplikatoren*, um das d'Alembertsche Prinzip unter diesen Nebenbedingungen auszuwerten. Dazu führen wir zunächst  $k$  Größen  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  ein, genannt Lagrange-Multiplikatoren. Es gilt natürlich

$$\lambda_\nu \sum_{j=1}^{3N} a_{\nu j} \delta q_j = 0 \quad \text{für } \nu = 1, \dots, k \tag{6.26}$$

$$\Rightarrow \sum_{\nu=1}^k \sum_{j=1}^{3N} \lambda_\nu a_{\nu j} \delta q_j = 0. \tag{6.27}$$

Wir subtrahieren diese Gleichung vom d'Alembertschen Prinzip, Gl. (6.21),

$$\sum_{j=1}^{3N} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{\nu=1}^k \lambda_\nu a_{\nu j} \right) \delta q_j = 0. \tag{6.28}$$

Unter den  $\delta q_j$  hängen  $k$  von den übrigen  $3N - k$  ab. Das gilt wegen Gl. (6.25) auch für differentielle nicht-holonome Zwangsbedingungen ( $k$  Verrückungen sind abhängig, aber i.A. nicht  $k$  Koordinaten). Wir wählen o.B.d.A. die ersten  $3N - k$  Verrückungen als unabhängig und spalten die Summe über  $j$  auf:

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{\nu=1}^k \lambda_\nu a_{\nu j} \right) \delta q_j + \sum_{j=3N-k+1}^{3N} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{\nu=1}^k \lambda_\nu a_{\nu j} \right) \delta q_j = 0. \tag{6.29}$$

Nun wählen wir die  $k$  Multiplikatoren  $\lambda_\nu$  so, dass die  $k$  linearen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{\nu=1}^k \lambda_\nu a_{\nu j} = 0, \quad j = 3N - k + 1, \dots, 3N \tag{6.30}$$

erfüllt sind. Dann folgt aus Gl. (6.29), dass gilt

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{\nu=1}^k \lambda_\nu a_{\nu j} \right) \delta q_j = 0. \tag{6.31}$$

Hierin sind die  $3N - k$  Verrückungen  $\delta q_j$ ,  $j = 1, \dots, 3N - k$ , aber nun unabhängig. Es folgt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{\nu=1}^k \lambda_\nu a_{\nu j} = 0 \tag{6.32}$$

für  $j = 1, \dots, 3N - k$ . Für  $j = 3N - k + 1, \dots, 3N$  verschwindet der Ausdruck aber auch – so haben wir die  $\lambda_\nu$  gewählt. Also gilt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{\nu=1}^k \lambda_\nu a_{\nu j} \quad \text{für alle } j = 1, \dots, 3N. \quad (6.33)$$

Dies sind die *Lagrange-Gleichungen 1. Art*.

Um nun die Zwangskräfte zu bestimmen, betrachten wir *dieselbe* Situation auf eine andere Weise: Wir behandeln die Zwangskräfte wie ganz normale Kräfte und lassen zugleich die Zwangsbedingungen fallen. Die Bewegung des Systems ist dann natürlich dieselbe – so sind die Zwangskräfte ja gerade definiert. Dass wir die Zwangskräfte noch nicht kennen, stört uns dabei nicht, wir sind es in der Physik gewohnt, Gleichungen für noch unbekannte Größen aufzustellen.

Die generalisierten Kräfte bestehen nun also aus den treibenden Kräften  $Q_j^{(U)}$  und den explizit berücksichtigten Zwangskräften  $Q_j^{(Z)}$ , wir schreiben

$$Q_j = Q_j^{(U)} + Q_j^{(Z)}. \quad (6.34)$$

Wir nehmen an, dass die treibenden Kräfte von einem generalisierten Potential  $U$  ableitbar sind,  $Q_j^{(U)} = -\partial U / \partial q_j$ . Für die Zwangskräfte gibt es dagegen keinen Grund, weshalb dies möglich sein sollte. Wir behandeln die Zwangskräfte daher analog zu den Reibungskräften in Abschnitt 6.1 und erhalten die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{(Z)}, \quad (6.35)$$

$j = 1, \dots, 3N$ . Der Vergleich mit Gl. (6.33) zeigt, dass die generalisierten Zwangskräfte durch

$$Q_j^{(Z)} = \sum_{\nu=1}^k \lambda_\nu a_{\nu j} \quad (6.36)$$

gegeben sind, also durch die rechten Seiten der Lagrange-Gleichungen 1. Art.

In der praktischen Anwendung müssen wir die  $3N + k$  Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{\nu=1}^k \lambda_\nu a_{\nu j}, \quad j = 1, \dots, 3N \quad (6.37)$$

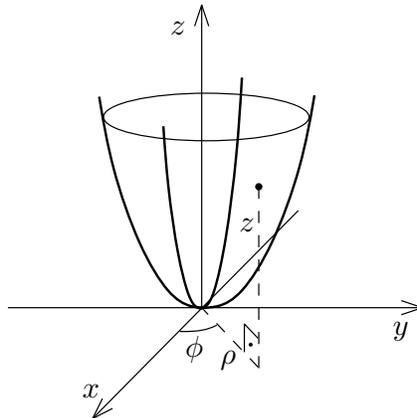
und

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{\nu j} dq_j + b_\nu dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{3N} a_{\nu j} \dot{q}_j + b_\nu = 0, \quad \nu = 1, \dots, k \quad (6.38)$$

für die  $3N + k$  unbekanntenen Funktionen  $q_j(t)$  und  $\lambda_\nu(t)$  lösen.

Manchmal besteht die Aufgabe nur darin, die Bewegungsgleichungen aufzustellen. In diesem Fall müssen die  $k$  Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_\nu$  aus dem Gleichungssystem eliminiert werden, um  $3N$  Gleichungen für die  $3N$  Koordinaten zu erhalten. Die Bestimmung der  $\lambda_\nu$  ist dann nicht erforderlich.

Beispiel: Massenpunkt auf Paraboloid im Schwerfeld.



Die (in diesem Fall holonome) Zwangsbedingung lautet, mit einer Konstanten  $k$ ,

$$z = k\rho^2 \quad \Rightarrow \quad k\rho^2 - z = 0 \quad (6.39)$$

und in differentieller Form

$$2k\rho d\rho - dz = 0. \quad (6.40)$$

Vergleich mit  $a_\rho d\rho + a_\phi d\phi + a_z dz + b dt = 0$  ergibt die Koeffizienten

$$a_\rho = 2k\rho, \quad a_\phi = 0, \quad a_z = -1, \quad b = 0. \quad (6.41)$$

Die Lagrange-Funktion, ausgedrückt durch alle drei Zylinderkoordinaten, lautet

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - mgz. \quad (6.42)$$

Die Lagrange-Gleichungen 1. Art lauten dann mit dem *einen* Lagrange-Multiplikator  $\lambda$ ,

$$m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\phi}^2 = 2k\rho\lambda = Q_\rho^{(Z)}, \quad (6.43)$$

$$2m\rho\dot{\rho}\dot{\phi} + m\rho^2\ddot{\phi} = 0 = Q_\phi^{(Z)}, \quad (6.44)$$

$$m\ddot{z} + mg = -\lambda = Q_z^{(Z)}. \quad (6.45)$$

Mit Hilfe der Zwangsbedingung können wir z.B.  $z$  eliminieren. Die dritte Gleichung lautet dann

$$2mk\dot{\rho}^2 + 2mk\rho\ddot{\rho} + mg = -\lambda. \quad (6.46)$$

Elimination von  $\lambda$  ergibt zwei Bewegungsgleichungen für  $\rho$  und  $\phi$ :

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2 + 4k^2\rho\dot{\rho}^2 + 4k^2\rho^2\ddot{\rho} + 2kg\rho = 0, \quad (6.47)$$

$$2\rho\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho^2\ddot{\phi} = 0. \quad (6.48)$$

Auf diese Gleichungen kommt man in diesem Beispiel einfacher mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen 2. Art. Die Berechnung der Bahnen erfordert die Lösung dieses recht komplizierten Gleichungssystems. Die Zwangskraft erhalten wir aber direkt, ohne Lösung der Bewegungsgleichungen, indem wir  $\lambda$  durch die unabhängigen Koordinaten und Geschwindigkeiten ausdrücken (eine Kraft darf nicht explizit von Beschleunigungen abhängen):

$$\begin{aligned} \lambda &= -2mk\dot{\rho}^2 - 2mk\rho\ddot{\rho} - mg \\ &= -2mk\dot{\rho}^2 - 2mk\rho \left( \frac{2k\rho\lambda}{m} + \rho\dot{\phi}^2 \right) - mg \end{aligned} \quad (6.49)$$

$$\Rightarrow (1 + 4k^2\rho^2)\lambda = -2mk\dot{\rho}^2 - 2mk\rho^2\dot{\phi}^2 - mg \quad (6.50)$$

$$\Rightarrow \lambda = -m \frac{2k\dot{\rho}^2 + 2k\rho^2\dot{\phi}^2 + g}{1 + 4k^2\rho^2}. \quad (6.51)$$

Damit werden die Komponenten der Zwangskraft

$$Q_\rho^{(Z)} = 2k\rho\lambda = -2km\rho \frac{2k\dot{\rho}^2 + 2k\rho^2\dot{\phi}^2 + g}{1 + 4k^2\rho^2}, \quad (6.52)$$

$$Q_\phi^{(Z)} = 0, \quad (6.53)$$

$$Q_z^{(Z)} = -\lambda = m \frac{2k\dot{\rho}^2 + 2k\rho^2\dot{\phi}^2 + g}{1 + 4k^2\rho^2}. \quad (6.54)$$

Als Probe können wir uns überzeugen, dass für  $k = 0$  (das Paraboloid wird zur  $xy$ -Ebene) die Zwangskraft einfach  $mg\hat{z}$  ist und damit genau die Schwerkraft kompensiert.

# Kapitel 7

## Das Zentralkraftfeld

Als erste Anwendung des Lagrange-Formalismus betrachten wir erneut Zentralkräfte und insbesondere die Planetenbewegung. Für Zwei-Teilchen-Systeme gehen wir wie in Abschnitt 4.7 besprochen zu Schwerpunkt- und Relativkoordinaten über und betrachten von nun an nur die Letzteren. Für verschwindende äußere Kräfte gilt dann

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12} \quad (7.1)$$

mit der reduzierten Masse  $\mu$  und dem Relativvektor  $\vec{r}$ . In diesem Kapitel bezeichnen wir diese Masse mit  $m$  und die Kraft von Massenpunkt 2 auf Massenpunkt 1 mit  $\vec{F}$ . Wir nehmen an, dass diese Kraft nur von  $\vec{r}$  abhängt. Wir erhalten dann ein effektives Ein-Teilchen-Problem,

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}). \quad (7.2)$$

Nun soll  $\vec{F}$  eine Zentralkraft und zusätzlich konservativ sein, also existiert ein nur vom Abstand abhängiges (Zentral-) Potential  $V(r)$  mit

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V. \quad (7.3)$$

Nach dem Noether-Theorem ist der Drehimpuls  $\vec{L} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}}$  dann erhalten und die Bahn daher eben. Wir wählen ein Koordinatensystem so, dass die Bahn in der  $xy$ -Ebene liegt und  $L_z \equiv \vec{L} \cdot \hat{z} \geq 0$  gilt und führen ebene Polarkoordinaten  $r, \phi$  als dem Problem angemessene generalisierte Koordinaten ein. Die Lagrange-Funktion lautet dann

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r) \quad (7.4)$$

(wir bezeichnen die Lagrange-Funktion hier mit dem Symbol  $\mathcal{L}$ , um Verwechslungen mit dem Drehimpuls zu vermeiden).

## 7.1 Planetenbewegung und Keplersche Gesetze

### 7.1.1 Drehimpulserhaltung und Flächensatz

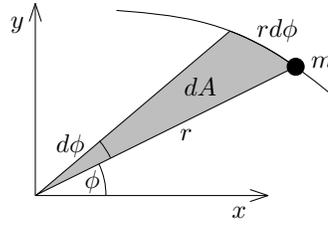
Wir sehen sofort, dass die Koordinate  $\phi$  zyklisch ist. Daher ist

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} = \text{const.} \quad (7.5)$$

Das ist gerade die  $z$ -Komponente (also die einzige von Null verschiedene Komponente) des Drehimpulses,

$$p_\phi = L_z = L. \quad (7.6)$$

Aus der Drehimpulserhaltung folgt das 2. Keplersche Gesetz. Um es zu formulieren, definieren wir den *Fahrstrahl* als die Strecke  $0\vec{r}$  vom Ursprungspunkt zum Punkt  $\vec{r}$ .



Die bei einer infinitesimalen Änderung  $d\phi$  des Polarwinkels  $\phi$  vom Fahrstrahl überstrichene Fläche sei  $dA$ . Es gilt

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\phi \quad (7.7)$$

(Kreissektor!). Die pro Zeiteinheit überstrichene Fläche ist dann

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{2m} = \frac{L}{2m} = \text{const.} \quad (7.8)$$

Das können wir integrieren und finden für die während eines beliebigen Zeitintervalls  $\Delta t$  überstrichene Fläche

$$\Delta A = \frac{L}{2m} \Delta t. \quad (7.9)$$

Dies ist das 2. *Keplersche Gesetz* (Flächensatz): Der Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. Es gilt für jede Zentralkraft, nicht nur für die Gravitationskraft. Die Zentralkraft muss nicht einmal konservativ sein.

### 7.1.2 Energieerhaltung und Form der Bahn

Von nun an soll die Zentralkraft jedoch konservativ sein. Außerdem enthält das System keine Zwangsbedingungen und es gilt  $\partial\mathcal{L}/\partial t = 0$ . Daher ist  $dH/dt = dE/dt = 0$ , also

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2 \dot{\phi}^2 + V(r) = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = \text{const.} \quad (7.10)$$

Die Radialgeschwindigkeit ergibt sich durch Auflösen nach  $\dot{r}$  zu

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left[ E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r) \right]}. \quad (7.11)$$

Außerdem haben wir für die Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2}. \quad (7.12)$$

Durch Bildung des Quotienten folgt aus diesen beiden Gleichungen

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{d\phi}{dt}} = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}} = \pm \frac{mr^2}{L} \sqrt{\frac{2}{m} \left[ E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r) \right]} = \pm \frac{\sqrt{2mr^2}}{L} \sqrt{E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r)}. \quad (7.13)$$

Das ist nun eine Differentialgleichung für die *geometrische* Form der Bahn – die Zeit haben wir eliminiert. Wir können sie durch Trennung der Variablen lösen:

$$\frac{dr}{r^2 \sqrt{E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r)}} = \pm \frac{\sqrt{2m}}{L} d\phi, \quad (7.14)$$

also

$$\int_{r_0}^r \frac{dr'}{(r')^2 \sqrt{E - \frac{L^2}{2m(r')^2} - V(r')}} = \pm \frac{\sqrt{2m}}{L} \phi \quad (7.15)$$

mit  $r(\phi = 0) = r_0$ . Für die explizite Berechnung des Integrals müssen wir eine konkrete Form für  $V(r)$  annehmen. Für das Gravitations- oder Coulomb-Potential schreiben wir

$$V(r) = \frac{\alpha}{r}, \quad (7.16)$$

wobei  $\alpha$  für das Gravitationspotential immer negativ (anziehend) ist und für das Coulomb-Potential positiv oder negativ sein kann. Dann gilt

$$\phi = \pm \frac{L}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{(r')^2 \sqrt{E - \frac{L^2}{2m(r')^2} - \frac{\alpha}{r'}}} = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr'}{(r')^2 \sqrt{\frac{2mE}{L^2} - \frac{1}{(r')^2} - \frac{2m\alpha}{L^2 r'}}}. \quad (7.17)$$

Mit der Substitution  $u = 1/r'$ ,  $du = -dr'/(r')^2$ , erhalten wir

$$\begin{aligned} \phi &= \mp \int_{1/r_0}^{1/r} \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} - u^2 - \frac{2m\alpha}{L^2} u}} \\ &= \mp \arccos \frac{1 + \frac{L^2}{m\alpha r}}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}} \pm \arccos \frac{1 + \frac{L^2}{m\alpha r_0}}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}}, \\ &= +\text{const} =: \begin{cases} \phi_0 & \text{für } \alpha > 0, \\ \phi_0 - \pi & \text{für } \alpha < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (7.18)$$

wobei wir die Konstante  $\phi_0$  in einer Art definiert haben, die gleich nützlich sein wird. Es folgt

$$\frac{1}{r} = \frac{m\alpha}{L^2} \left[ -1 + \text{sgn } \alpha \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \cos(\phi - \phi_0) \right]. \quad (7.19)$$

Wir definieren zur Abkürzung die Konstanten

$$k := \frac{L^2}{m|\alpha|} \quad \text{und} \quad \epsilon := \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}. \quad (7.20)$$

Dann folgt

$$\frac{1}{r} = \begin{cases} \frac{1}{k} [-1 + \epsilon \cos(\phi - \phi_0)] & \text{für } \alpha > 0, \\ \frac{1}{k} [1 + \epsilon \cos(\phi - \phi_0)] & \text{für } \alpha < 0. \end{cases} \quad (7.21)$$

Dies sind Gleichungen für *Kegelschnitte*, bei denen jeweils ein Brennpunkt am Nullpunkt  $\vec{r} = 0$  liegt:

	abstoßende Kraft, $\alpha > 0$		anziehende Kraft, $\alpha < 0$
gebundene Bewegung, $E < 0$	$\epsilon = 0$	–	Kreise
	$0 < \epsilon < 1$	–	Ellipsen
ungebundene Bewegung, $E > 0$	$\epsilon = 1$	–	Parabeln
	$\epsilon > 1$	Hyperbeln	Hyperbeln

Hier heißen  $k$  *Parameter* und  $\epsilon$  *Exzentrizität* der Bahn. Für  $\alpha < 0$  und  $E < 0$ , also  $\epsilon < 1$ , erhalten wir das *1. Keplersche Gesetz*: Die Planeten laufen auf Ellipsenbahnen um (einschließlich des Grenzfalles von Kreisbahnen für  $\epsilon = 0$ ).

### 7.1.3 Das 3. Keplersche Gesetz

Für Ellipsen- oder Kreisbahnen erhalten wir aus der Summe des Aphels (des größten Abstandes) und des Perihels (des kleinsten Abstandes) die große Halbachse der Bahn:

$$2a = \frac{k}{1-\epsilon} + \frac{k}{1+\epsilon} = \frac{k(1+\epsilon+1-\epsilon)}{(1-\epsilon)(1+\epsilon)} = \frac{2k}{1-\epsilon^2}. \quad (7.22)$$

Die große Halbachse ist also durch die rein geometrische Beziehung

$$a = \frac{k}{1-\epsilon^2} \quad (7.23)$$

gegeben. Es folgt (mit  $\alpha < 0$ , wie für Ellipsen- und Kreisbahnen notwendig)

$$a = \frac{-\frac{L^2}{m\alpha}}{1 - \left(1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}\right)} = \frac{\alpha}{2E} \quad (7.24)$$

$$\Rightarrow E = \frac{\alpha}{2a} < 0. \quad (7.25)$$

Aus dem Virialsatz erhalten wir dann übrigens

$$\langle V \rangle = -2\langle T \rangle = 2E = \frac{\alpha}{a}. \quad (7.26)$$

Hier ist  $T$  die kinetische Energie. Mit  $V(r) = \alpha/r$  ist der mittlere inverse Abstand daher  $\langle 1/r \rangle = 1/a$ . Daraus kann man natürlich nicht schließen, dass der mittlere Abstand  $a$  sei!

Die Fläche einer Ellipse beträgt

$$A = \pi a^2 \sqrt{1-\epsilon^2} = \pi a^2 \sqrt{-\frac{2EL^2}{m\alpha^2}} = \pi a^2 \sqrt{-\frac{2L^2}{m\alpha^2} \frac{\alpha}{2a}} = \frac{\pi L}{\sqrt{-m\alpha}} a^{3/2}. \quad (7.27)$$

Nun hatten wir oben gesehen, dass der Fahrstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht (2. Keplersches Gesetz). In der *Umlaufzeit*  $T$  muss er offenbar die Gesamtfläche der Ellipse überstreichen:

$$\Delta A = \frac{L}{2m} \Delta t \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\pi L}{\sqrt{-m\alpha}} a^{3/2} = \frac{L}{2m} T. \quad (7.28)$$

Es folgt

$$-\frac{\pi^2 \mathcal{L}^2}{m\alpha} a^3 = \frac{\mathcal{L}^2}{4m^2} T^2 \quad (7.29)$$

$$\Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = -\frac{4\pi^2 m}{\alpha}. \quad (7.30)$$

Hierin ist  $m$  die *reduzierte* Masse

$$m = \frac{1}{\frac{1}{m_\odot} + \frac{1}{m_P}} = \frac{m_\odot m_P}{m_\odot + m_P} \quad (7.31)$$

( $m_\odot$  ist hier beispielhaft die Sonnenmasse,  $m_P$  die Planetenmasse) und  $\alpha$  ist für das Gravitationspotential

$$\alpha = -\gamma m_\odot m_P. \quad (7.32)$$

Also folgt

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma(m_\odot + m_P)}, \quad (7.33)$$

was von der Planetenmasse abhängt. Es ist aber  $m_\odot \gg m_P$  und daher in guter Näherung

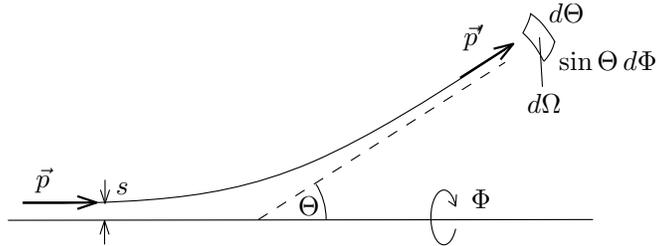
$$\frac{T^2}{a^3} \approx \frac{4\pi^2}{\gamma m_\odot} = \text{const.} \quad (7.34)$$

Das ist das *3. Keplersche Gesetz*: Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen. Es folgt aus den ersten beiden Gesetzen.

## 7.2 Streuung an Zentralpotentialen

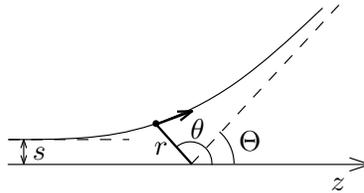
In der Physik gewinnt man wichtige Informationen aus Streuexperimenten: Man schießt eine große Anzahl von Probeteilchen auf ein Ziel (Streuer) oder eine große Anzahl gleichartiger Streuer und misst die Verteilungsfunktion der Richtungen (und manchmal der Energien) der gestreuten, auslaufenden Teilchen. Daraus kann man bei genauer Kenntnis der Probeteilchen etwas über deren Wechselwirkung mit dem Streuer lernen. Solche Experimente erfordern oft eine quantenmechanische Beschreibung. Diese lässt sich jedoch kaum verstehen, ohne zuvor die klassische Streutheorie studiert zu haben, was wir hier tun wollen. Wir gehen davon aus, dass wir wie in Abschnitt 4.7 bereits Schwerpunkt- und Relativkoordinaten eingeführt haben. Für die Relativkoordinaten beschränken wir uns der Einfachheit halber auf die elastische Streuung an einem Zentralpotential.

Unsere Aufgabenstellung ist folgende: Ein Teilchenstrahl bestehe aus gleichen Teilchen mit identischen einlaufenden Impulsen  $\vec{p}$ . Die *Intensität*  $I$  – d.h. die Zahl der Teilchen pro Zeiteinheit und pro Flächeneinheit, die eine Querschnittsfläche senkrecht zu  $\vec{p}$  durchfliegen – sei räumlich konstant. Wie groß ist die Anzahl  $dN(\Phi, \Theta)$  der pro Zeiteinheit in ein Raumwinkelement  $d\Omega = \sin \Theta d\Theta d\Phi$  gestreuten Teilchen?



Der *Streuwinkel*  $\Theta$  ist der Winkel, um den sich die Richtung des Impulses ändert. Der *Azimutalwinkel*  $\Phi$  beschreibt die Drehung der von  $\vec{p}$  und  $\vec{p}'$  aufgespannten Streuebene gegenüber einer festen Referenzebene, die  $\vec{p}$  enthält. Für ein Zentralpotential hängt  $dN$  aufgrund der Rotationsymmetrie des Systems gar nicht von  $\Phi$  ab. Wir können uns deshalb auf die Betrachtung einer Ebene beschränken.

In dieser Streuebene legen der Betrag des einlaufenden Impulses,  $p = |\vec{p}|$ , und der *Stoßparameter*  $s$  (siehe Skizze) die Teilchenbahn eindeutig fest. Damit ist  $\Theta = \Theta(s, p)$  eine Funktion von  $s$  und  $p$ , die wir im Prinzip aus dem Zentralpotential  $V(r)$  bestimmen können.



Wir verwenden Kugelkoordinaten mit der  $z$ -Achse parallel zu  $\vec{p}$ . Dann folgt aus der Energie- und Drehimpulserhaltung, vgl. Glg. (7.11) und (7.12),

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left[ E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r) \right]}, \quad (7.35)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{L}{mr^2} \quad (7.36)$$

(für die hier verwendeten Konventionen ist  $\dot{\theta} < 0$ ) und außerdem

$$\dot{\phi} = 0. \quad (7.37)$$

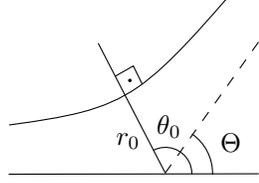
Aus der letzten Gleichung folgt offensichtlich  $\phi = \text{const} = \Phi$  – die Bahn ist eben. Aus den ersten beiden Gleichungen folgt

$$\frac{dr}{d\theta} = \mp \frac{\sqrt{2mr^2}}{L} \sqrt{E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r)} \quad (7.38)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & \mp \frac{L}{\sqrt{2m}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r)}} = d\theta \\
\Rightarrow & \mp \frac{L}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{(r')^2 \sqrt{E - \frac{L^2}{2m(r')^2} - V(r')}} = \theta - \theta_0.
\end{aligned} \tag{7.39}$$

Nun wählen wir  $r_0$  als kürzesten Abstand des Teilchens vom Streuzentrum (Perihel der Bahn) und  $\theta_0$  entsprechend als Polarwinkel des Perihels. Da die Bewegungsgleichung invariant unter Zeitumkehr  $t \rightarrow -t$  ist, kann die Bahn ebenso gut in umgekehrter Richtung durchlaufen werden und ist daher spiegelsymmetrisch zur Geraden durch Streuzentrum und Perihel. Daher gilt (siehe Skizze)

$$2(\theta_0 - \Theta) + \Theta = \pi. \tag{7.40}$$



Es folgt

$$\theta_0 = \frac{\Theta}{2} + \frac{\pi}{2}. \tag{7.41}$$

Für den einlaufenden Ast ( $\dot{r} < 0$ ) gilt

$$\theta - \frac{\Theta}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{L}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{(r')^2 \sqrt{E - \frac{L^2}{2m(r')^2} - V(r')}} \tag{7.42}$$

und für  $r \rightarrow \infty$ , mit  $\theta \rightarrow \pi$ ,

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\Theta}{2} = \frac{L}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr'}{(r')^2 \sqrt{E - \frac{L^2}{2m(r')^2} - V(r')}}. \tag{7.43}$$

Analog gilt für den auslaufenden Ast ( $\dot{r} > 0$ ) im Grenzfall  $r \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{\Theta}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{L}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr'}{(r')^2 \sqrt{E - \frac{L^2}{2m(r')^2} - V(r')}}. \tag{7.44}$$

Der Drehimpuls ist

$$L = |\vec{r} \times \vec{p}| = sp = \text{const} \tag{7.45}$$

und die Energie lautet

$$E = \frac{p^2}{2m} = \text{const}. \tag{7.46}$$

Wir erhalten

$$\Theta = \pi - \frac{2sp}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr'}{(r')^2 \sqrt{\frac{p^2}{2m} - \frac{s^2 p^2}{2m(r')^2} - V(r')}} = \pi - 2sp \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr'}{(r')^2 \sqrt{p^2 \left(1 - \frac{s^2}{(r')^2}\right) - 2mV(r')}}. \tag{7.47}$$

Mit der Substitution  $u = s/r'$  wird dies zu

$$\Theta = \pi - 2p \int_0^{s/r_0} \frac{du}{\sqrt{p^2(1-u^2) - 2mV(s/u)}} = \pi - 2 \int_0^{s/r_0} \frac{du}{\sqrt{1-u^2 - \frac{V(s/u)}{E}}}. \tag{7.48}$$

Der kürzeste Abstand  $r_0$  ist bestimmt durch  $\dot{r} = 0$ , mit Gl. (7.35) also durch

$$E - \frac{L^2}{2mr_0^2} - V(r_0) = E \left( 1 - \frac{s^2}{r_0^2} \right) - V(r_0) = 0. \quad (7.49)$$

Diese Beziehungen ergeben den Streuwinkel  $\Theta$  als Funktion des Stoßparameters  $s$  und der Energie  $E = p^2/2m$ .

Beispiel: *Rutherford-Streuung*. Für das Coulomb-Potential  $V(r) = \alpha/r$  mit  $\alpha > 0$  ergibt sich

$$E \left( 1 - \frac{s^2}{r_0^2} \right) - \frac{\alpha}{r_0} = 0 \quad (7.50)$$

$$\Rightarrow \left( \frac{r_0}{s} \right)^2 - \frac{\alpha}{Es} - 1 = 0 \quad (7.51)$$

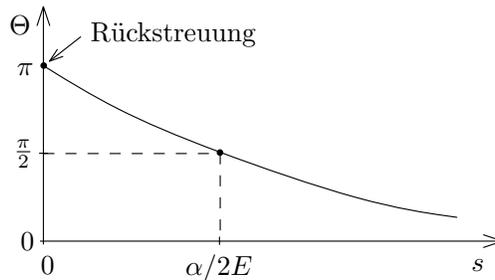
$$\Rightarrow \frac{r_0}{s} = \frac{\alpha}{2Es} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4E^2 s^2}{\alpha^2}} \right), \quad (7.52)$$

wobei wir die Lösung  $r_0 > 0$  ausgewählt haben. Mit der Abkürzung  $\tilde{E} := 2Es/\alpha$  erhalten wir

$$\frac{r_0}{s} = \frac{1 + \sqrt{1 + \tilde{E}^2}}{\tilde{E}}. \quad (7.53)$$

Der Streuwinkel beträgt

$$\begin{aligned} \Theta &= \pi - 2 \int_0^{s/r_0} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2 - \frac{\alpha}{Es}u}} \\ &= \pi - 2 \arcsin \frac{2u + \frac{\alpha}{Es}}{\sqrt{4 + \frac{\alpha^2}{E^2 s^2}}} \Bigg|_0^{s/r_0} = \pi - 2 \arcsin \frac{\tilde{E}u + 1}{\sqrt{1 + \tilde{E}^2}} \Bigg|_0^{s/r_0} \\ &= \pi - 2 \left( \underbrace{\arcsin 1}_{=\pi/2} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{E}^2}} \right) = 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4E^2 s^2}{\alpha^2}}}. \end{aligned} \quad (7.54)$$



Wir sehen, dass der Streuwinkel  $\Theta$  wegen der Langreichweitigkeit der Wechselwirkung nur langsam, nämlich wie  $1/s$ , mit dem Stoßparameter  $s$  abfällt. Derselbe Verlauf ergibt sich offenbar für den Streuwinkel  $\Theta$  als Funktion der Energie  $E$  für festes  $s$ .

Im Folgenden benötigen wir die Umkehrung der Funktion  $\Theta(s)$ :

$$\sin \frac{\Theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4E^2 s^2}{\alpha^2}}} \quad (7.55)$$

$$\Rightarrow s = \frac{\alpha}{2E} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \frac{\Theta}{2}} - 1} = \frac{\alpha}{2E} \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\Theta}{2}}{\sin^2 \frac{\Theta}{2}}} = \frac{\alpha}{2E} \cot \frac{\Theta}{2} \quad \left( 0 < \frac{\Theta}{2} < \frac{\pi}{2} \right). \quad (7.56)$$

Der Graph von  $s(\Theta)$  ergibt sich aus dem skizzierten Graphen von  $\Theta(s)$  durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden.

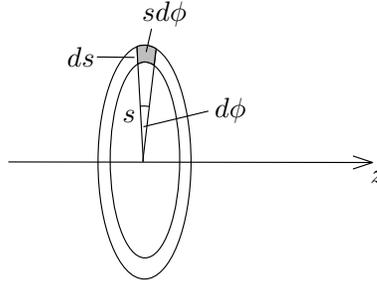
### 7.2.1 Der Wirkungsquerschnitt

Wir wollen die Verteilung  $dN(\Phi, \Theta) = dN(\Theta)$  der Winkel der auslaufenden Teilchen bestimmen. Wir kennen die Verteilung  $dN_0$  der Stoßparameter  $s$  und Winkel  $\phi$  der einlaufenden Teilchen. In kartesischen Koordinaten in der Ebene senkrecht zu  $\vec{p}$  gilt mit der Intensität  $I$ ,

$$dN_0 = I dx dy \quad (7.57)$$

und in Polarkoordinaten, für einen Ring infinitesimaler Fläche,

$$dN_0 = I s d\phi ds. \quad (7.58)$$



Ein Teilchen mit Stoßparameter  $s$  fliegt unter dem Streuwinkel  $\Theta(s)$  heraus und es gilt  $\phi = \Phi$ . Da keine Teilchen erzeugt oder vernichtet werden, folgt

$$dN(\Phi, \Theta) = dN_0(s, \phi = \Phi) = I s d\Phi ds. \quad (7.59)$$

Mit  $s = s(\Theta)$  können wir schreiben

$$ds = \left| \frac{ds}{d\Theta} \right| d\Theta; \quad (7.60)$$

wir wollen sowohl  $ds$  als auch  $d\Theta$  positiv wählen. Da i.A.  $ds/d\Theta < 0$  ist, setzen wir den Betrag ein. Es folgt

$$dN(\Phi, \Theta) = I s(\Theta) \left| \frac{ds}{d\Theta} \right| d\Phi d\Theta. \quad (7.61)$$

Dieser Ausdruck ist explizit proportional zur Intensität des einlaufenden Teilchenstrahls. Um eine Größe zu erhalten, die nicht von dieser Eigenschaft des Experiments abhängt, sondern nur von Eigenschaften des Streuers, definieren wir den *differentiellen Wirkungsquerschnitt*

$$d\sigma(\Phi, \Theta) := \frac{dN(\Phi, \Theta)}{I}, \quad (7.62)$$

also

$$d\sigma = s \left| \frac{ds}{d\Theta} \right| d\Phi d\Theta. \quad (7.63)$$

Mit dem Raumwinkelement  $d\Omega = \sin \Theta d\Theta d\Phi$  erhalten wir

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{s(\Theta)}{\sin \Theta} \left| \frac{ds}{d\Theta} \right|. \quad (7.64)$$

Diese Größe wird ebenfalls als differentieller Wirkungsquerschnitt bezeichnet.

Im Beispiel der Rutherford-Streuung hatten wir

$$s = \frac{\alpha}{2E} \cot \frac{\Theta}{2} \quad (7.65)$$

gefunden. Damit können wir jetzt leicht die *Rutherford'sche Streuformel* herleiten: Es ist

$$\frac{ds}{d\Theta} = \frac{\alpha}{2E} \left( -\frac{1}{\sin^2 \frac{\Theta}{2}} \right) \frac{1}{2} = -\frac{\alpha}{4E \sin^2 \frac{\Theta}{2}} \quad (7.66)$$

und mit  $\sin \Theta = 2 \sin \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Theta}{2}$  folgt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{s}{\sin \Theta} \left| \frac{ds}{d\Theta} \right| = \frac{\frac{\alpha}{2E} \cot \frac{\Theta}{2}}{2 \sin \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Theta}{2}} \frac{\alpha}{4E \sin^2 \frac{\Theta}{2}} = \frac{\alpha^2}{16E^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}}. \quad (7.67)$$

Dieser Ausdruck hat einen starken Pol in Vorwärtsrichtung ( $\Theta = 0$ ) und ein Minimum für Rückstreuung ( $\Theta = \pi$ ). Derselbe Ausdruck ergibt sich auch für Streuung am anziehenden Coulomb- oder Gravitationspotential. Speziell für  $1/r$ -Potentiale ergibt eine quantenmechanische Rechnung ebenfalls dasselbe Resultat – nur deshalb konnte die Übereinstimmung mit Rutherfords Streuexperiment mit  $\alpha$ -Teilchen an einer Goldfolie so gut sein. Für andere Zentralpotentiale stimmen klassische und quantenmechanische Rechnung i.A. nicht überein.

Schließlich definieren wir noch den *totalen Wirkungsquerschnitt*

$$\sigma_{\text{tot}} := \int_{\text{alle Richtungen}} d\sigma(\Phi, \Theta) = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \int d\Theta d\Phi \sin \Theta \frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi \int_0^\pi d\Theta \sin \Theta \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (7.68)$$

als Maß für die Gesamtzahl der gestreuten Teilchen, bezogen auf die einlaufende Intensität. Für  $V = \alpha/r$  finden wir

$$\sigma_{\text{tot}} = 2\pi \frac{\alpha^2}{16E^2} \int_0^\pi \frac{d\Theta \sin \Theta}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}}. \quad (7.69)$$

Der Integrand divergiert für  $\Theta \rightarrow 0$  wie  $1/\Theta^3$ , die Stammfunktion verhält sich also wie  $1/\Theta^2$ , so dass das Integral  $\sigma_{\text{tot}}$  an der unteren Grenze divergiert. Die physikalische Interpretation hierfür ist, dass das  $1/r$ -Potential so langreichweitig ist, dass *alle* einlaufenden Teilchen, auch solche mit sehr großen Stoßparametern  $s$ , eine nicht vernachlässigbare Ablenkung erfahren.



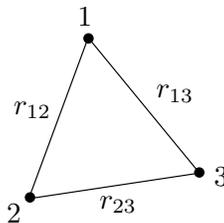
# Kapitel 8

## Kinematik des starren Körpers

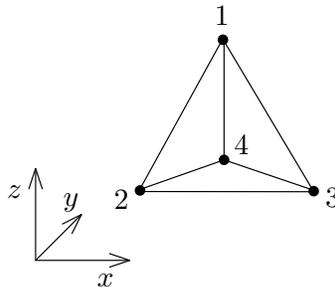
In diesem und dem folgenden Kapitel beschäftigen wir uns mit der Bewegung starrer Körper. Starre Körper sind Systeme aus vielen Teilchen im Sinne von Kapitel 4. Wir interessieren uns hier für die Bewegung des Körpers als Einheit, nicht für Bewegungen der einzelnen Teilchen relativ zueinander. Daher legen wir als (holonome) *Zwangsbedingungen* fest, dass die Abstände  $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$  aller Teilchen konstant sein sollen. Daher heißt der Körper *starr*.

Für einen Körper aus  $N$  Teilchen sind  $3N$  Koordinaten nötig, um die Konfiguration zu beschreiben. Wieviele Zwangsbedingungen und entsprechend generalisierte Koordinaten gibt es?

- Für  $N = 1$  haben wir überhaupt keine Zwangsbedingungen.
- Für  $N = 2$  (Hantel) haben wir eine Zwangsbedingung.
- Für  $N = 3$  haben wir drei:



- Für  $N = 4$  haben wir sechs:



- Für  $N = 5$  sind es aber nicht  $6 + 4 = 10$ , denn für das fünfte und jedes weitere Teilchen kann man nur jeweils drei Abstände frei wählen (dies ist eine Folge des dreidimensionalen Raumes). Daher gibt es für  $N = 5$  nur  $6 + 3 = 9$  Zwangsbedingungen.
- Für allgemeine  $N \geq 5$  gibt es analog  $6 + (N - 4) \times 3 = 3N - 6$  Zwangsbedingungen.

Wir nehmen  $N \geq 5$  an, da ein ausgedehnter Körper sicherlich viele Teilchen enthält. Dann existieren  $p = 3N - 6$  holonome Zwangsbedingungen und daher

$$S = 3N - (3N - 6) = 6 \quad (8.1)$$

Freiheitsgrade. Als generalisierte Koordinaten wählen wir zweckmäßigerweise

1. drei z.B. kartesische Koordinaten eines ausgezeichneten, körperfesten Punktes, der der Schwerpunkt sein kann, aber nicht sein muss, und
2. drei Winkel, die die Orientierung des Körpers im Raum beschreiben, z.B. *zwei* Polarwinkel, die die Orientierung einer körperfesten Achse gegenüber einem Inertialsystem angeben und *einen* weiteren Winkel, der die Drehung um diese Achse beschreibt. Eine andere Wahl sind die Euler-Winkel, die unten besprochen werden. Beides sind Parametrisierungen der Drehgruppe  $SO(3)$  aus Abschnitt 3.3.2.

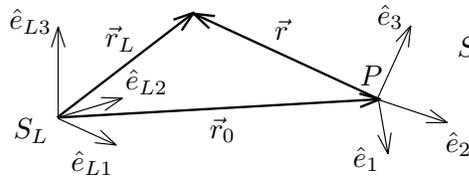
## 8.1 Translationen und Rotationen

Im Sinne der vorigen Diskussion zerlegen wir die Bewegung eines starren Körpers in die *Translation* eines körperfesten Punktes  $P$  und die *Rotation* um eine nicht unbedingt körperfeste (!) Drehachse durch  $P$ . Dass die Drehachse nicht körperfest ist, erleben Sie z.B., wenn Sie mit dem Flugzeug fliegen. Wir betrachten zwei Bezugssysteme

- das Laborsystem  $S_L$ , das ein Inertialsystem sei,
- das körperfeste System  $S$  mit dem Koordinatenursprung in  $P$ .

Aus Sicht von  $S_L$  habe  $P$  den Ortsvektor  $\vec{r}_0(t)$ . Dann gilt für die Darstellungen des Ortsvektors eines körperfesten Punktes in  $S_L$  und  $S$ :

$$\underbrace{\vec{r}_L}_{\text{in } S_L} = \vec{r}_0 + \underbrace{\vec{r}}_{\text{in } S}. \quad (8.2)$$



Für die Geschwindigkeit aus Sicht von  $S_L$  gilt

$$\dot{\vec{r}}_L \equiv \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\right)_L}_{\text{Ableitung aus Sicht von } S_L} \vec{r}_L = \dot{\vec{r}}_0 + \left(\frac{d}{dt}\right)_L \vec{r}. \quad (8.3)$$

Nun erinnern wir uns an die Regel aus Abschnitt 3.3.3: Wenn sich  $S$  gegenüber  $S_L$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  dreht, gilt, angewendet auf einen beliebigen Vektor,

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_L = \underbrace{\frac{d}{dt}}_{\text{Ableitung aus Sicht von } S} + \vec{\omega} \times, \quad (8.4)$$

also

$$\dot{\vec{r}}_L = \dot{\vec{r}}_0 + \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (8.5)$$

Hier verschwindet  $d\vec{r}/dt$ , also die Geschwindigkeit des körperfesten Punktes  $\vec{r}$  aus Sicht von  $S$ , da  $S$  körperfest ist. Wir haben die Bewegung des Punktes  $\vec{r}$  in eine Translation von  $P$  und eine Rotation um die durch  $\vec{\omega}$  beschriebene momentane Drehachse durch  $P$  zerlegt.

Der Körper sei aus Massenpunkten mit der Masse  $m_i$  und dem Ortsvektor  $\vec{r}_i$  zusammengesetzt. Wir verwenden Gl. (8.5) für jeden dieser Ortsvektoren. Für die kinetische Energie gilt dann

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_{iL}^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_0^2}_{=M} + \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2. \quad (8.6)$$

Der zweite Term ist

$$\dot{\vec{r}}_0 \cdot \left( \vec{\omega} \times \sum_i m_i \vec{r}_i \right) = M \dot{\vec{r}}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{R}). \quad (8.7)$$

Es gibt nun zwei Fälle:

1. Ein Punkt des Körpers ist *raumfest*, d.h. fest im Laborsystem. Wir wählen  $P$  als den raumfesten Punkt. Es folgt

$$\vec{r}_0 = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}_0 = 0. \quad (8.8)$$

2. Kein Punkt ist raumfest. Wir wählen  $P$  im Schwerpunkt, also

$$\vec{R} = 0 \quad \forall t. \quad (8.9)$$

In beiden Fällen verschwindet der zweite Term, nur aus unterschiedlichen Gründen. Also bleibt

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 =: \underbrace{T_T}_{\text{Translation}} + \underbrace{T_R}_{\text{Rotation}}. \quad (8.10)$$

Im Fall 1 verschwindet natürlich auch der erste Term.

## 8.2 Der Trägheitstensor

Uns interessiert hier der Rotationsanteil, da wir den Translationsanteil bereits vollständig verstehen. Wegen  $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2 b^2 \sin^2 \angle(\vec{a}, \vec{b}) = a^2 b^2 (1 - \cos^2 \angle(\vec{a}, \vec{b})) = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$  gilt

$$\begin{aligned} T_R &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 r_i^2 - \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) r_i^2 - \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega_1 x_{i1} + \omega_2 x_{i2} + \omega_3 x_{i3})^2. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Hier sind  $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}$  die Komponenten von  $\vec{r}_i$  im körperfesten System  $S$ .  $T_R$  enthält nur Terme zweiter Ordnung in  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ . Daher können wir schreiben

$$T_R = \frac{1}{2} \sum_{l,m=1}^3 J_{lm} \omega_l \omega_m \quad (8.12)$$

oder äquivalent, mit der Matrix

$$\overset{\leftrightarrow}{J} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}, \quad (8.13)$$

$$T_R = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \overset{\leftrightarrow}{J} \vec{\omega} \equiv \frac{1}{2} (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \overset{\leftrightarrow}{J} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}. \quad (8.14)$$

Durch Vergleich mit (8.11) erhält man

$$J_{lm} = \sum_i m_i (\delta_{lm} r_i^2 - x_{il} x_{im}) \quad (8.15)$$

mit  $l, m = 1, 2, 3$ .  $\overset{\leftrightarrow}{J}$  heißt *Trägheitstensor*. Unter Verwendung von Dyaden können wir die Ergebnisse auch koordinatenfrei schreiben: Es ist

$$T_R = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{\omega}^T \vec{r}_i^T \vec{r}_i \vec{\omega} - \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{\omega}^T \vec{r}_i^T \vec{r}_i^T \vec{\omega}. \quad (8.16)$$

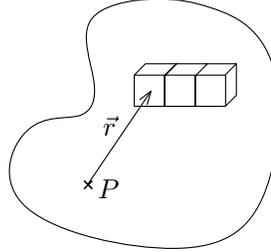
Daraus folgt

$$\overset{\leftrightarrow}{J} = \sum_i m_i (\vec{r}_i^T \vec{r}_i \mathbb{1} - \vec{r}_i^T \vec{r}_i^T). \quad (8.17)$$

Hier ist  $\vec{r}_i^T \vec{r}_i^T$  eine Dyade. Ihre Komponenten ergeben sich durch sture Anwendung der Rechenregeln für Matrizen:

$$\vec{r}_i^T \vec{r}_i^T = \begin{pmatrix} x_{i1} x_{i1} & x_{i1} x_{i2} & x_{i1} x_{i3} \\ x_{i2} x_{i1} & x_{i2} x_{i2} & x_{i2} x_{i3} \\ x_{i3} x_{i1} & x_{i3} x_{i2} & x_{i3} x_{i3} \end{pmatrix}. \quad (8.18)$$

Für kontinuierliche Massenverteilungen müssen wir die Summe  $\sum_i$  durch ein Integral über das Volumen des Körpers ersetzen:



Das Massenelement bei  $\vec{r}$  ist  $dm(\vec{r}) = d^3 r \rho(\vec{r})$  mit der Dichte  $\rho(\vec{r})$ . Insbesondere sind die Gesamtmasse

$$M = \sum_i m_i \rightarrow \int d^3 r \rho(\vec{r}) \quad (8.19)$$

und die Tensorkomponenten

$$J_{lm} = \sum_i m_i (\delta_{lm} r_i^2 - x_{il} x_{im}) \rightarrow \int d^3 r \rho(\vec{r}) (\delta_{lm} r^2 - x_l x_m). \quad (8.20)$$

Rotiert der Körper um eine Achse, die durch den Einheitsvektor  $\hat{n}$  beschrieben wird, so ist  $\vec{\omega} = \omega \hat{n}$  und

$$T_R = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \overset{\leftrightarrow}{J} \vec{\omega} = \frac{1}{2} \hat{n}^T \overset{\leftrightarrow}{J} \hat{n} \omega^2 =: \frac{1}{2} J \omega^2, \quad (8.21)$$

wobei wir das *Trägheitsmoment*  $J$  für die Rotation um die Achse in Richtung  $\hat{n}$  eingeführt haben. Das Trägheitsmoment und allgemeiner der Trägheitstensor spielen also für Rotationen die Rolle der trägen Masse für Translationen, wo  $T_T = (1/2) M v^2$  gilt.

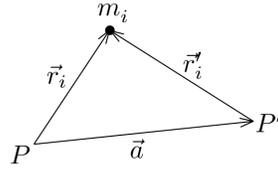
Da  $\overset{\leftrightarrow}{J}$  symmetrisch ist, hat  $\overset{\leftrightarrow}{J}$  drei reelle Eigenwerte mit zueinander senkrechten Eigenvektoren. Die Eigenwerte  $J_1, J_2, J_3$  heißen *Hauptträgheitsmomente*, die Richtungen der Eigenvektoren *Hauptträgheitsachsen*. Wählen wir diese als Koordinatenachsen des körperfesten Systems  $S$ , so nimmt  $\overset{\leftrightarrow}{J}$  die einfache diagonale Form

$$\overset{\leftrightarrow}{J} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \quad (8.22)$$

an.

### 8.2.1 Der Steinersche Satz

Der Trägheitstensor hängt von der Wahl des Ursprungspunktes  $P$  ab, wie wir nun zeigen werden.



Hier ist  $\vec{r}'_i = \vec{a} + \vec{r}_i$ . Wir betrachten den Fall, dass  $P$  der Schwerpunkt und  $P'$  ein anderer körperfester Punkt ist. Aus

$$\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{a} \quad (8.23)$$

folgt

$$\begin{aligned} J'_{lm} &= \sum_i m_i (\delta_{lm} (\vec{r}'_i)^2 - x'_{il} x'_{im}) \\ &= \sum_i m_i [\delta_{lm} (\vec{r}_i - \vec{a})^2 - (x_{il} - a_l)(x_{im} - a_m)] \\ &= \sum_i m_i [\delta_{lm} \vec{r}_i^2 - 2\delta_{lm} \vec{r}_i \cdot \vec{a} + \delta_{lm} \vec{a}^2 - x_{il} x_{im} + x_{il} a_m + a_l x_{im} - a_l a_m] \\ &= \underbrace{\sum_i m_i (\delta_{lm} \vec{r}_i^2 - x_{il} x_{im})}_{J_{lm}} \\ &\quad - \underbrace{2\delta_{lm} \vec{a} \cdot \sum_i m_i \vec{r}_i - a_m \sum_i m_i x_{il} - a_l \sum_i m_i x_{im}}_{=0 \text{ da } \sum_i m_i \vec{r}_i = M\vec{R} = 0} \\ &\quad + (\delta_{lm} \vec{a}^2 - a_l a_m) \underbrace{\sum_i m_i}_M. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Somit erhalten wir

$$J'_{lm} = J_{lm} + M (\delta_{lm} a^2 - a_l a_m). \quad (8.25)$$

Koordinatenfrei lautet diese Beziehung

$$\overset{\leftrightarrow'}{J} = \overset{\leftrightarrow}{J} + M (\vec{a}^T \vec{a} \mathbb{1} - \vec{a} \vec{a}^T). \quad (8.26)$$

Bezüglich einer durch  $\hat{n} = (n_1, n_2, n_3)$  gegebenen Achse folgt

$$\begin{aligned} J' &= \hat{n}^T \overset{\leftrightarrow'}{J} \hat{n} = \sum_{lm} n_l J'_{lm} n_m = \sum_{lm} n_l J_{lm} n_m + M \left( \underbrace{\sum_l n_l a^2 n_l}_{=a^2} - \sum_{lm} n_l a_l a_m n_m \right) \\ &= J + M (a^2 - (\hat{n} \cdot \vec{a})^2). \end{aligned} \quad (8.27)$$

Steht  $\vec{a}$  senkrecht auf  $\hat{n}$ , also auf der Drehachse, so ist

$$J' = J + M a^2 \quad (8.28)$$

Das ist die übliche Form des *Steinerschen Satzes*.

Abschließend sei angemerkt, dass sich zwar der Trägheitstensor, aber nicht die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  bei einer festen Verschiebung des Koordinatenursprungpunktes in  $S$  ändert. Die Winkelgeschwindigkeit beschreibt nämlich die Rotation des körperfesten Systems  $S$  relativ zum Laborsystem  $S_L$ , die von der Wahl des Ursprungpunktes unbeeinflusst bleibt.

### 8.3 Der Drehimpuls des starren Körpers

Im Laborsystem ist der Drehimpuls

$$\vec{L}_L = \sum_i m_i \vec{r}_{iL} \times \dot{\vec{r}}_{iL}. \quad (8.29)$$

Einsetzen von Gleichungen (8.2) und (8.5) ergibt

$$\begin{aligned} \vec{L}_L &= \sum_i m_i (\vec{r}_0 + \vec{r}_i) \times (\dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i) \\ &= M \vec{r}_0 \times \dot{\vec{r}}_0 + \vec{r}_0 \times (\vec{\omega} \times M \vec{R}) + M \vec{R} \times \dot{\vec{r}}_0 + \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i). \end{aligned} \quad (8.30)$$

1. Fall:  $P$  ist raumfest. Wir wählen  $P$  als Ursprungspunkt von  $S$  und  $S_L$ . Dann ist  $\vec{r}_0 \equiv 0$ , also

$$\vec{L}_L = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \vec{L}. \quad (8.31)$$

2. Fall:  $P$  ist der Schwerpunkt. Dann ist  $\vec{R} \equiv 0$ , also

$$\vec{L}_L = M \vec{r}_0 \times \dot{\vec{r}}_0 + \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)}_{= \vec{L}}. \quad (8.32)$$

Der erste Term ist der Drehimpuls des Schwerpunktes, der uns hier nicht interessiert. Wir betrachten nun den *körpereigenen* Drehimpuls  $\vec{L}$ .

Wir können das doppelte Kreuzprodukt auflösen,

$$\vec{L} = \sum_i m_i [\vec{r}_i^2 \vec{\omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_i]. \quad (8.33)$$

Die  $x$ -Komponente lautet z.B.

$$L_1 = \sum_i m_i [\vec{r}_i^2 \omega_1 - x_{i1} x_{i1} \omega_1 - x_{i1} x_{i2} \omega_2 - x_{i1} x_{i3} \omega_3]. \quad (8.34)$$

Vergleich mit der Definition des Trägheitstensors  $\overset{\leftrightarrow}{J}$  ergibt die wichtige Beziehung

$$\vec{L} = \overset{\leftrightarrow}{J} \vec{\omega}. \quad (8.35)$$

Also gilt auch

$$T_R = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \vec{L} \equiv \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}. \quad (8.36)$$

### 8.4 Die Euler-Winkel

Wir müssen noch die generalisierten Koordinaten spezifizieren, die die Rotation des starren Körpers beschreiben.

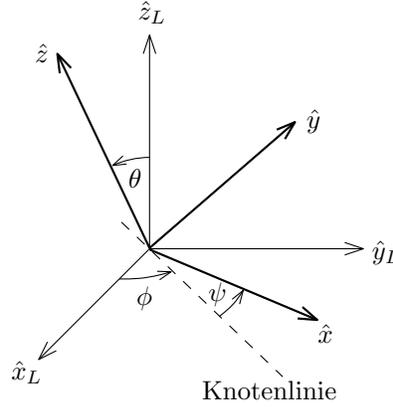
Mit anderen Worten, wir suchen eine (fast überall) eindeutige Parametrisierung der Drehmatrix  $\overset{\leftrightarrow}{R}$ , die das Dreibein  $(\hat{x}_L, \hat{y}_L, \hat{z}_L) = (\hat{e}_{L1}, \hat{e}_{L2}, \hat{e}_{L3})$  des Laborsystems  $S_L$  in das Dreibein  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$  des körperfesten Systems  $S$  überführt. Diese Drehmatrix soll also

$$\hat{e}_n = \overset{\leftrightarrow}{R} \hat{e}_{Ln} \quad \text{für } n = 1, 2, 3 = x, y, z \quad (8.37)$$

erfüllen. Die allgemein übliche Parametrisierung durch die drei *Euler-Winkel*  $\phi, \theta, \psi$  zerlegt diese Drehung folgendermaßen in drei Einzeldrehungen:

1. Drehung um die Achse  $\hat{z}_L$  um den Winkel  $\phi \in [0, 2\pi[$ , die neue  $x$ -Achse nennen wir *Knotenlinie*.
2. Drehung um die Knotenlinie um den Winkel  $\theta \in [0, \pi]$ .
3. Drehung um die neue  $z$ -Achse ( $\hat{z}$ ) um den Winkel  $\psi \in [0, 2\pi[$ , dabei wird die Knotenlinie in die neue  $x$ -Achse ( $\hat{x}$ ) überführt.

Alle Drehungen erfolgen in positiver Richtung (Rechte-Hand-Regel).



Wie schon in Abschnitt 3.3.2 besprochen, vertauschen Drehungen i.A. nicht miteinander. Es ist daher wichtig, die drei Drehungen in genau dieser Reihenfolge auszuführen.

Wir wollen noch herleiten, wie die Darstellung der Rotationsmatrizen  $\overset{\leftrightarrow}{R} \in \text{SO}(3)$  durch die Euler-Winkel explizit aussieht. Wir bezeichnen die Richtung der Knotenlinie mit  $\hat{k}$ . Aus der Skizze lesen wir ab

$$\hat{k} = \cos \phi \hat{x}_L + \sin \phi \hat{y}_L, \quad (8.38)$$

$$\hat{k} = \cos \psi \hat{x} - \sin \psi \hat{y}. \quad (8.39)$$

Wir bezeichnen die Komponenten von  $\overset{\leftrightarrow}{R}$  im Laborsystem mit

$$R_{xx} = \hat{x}_L^T \overset{\leftrightarrow}{R} \hat{x}_L, \quad (8.40)$$

$$R_{xy} = \hat{x}_L^T \overset{\leftrightarrow}{R} \hat{y}_L \quad \text{usw.} \quad (8.41)$$

Dann erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \hat{x}_L \cdot \hat{k} = \cos \psi \hat{x}_L \cdot \hat{x} - \sin \psi \hat{x}_L \cdot \hat{y} \\ &= \cos \psi \hat{x}_L \cdot \overset{\leftrightarrow}{R} \hat{x}_L - \sin \psi \hat{x}_L \cdot \overset{\leftrightarrow}{R} \hat{y}_L \\ &= \cos \psi \hat{x}_L^T \overset{\leftrightarrow}{R} \hat{x}_L - \sin \psi \hat{x}_L^T \overset{\leftrightarrow}{R} \hat{y}_L \\ &= \cos \psi R_{xx} - \sin \psi R_{xy} \end{aligned} \quad (8.42)$$

und analog

$$\sin \phi = \hat{y}_L \cdot \hat{k} = \cos \psi R_{yx} - \sin \psi R_{yy}, \quad (8.43)$$

$$0 = \hat{z}_L \cdot \hat{k} = \cos \psi R_{zx} - \sin \psi R_{zy}, \quad (8.44)$$

$$\cos \psi = \hat{k} \cdot \hat{x} = \cos \phi R_{xx} + \sin \phi R_{yx}, \quad (8.45)$$

$$-\sin \psi = \hat{k} \cdot \hat{y} = \cos \phi R_{xy} + \sin \phi R_{yy}, \quad (8.46)$$

$$0 = \hat{k} \cdot \hat{z} = \cos \phi R_{xz} + \sin \phi R_{yz}. \quad (8.47)$$

Weiter entnehmen wir der Skizze, dass gilt

$$\cos \theta = \hat{z}_L \cdot \hat{z} = R_{zz}. \quad (8.48)$$

Wir suchen also  $R_{mn}$ ,  $m, n = x, y, z$ , die diese (nicht unabhängigen) Gleichungen und außerdem die Orthogonalitätsrelation  $\overset{\leftrightarrow}{R}^T \overset{\leftrightarrow}{R} = \mathbb{1} \Leftrightarrow \sum_m R_{mn} R_{mp} = \delta_{np}$  und die „spezielle“ Bedingung  $\det \overset{\leftrightarrow}{R} = 1$  erfüllen. Mit etwas Herumprobieren findet man als Lösung

$$\overset{\leftrightarrow}{R}(\phi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \cos \theta \sin \psi & -\cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \cos \theta \sin \psi & -\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \theta \cos \psi & -\cos \phi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (8.49)$$

Die Komponenten von  $\overset{\leftrightarrow}{R}$  haben eine einfache geometrische Bedeutung. Nach Definition sind die Komponenten

$$R_{mn} = \hat{e}_{Lm}^T \overset{\leftrightarrow}{R} \hat{e}_{Ln} \quad (8.50)$$

mit  $\{\hat{e}_{L1}, \hat{e}_{L2}, \hat{e}_{L3}\} = \{\hat{x}_L, \hat{y}_L, \hat{z}_L\}$  wie oben. Mit Gl. (8.37) ergibt sich

$$R_{mn} = \hat{e}_{Lm}^T \hat{e}_n. \quad (8.51)$$

Da  $\hat{e}_{Lm}$  und  $\hat{e}_n$  Einheitsvektoren sind, ist  $R_{mn}$  gerade der Kosinus des zwischen der  $m$ -Achse im Laborsystem und der  $n$ -Achse im körperfesten System eingeschlossenen Winkels. Es sei angemerkt, dass die Darstellung von  $\overset{\leftrightarrow}{R}$  in Gl. (8.49) recht kompliziert und auch nicht symmetrisch bezüglich  $x, y, z$  ist. Diese Asymmetrie rührt daher, dass die Definition der Euler-Winkel bestimmte Koordinatenachsen auszeichnet – die erste Drehung erfolgt speziell um  $\hat{z}_L$  usw.

Off benötigt man die Transformation der *Komponenten* eines Vektors  $\vec{b}$  bezüglich der Basen  $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$  und  $\{\hat{x}_L, \hat{y}_L, \hat{z}_L\}$ . Diese finden wir ausgehend von

$$\vec{b} = b_{L1} \hat{x}_L + b_{L2} \hat{y}_L + b_{L3} \hat{z}_L = b_1 \hat{x} + b_2 \hat{y} + b_3 \hat{z}. \quad (8.52)$$

Es folgt z.B.

$$\begin{aligned} b_1 &= \vec{b} \cdot \hat{x} = b_{L1} \hat{x}_L \cdot \hat{x} + b_{L2} \hat{y}_L \cdot \hat{x} + b_{L3} \hat{z}_L \cdot \hat{x} \\ &= b_{L1} \hat{x}_L^T \overset{\leftrightarrow}{R} \hat{x}_L + b_{L2} \hat{y}_L^T \overset{\leftrightarrow}{R} \hat{x}_L + b_{L3} \hat{z}_L^T \overset{\leftrightarrow}{R} \hat{x}_L \\ &= b_{L1} R_{xx} + b_{L2} R_{yx} + b_{L3} R_{zx}, \end{aligned} \quad (8.53)$$

insgesamt also

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{yx} & R_{zx} \\ R_{xy} & R_{yy} & R_{zy} \\ R_{xz} & R_{yz} & R_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{L1} \\ b_{L2} \\ b_{L3} \end{pmatrix}. \quad (8.54)$$

Die Matrix ist die *Transponierte* von  $\overset{\leftrightarrow}{R}$  dargestellt in der Basis  $\{\hat{x}_L, \hat{y}_L, \hat{z}_L\}$ . Wir können also schreiben

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \overset{\leftrightarrow}{R}^T \begin{pmatrix} b_{L1} \\ b_{L2} \\ b_{L3} \end{pmatrix} \equiv \overset{\leftrightarrow}{R}^{-1} \begin{pmatrix} b_{L1} \\ b_{L2} \\ b_{L3} \end{pmatrix}, \quad (8.55)$$

wobei wir verwendet haben, dass  $\overset{\leftrightarrow}{R}$  orthogonal ist. Die Komponenten transformieren sich demnach mit der transponierten bzw. inversen Matrix

$$\overset{\leftrightarrow}{R}^T(\phi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \cos \theta \sin \psi & \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \cos \theta \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \\ -\cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \theta \cos \psi & -\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \cos \psi \\ \sin \phi \sin \theta & -\cos \phi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (8.56)$$

Diese lässt sich übrigens als Produkt dreier einzelner Drehmatrizen bzgl. der Winkel  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  schreiben:

$$\overset{\leftrightarrow}{R}^T(\phi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.57)$$

Die Drehmatrix  $\overset{\leftrightarrow}{R}$  der Basisvektoren und die Drehmatrix  $\overset{\leftrightarrow}{R}^T$  der Vektorkomponenten bzgl. der Basen werden leider in manchen Lehrbüchern durcheinander gebracht.



# Kapitel 9

## Dynamik des starren Körpers

In diesem Kapitel wollen wir Bewegungsgleichungen für starre Körper aufstellen und lösen. Wir nehmen an, dass außer evtl. einem festen Punkt keine weiteren Zwangsbedingungen die Rotation des Körpers einschränken; er dreht sich z.B. nicht um eine fest vorgegebene Achse. Einen starren Körper, der frei rotieren kann, nennen wir *Kreisel*.

Die Euler-Winkel  $\phi, \theta, \psi$  stellen eine ziemlich unsymmetrische Parametrisierung der Drehgruppe  $SO(3)$  dar. Das führt dazu, dass die Bewegungsgleichungen für  $\phi, \theta, \psi$  schon in einfachen Fällen kompliziert sind. Andere generalisierte Koordinaten helfen hier aber auch nicht. Es erweist sich als nützlich, zunächst Bewegungsgleichungen für die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  aufzustellen.

### 9.1 Die Euler-Gleichungen

Schon im Rahmen der Newton-Mechanik hatten wir gesehen, dass die Zeitableitung des Drehimpulses durch das äußere Drehmoment gegeben ist,  $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ . Diese Beziehung gilt i.A. nur in einem Inertialsystem, z.B. im Laborsystem  $S_L$ . Präziser schreiben wir also

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_L \vec{L} = \vec{M}. \quad (9.1)$$

Der Drehimpuls  $\vec{L}$  hängt mit der momentanen Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  über

$$\vec{L} = \overset{\leftrightarrow}{J} \vec{\omega} \quad (9.2)$$

zusammen. Bezüglich des Laborsystems  $S_L$  ist der Trägheitstensor  $\overset{\leftrightarrow}{J}$  jedoch zeitabhängig, da die Hauptträgheitsachsen mit dem Körper mitrotieren. Daher ist

$$\vec{M} = \left(\frac{d}{dt}\right)_L \vec{L} = \left[\left(\frac{d}{dt}\right)_L \overset{\leftrightarrow}{J}\right] \vec{\omega} + \overset{\leftrightarrow}{J} \left(\frac{d}{dt}\right)_L \vec{\omega}. \quad (9.3)$$

Diese Bewegungsgleichung ist nicht sehr nützlich. Besser verwenden wir Zeitableitungen bezüglich des körperfesten Systems  $S$ , in dem  $\overset{\leftrightarrow}{J}$  konstant ist. Mit der bekannten Regel

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_L = \frac{d}{dt} + \vec{\omega} \times \quad (9.4)$$

erhalten wir

$$\vec{M} = \left(\frac{d}{dt}\right)_L \vec{L} = \underbrace{\frac{d\vec{L}}{dt}}_{\text{in } S} + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

$$= \overset{\leftrightarrow}{J} \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \overset{\leftrightarrow}{J} \vec{\omega}. \quad (9.5)$$

Beachte, dass  $\dot{\vec{\omega}}$  eindeutig ist, weil gilt

$$\left( \frac{d}{dt} \right)_L \vec{\omega} = \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}_{\text{in } S} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{\omega}}_{=0}. \quad (9.6)$$

Die Beziehung (9.5) ist koordinatenfrei, d.h. wir können das Koordinatensystem beliebig wählen. Das körperfeste System mit den Hauptträgheitsachsen als Koordinatenachsen ist hier besonders günstig, weil sich  $\overset{\leftrightarrow}{J}$  zu

$$\overset{\leftrightarrow}{J} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \quad (9.7)$$

vereinfacht. Dann folgt

$$\begin{aligned} \vec{M} &\equiv \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 \dot{\omega}_1 \\ J_2 \dot{\omega}_2 \\ J_3 \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} J_1 \omega_1 \\ J_2 \omega_2 \\ J_3 \omega_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} J_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 J_3 \omega_3 - \omega_3 J_2 \omega_2 \\ J_2 \dot{\omega}_2 + \omega_3 J_1 \omega_1 - \omega_1 J_3 \omega_3 \\ J_3 \dot{\omega}_3 + \omega_1 J_2 \omega_2 - \omega_2 J_1 \omega_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 \\ J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_3 \omega_1 \\ J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Die drei Komponenten dieser Vektorgleichung,

$$M_1 = J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3, \quad (9.9)$$

$$M_2 = J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_3 \omega_1, \quad (9.10)$$

$$M_3 = J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 \quad (9.11)$$

sind die *Euler-Gleichungen*. Sie haben eine kompliziertere Struktur als die entsprechenden Gleichungen  $F_1 = m\dot{v}_1$  usw. für die Translation: Selbst ohne äußeres Drehmoment,  $\vec{M} = 0$ , erhalten wir drei *gekoppelte, nichtlineare* Differentialgleichungen für  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ . Das liegt letztlich wieder daran, dass Rotationen um verschiedene Achsen nicht miteinander vertauschen.

Bei der Interpretation von  $\vec{\omega}$  ist Aufmerksamkeit geboten.  $\vec{\omega}$  ist die Winkelgeschwindigkeit des Körpers (und von  $S$ ) gegenüber dem Laborsystem  $S_L$ . Die Winkelgeschwindigkeit gegenüber dem körperfesten System ist nach Definition Null. Die Euler-Gleichungen sind aber in *körperfesten* Koordinaten, nämlich bezüglich der Hauptträgheitsachsen, geschrieben.  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  sind also die Komponenten von  $\vec{\omega}$  bezüglich des körperfesten Systems. Es ist genau diese Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$ , die in die Trägheitskräfte eingeht. Wenn wir in einem Flugzeug sitzen, können wir  $\vec{\omega}$  also fühlen.

Analog ist  $\vec{L}$  der Drehimpuls des Körpers im Laborsystem. Sein Drehimpuls in einem körperfesten System verschwindet wegen  $\vec{L} = \overset{\leftrightarrow}{J} \vec{\omega}$  und  $\vec{\omega} = 0$ .

## 9.2 Rotation im Laborsystem

Letztlich wollen wir als Lösung der Bewegungsgleichungen die zeitabhängige Orientierung des Kreisels im Laborsystem bestimmen. Wir suchen also die Euler-Winkel  $\phi(t), \theta(t)$  und  $\psi(t)$ . Dazu müssen wir zunächst die Euler-Winkel und die zugehörigen generalisierten Geschwindigkeiten mit den körperfesten Komponenten  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  der Winkelgeschwindigkeit in Beziehung setzen.

Wir betrachten eine infinitesimale Drehung  $\vec{\omega} dt = (\omega_1 \hat{x} + \omega_2 \hat{y} + \omega_3 \hat{z}) dt$ . Der Betrag dieses Vektors ist  $\omega dt$ , der Drehwinkel während des Zeitintervalls  $dt$ . Die Richtung des Vektors ist offensichtlich die Richtung von  $\vec{\omega}$ , also entlang der momentanen Drehachse. Da wir jede Drehung durch Euler-Winkel darstellen können, muss sich die Drehung  $\vec{\omega} dt = (\omega_1 \hat{x} + \omega_2 \hat{y} + \omega_3 \hat{z}) dt$  aus infinitesimalen Änderungen der Euler-Winkel zusammensetzen lassen:

1.  $d\phi$  um  $\hat{z}_L$ ,

2.  $d\theta$  um die Knotenlinie, deren Richtung wir mit  $\hat{k}$  bezeichnen,
3.  $d\psi$  um  $\hat{z}$ .

Also ist

$$\vec{\omega} dt = d\phi \hat{z}_L + d\theta \hat{k} + d\psi \hat{z}. \quad (9.12)$$

Jetzt müssen wir noch  $\hat{z}_L$  und  $\hat{k}$  durch die Richtungsvektoren  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$  der Hauptträgheitsachsen ausdrücken. Wir wissen schon aus Abschnitt 8.4, dass die Richtung der Knotenlinie

$$\hat{k} = \cos \psi \hat{x} - \sin \psi \hat{y} \quad (9.13)$$

erfüllt. Außerdem hatten wir gesehen, dass für die Komponenten eines beliebigen Vektors  $\vec{b}$  in den Basen  $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$  und  $\{\hat{x}_L, \hat{y}_L, \hat{z}_L\}$  gilt

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \overset{\leftrightarrow T}{R} \begin{pmatrix} b_{L1} \\ b_{L2} \\ b_{L3} \end{pmatrix}. \quad (9.14)$$

Wir wählen jetzt  $\vec{b} = \hat{z}_L$  und erhalten die Darstellung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \hat{z}_L \cdot \hat{x} \\ \hat{z}_L \cdot \hat{y} \\ \hat{z}_L \cdot \hat{z} \end{pmatrix}}_{\text{in } S} = \overset{\leftrightarrow T}{R} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{in } S_L} = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi \\ \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (9.15)$$

also

$$\hat{z}_L = \sin \theta \sin \psi \hat{x} + \sin \theta \cos \psi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}. \quad (9.16)$$

Damit wird

$$\vec{\omega} dt = (d\phi \sin \theta \sin \psi + d\theta \cos \psi) \hat{x} + (d\phi \sin \theta \cos \psi - d\theta \sin \psi) \hat{y} + (d\phi \cos \theta + d\psi) \hat{z} \quad (9.17)$$

und wir finden

$$\omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \quad (9.18)$$

$$\omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \quad (9.19)$$

$$\omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}. \quad (9.20)$$

Zur vollständigen Beschreibung der Bewegung müssen wir also diese drei Gleichungen und die drei Euler-Gleichungen simultan lösen. Da alle sechs Gleichungen erster Ordnung sind, benötigen wir sechs Anfangsbedingungen, um die Lösung eindeutig festzulegen, z.B.  $\vec{\omega}(t_0)$  und  $\phi(t_0)$ ,  $\theta(t_0)$ ,  $\psi(t_0)$ . Wenn die Drehmomente  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  im körperfesten System explizit gegeben sind – insbesondere, wenn sie verschwinden – können wir die Euler-Gleichungen zuerst lösen und dann die Lösung für  $\vec{\omega}(t)$  in die drei Gleichungen für  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  einsetzen.

### 9.3 Der kräftefreie Kreisel

Wir betrachten zunächst den Fall, in dem kein Drehmoment wirkt:  $\vec{M} = 0$ . Dann spricht man etwas irreführend vom kräftefreien Kreisel. Schon dieser Fall ist überraschend komplex. Die Euler-Gleichungen lauten hier

$$J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 = 0, \quad (9.21)$$

$$J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_3 \omega_1 = 0, \quad (9.22)$$

$$J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 = 0. \quad (9.23)$$

Multiplikation mit  $\omega_1, \omega_2$  bzw.  $\omega_3$  und Addition ergibt

$$0 = J_1 \omega_1 \dot{\omega}_1 + J_2 \omega_2 \dot{\omega}_2 + J_3 \omega_3 \dot{\omega}_3 + \underbrace{(J_3 - J_2 + J_1 - J_3 + J_2 - J_1)}_{=0} \omega_1 \omega_2 \omega_3$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} (J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \overset{\leftrightarrow}{J} \vec{\omega} = \frac{d}{dt} T_R. \quad (9.24)$$

Wir haben also den Energieerhaltungssatz wieder gewonnen, ein nicht überraschendes Ergebnis.

Multiplizieren wir die Euler-Gleichungen stattdessen mit  $J_1 \omega_1$ ,  $J_2 \omega_2$  bzw.  $J_3 \omega_3$  und addieren sie, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= J_1^2 \omega_1 \dot{\omega}_1 + J_2^2 \omega_2 \dot{\omega}_2 + J_3^2 \omega_3 \dot{\omega}_3 + (J_1 J_3 - J_1 J_2 + J_2 J_1 - J_2 J_3 + J_3 J_2 - J_3 J_1) \omega_1 \omega_2 \omega_3 \\ &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} (J_1^2 \omega_1^2 + J_2^2 \omega_2^2 + J_3^2 \omega_3^2) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (L_1^2 + L_2^2 + L_3^2) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} L^2. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Also ist das Quadrat oder äquivalent der *Betrag* des Drehimpulses im körperfesten System  $S$  erhalten. Das ist auch nicht besonders überraschend: Der Drehimpulsvektor  $\vec{L}$  ist wegen  $\vec{M} = 0$  im Inertialsystem  $S_L$  erhalten. Der Übergang von  $S_L$  zu  $S$  ist eine Drehung. Unter Drehungen ist aber der Betrag von Vektoren invariant. Zusammenfassend finden wir für den kräftefreien Kreisel zwei Erhaltungsgrößen  $E$ ,  $L$  im körperfesten System. Das ist aber noch nicht ausreichend, um die drei Gleichungen für  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  zu integrieren.

### 9.3.1 Rotation um freie Achsen

Wir haben gesehen, dass für allgemeine Bewegungen des kräftefreien Kreisels nur der Betrag des Drehimpulses in  $S$  erhalten ist. Nun untersuchen wir, ob es spezielle Bewegungen gibt, bei denen  $\vec{L}$  in  $S$  als *Vektor* erhalten ist. Zu diesem Zweck nehmen wir vorläufig an, dass solche Bewegungen existieren, und prüfen die Konsequenzen.

Damit  $\vec{L}$  erhalten ist, müsste  $0 = \dot{\vec{L}} = \overset{\leftrightarrow}{J} \dot{\vec{\omega}}$  gelten, also im körperfesten System  $\dot{\vec{\omega}} = 0$ . Aus den Euler-Gleichungen folgt dann

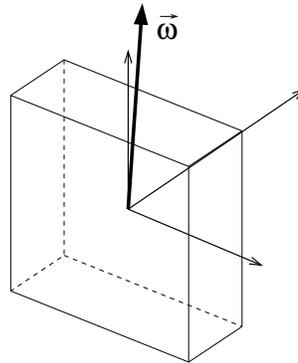
$$(J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 = 0, \quad (9.26)$$

$$(J_1 - J_3) \omega_3 \omega_1 = 0, \quad (9.27)$$

$$(J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 = 0. \quad (9.28)$$

Sind  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  alle verschieden (unsymmetrischer Kreisel), so müssen daher *zwei* Komponenten von  $\vec{\omega}$  verschwinden. (Wenn alle drei verschwinden, gibt es gar keine Rotation.) D.h. die Drehachse (parallel zu  $\vec{\omega}$ ) ist parallel zu einer der Hauptträgheitsachsen und damit körperfest. Wegen  $\vec{L} = \overset{\leftrightarrow}{J} \vec{\omega}$  ist  $\vec{L}$  dann auch parallel zu derselben Achse und körperfest.  $\vec{L}$  ist aber im Laborsystem  $S_L$  erhalten. Daher ist die Rotationsachse auch in  $S_L$  fest.

Ist diese Bewegung stabil? Dazu betrachten wir eine Rotation, die fast um eine Hauptträgheitsachse erfolgt. O.B.d.A. sei dies die  $\hat{x}$ -Achse. Dann nehmen wir an, dass gilt  $\omega_1 = \omega_1^0 + \Delta\omega_1$ ,  $\omega_2 = \Delta\omega_2$ ,  $\omega_3 = \Delta\omega_3$ , wobei  $(\omega_1^0, 0, 0) = \text{const}$  eine Rotation um die  $\hat{x}$ -Achse beschreibt, und  $|\Delta\omega_1|, |\Delta\omega_2|, |\Delta\omega_3| \ll \omega_1^0$  gilt. Diese Skizze zeigt  $\vec{\omega}$  im körperfesten System  $S$ :



Die Euler-Gleichungen (9.21)–(9.23) lauten näherungsweise, bis zur ersten Ordnung in  $\Delta\omega_i$ ,

$$J_1 \dot{\omega}_1^0 + J_1 \Delta\dot{\omega}_1 = 0, \quad (9.29)$$

$$J_2 \Delta \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \Delta \omega_3 \omega_1^0 = 0, \quad (9.30)$$

$$J_3 \Delta \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1^0 \Delta \omega_2 = 0. \quad (9.31)$$

Aus der ersten Gleichung folgt  $\Delta \omega_1 = \text{const}$  und aus den beiden übrigen

$$\Delta \dot{\omega}_2 = -\frac{J_1 - J_3}{J_2} \omega_1^0 \Delta \omega_3, \quad (9.32)$$

$$\Delta \dot{\omega}_3 = -\frac{J_2 - J_1}{J_3} \omega_1^0 \Delta \omega_2. \quad (9.33)$$

Also

$$\Delta \ddot{\omega}_2 = \frac{(J_1 - J_3)(J_2 - J_1)}{J_2 J_3} (\omega_1^0)^2 \Delta \omega_2, \quad (9.34)$$

$$\Delta \ddot{\omega}_3 = \frac{(J_2 - J_1)(J_1 - J_3)}{J_3 J_2} (\omega_1^0)^2 \Delta \omega_3. \quad (9.35)$$

Diese Gleichungen sind entkoppelt. Der Koeffizient auf der rechten Seite ist für beide Gleichungen derselbe. Die Bewegung ist stabil, wenn die „Kraft“ rücktreibend ist, vgl. den harmonischen Oszillator, d.h. wenn gilt

$$\frac{(J_1 - J_3)(J_2 - J_1)}{J_2 J_3} (\omega_1^0)^2 < 0 \quad (9.36)$$

oder äquivalent

$$(J_2 - J_1)(J_3 - J_1) > 0. \quad (9.37)$$

Das ist der Fall, wenn  $J_2, J_3 > J_1$  oder  $J_2, J_3 < J_1$  gilt, also wenn  $J_1$  das kleinste oder das größte Hauptträgheitsmoment ist. Ist es dagegen das mittlere, ist die Bewegung instabil. Das kann man mit einem geworfenen Quader (Buch, Schwamm) ausprobieren.

### 9.3.2 Der symmetrische Kreisel

Wir haben im letzten Abschnitt die Rotation eines kräftefreien unsymmetrischen Kreisels um eine freie Achse (Hauptträgheitsachse) untersucht. Die Lösung für einen kräftefreien unsymmetrischen Kreisel, der nicht um eine freie Achse rotiert, ist aufwendig. Wir betrachten hier den einfacheren Fall des *symmetrischen Kreisels* mit

$$J_1 = J_2 \neq J_3. \quad (9.38)$$

Der noch einfachere Fall des *Kugelkreisels*,  $J_1 = J_2 = J_3$ , ist langweilig, da immer  $\vec{L}$  und  $\vec{\omega}$ , d.h. die momentane Drehachse, parallel sind. Die ausgezeichnete Hauptträgheitsachse, hier die  $\hat{z}$ -Achse, heißt *Figurenachse*. Ist der Körper z.B. ein *Rotationskörper*, so ist die Symmetrieachse die Figurenachse.

Die Euler-Gleichungen lauten

$$J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_1) \omega_2 \omega_3 = 0, \quad (9.39)$$

$$J_1 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_3 \omega_1 = 0, \quad (9.40)$$

$$J_3 \dot{\omega}_3 + \cancel{(J_1 - J_1)} \omega_1 \omega_2 = 0. \quad (9.41)$$

Offenbar gilt  $\omega_3 = \text{const} =: \omega_3^0$ . Wir wählen das körperfeste System  $S$  o.B.d.A. so, dass  $\omega_3^0 \geq 0$  ist. Die ersten beiden Euler-Gleichungen sind

$$\dot{\omega}_1 - \underbrace{\frac{J_1 - J_3}{J_1} \omega_3^0}_{=: \Omega} \omega_2 = 0, \quad (9.42)$$

$$\dot{\omega}_2 + \underbrace{\frac{J_1 - J_3}{J_1} \omega_3^0}_{=: \Omega} \omega_1 = 0. \quad (9.43)$$

Es folgt

$$\ddot{\omega}_1 - \Omega \dot{\omega}_2 = \ddot{\omega}_1 + \Omega^2 \omega_1 = 0, \quad (9.44)$$

$$\ddot{\omega}_2 + \Omega \dot{\omega}_1 = \ddot{\omega}_2 + \Omega^2 \omega_2 = 0. \quad (9.45)$$

Das sind wieder Gleichungen analog zu harmonischen Oszillatoren. Der Ansatz

$$\omega_1 = \alpha \sin(\Omega t + \beta) \quad (9.46)$$

erfüllt die erste Gleichung. Dann ist

$$\omega_2 = \frac{\dot{\omega}_1}{\Omega} = \alpha \cos(\Omega t + \beta). \quad (9.47)$$

Insgesamt also:

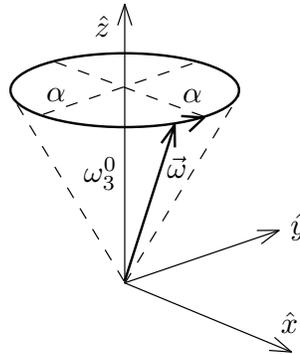
$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \alpha \sin(\Omega t + \beta) \\ \alpha \cos(\Omega t + \beta) \\ \omega_3^0 \end{pmatrix} \quad (9.48)$$

mit

$$\Omega = \frac{J_1 - J_3}{J_1} \omega_3^0 \quad (9.49)$$

und  $\omega_3^0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  beliebig. Das ist die allgemeine Lösung, denn wir hatten *drei* Gleichungen *erster* Ordnung, die *drei* unabhängige Parameter erfordern.

Im körperfesten System  $S$  können wir  $\vec{\omega}$  wie folgt darstellen:



Im körperfesten System läuft  $\vec{\omega}$ , also die momentane Drehachse, auf einem Kegelmantel, dem *Polkegel*, um die Figuren- bzw. Symmetrieachse um. Die Winkelgeschwindigkeit dieser Bewegung ist  $\Omega$ .  $\Omega > 0$  bzw.  $\Omega < 0$  bedeuten Umlauf im positiven bzw. negativen Drehsinn. Den Umlauf der momentanen Drehachse um die Figuren- bzw. Symmetrieachse nennt man *freie Nutation*.

Beispiel: Die Erde ist annähernd ein abgeflachtes (oblates) Rotationsellipsoid mit  $J_1 \approx J_2 < J_3$  und

$$\frac{J_3 - J_1}{J_1} \approx \frac{1}{305}. \quad (9.50)$$

Die Periode  $T = 2\pi/\Omega$  der freien Nutation beträgt jedoch nicht, wie man erwarten sollte,

$$\left| \frac{J_1}{J_1 - J_3} \right| \underbrace{\left| \frac{2\pi}{\omega_3^0} \right|}_{1 \text{ Tag}} = \left| \frac{J_1}{J_1 - J_3} \right| \text{Tage} \approx 305 \text{Tage}, \quad (9.51)$$

sondern ungefähr 433 Tage. Die Ursache für diese Abweichung liegt darin, dass die Erde eben kein starrer Körper ist, sondern elastisch und teilweise flüssig. Die Amplitude variiert stark mit der Zeit und beträgt maximal 10 m in Bodenhöhe.

Nun können wir die Gleichungen

$$\alpha \sin(\Omega t + \beta) = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \quad (9.52)$$

$$\alpha \cos(\Omega t + \beta) = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \quad (9.53)$$

$$\omega_3^0 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \quad (9.54)$$

lösen, um die Euler-Winkel  $\phi(t)$ ,  $\theta(t)$  und  $\psi(t)$  zu erhalten. An dieser Stelle ist es sinnvoll, ein spezielles Koordinatensystem in  $S_L$  zu wählen, nämlich eines mit  $\hat{z}_L \parallel \vec{L} = \text{const}$ . Wir kennen die Darstellung von  $\hat{z}_L$  in körperfesten Koordinaten aus Gl. (9.16),

$$\hat{z}_L = \sin \theta \sin \psi \hat{x} + \sin \theta \cos \psi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}. \quad (9.55)$$

Wegen  $\vec{L} = L \hat{z}_L$  lauten die Drehimpulskomponenten bzgl. der Hauptträgheitsachsen  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$  daher

$$\begin{aligned} L_1 &= L \sin \theta \sin \psi, \\ L_2 &= L \sin \theta \cos \psi, \\ L_3 &= L \cos \theta. \end{aligned} \quad (9.56)$$

Mit  $\vec{L} = \overleftrightarrow{J} \vec{\omega}$  erhalten wir

$$\begin{aligned} L \sin \theta \sin \psi &= J_1 \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + J_1 \dot{\theta} \cos \psi, \\ L \sin \theta \cos \psi &= J_1 \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - J_1 \dot{\theta} \sin \psi, \\ L \cos \theta &= J_3 \dot{\phi} \cos \theta + J_3 \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (9.57)$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit  $\cos \psi$  und die zweite mit  $\sin \psi$  und subtrahieren die zweite von der ersten, so erhalten wir

$$0 = J_1 \dot{\theta} (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi) = J_1 \dot{\theta}. \quad (9.58)$$

Es folgt, für unsere Wahl des Labor-Koordinatensystems,

$$\theta = \text{const} =: \theta_0 \quad (9.59)$$

und damit aus den Gleichungen (9.52)–(9.54)

$$\alpha \sin(\Omega t + \beta) = \dot{\phi} \sin \theta_0 \sin \psi, \quad (9.60)$$

$$\alpha \cos(\Omega t + \beta) = \dot{\phi} \sin \theta_0 \cos \psi, \quad (9.61)$$

$$\omega_3^0 = \dot{\phi} \cos \theta_0 + \dot{\psi}. \quad (9.62)$$

Aus den ersten beiden Gleichungen (9.60), (9.61) folgt

$$\alpha \sin(\Omega t + \beta) \cos \psi - \alpha \cos(\Omega t + \beta) \sin \psi = 0 \quad (9.63)$$

$$\Rightarrow \alpha \sin(\Omega t + \beta - \psi) = 0 \quad (9.64)$$

mit den beiden wesentlich verschiedenen Lösungen

$$\psi = \begin{cases} \Omega t + \beta, \\ \Omega t + \beta + \pi. \end{cases} \quad (9.65)$$

Aus der dritten Gleichung (9.62) erhalten wir schließlich

$$\omega_3^0 - \dot{\psi} = \omega_3^0 - \Omega = \dot{\phi} \cos \theta_0 \quad (9.66)$$

$$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{\omega_3^0 - \Omega}{\cos \theta_0} = \frac{J_3}{J_1} \frac{\omega_3^0}{\cos \theta_0} = \text{const} \quad (9.67)$$

$$\Rightarrow \phi = \phi_0 + \frac{J_3}{J_1} \frac{\omega_3^0}{\cos \theta_0} t. \quad (9.68)$$

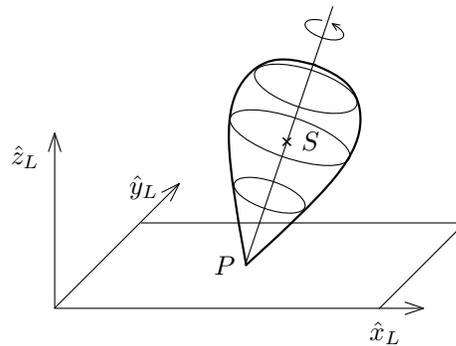
Setzen wir in Gl. (9.61) speziell  $\Omega t + \beta = 0$ , so ergibt sich

$$\alpha = \dot{\phi} \sin \theta_0 (\pm 1) = \pm \frac{J_3}{J_1} \omega_3^0 \tan \theta_0, \quad (9.69)$$

wobei die beiden Vorzeichen von den beiden Lösungen für  $\psi(t)$  in Gl. (9.65) stammen. Diese Gleichung legt  $\alpha$  fest. Unsere Ergebnisse für die Euler-Winkel enthalten also nur die vier freien Parameter  $\omega_3^0$ ,  $\beta$ ,  $\theta_0$  und  $\phi_0$ . Es gibt eigentlich sechs freie Parameter, aber über zwei haben wir bei der Festlegung der Richtung von  $\hat{z}_L$  verfügt. Man kann nun die Bewegung im Laborsystem als Abrollen eines Kegels auf einem anderen Kegel verstehen. Dazu sei auf die Literatur verwiesen. Hier soll nur hervorgehoben werden, dass sich die Figurenachse  $\hat{z}$  mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\phi} = (J_3/J_1) \omega_3^0 / \cos \theta_0$  und unter konstantem Kippwinkel  $\theta_0$  um die feste Drehimpulsrichtung dreht.

## 9.4 Der schwere Kreisel

Der einfachste Fall, in dem das Drehmoment nicht verschwindet, ist der Kreisel mit einem festgehaltenen Punkt  $P$  im homogenen Schwerfeld. Jetzt hängen die Komponenten des Drehmoments im körperfesten System natürlich von der Orientierung des Körpers ab. Wir können die Euler-Gleichungen also nicht mehr unabhängig von den Gleichungen für  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  lösen. Stattdessen gehen wir direkt von den Lagrange-Gleichungen für die generalisierten Koordinaten  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  aus.



### 9.4.1 Die Lagrange-Gleichungen für die Euler-Winkel

In Abschnitt 8.2 hatten wir gesehen, dass die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \overset{\leftrightarrow}{J} \vec{\omega} = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 \quad (9.70)$$

beträgt. Dafür können wir nun schreiben

$$T = \frac{1}{2} J_1 (\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)^2 + \frac{1}{2} J_2 (\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)^2 + \frac{1}{2} J_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2. \quad (9.71)$$

Für einen symmetrischen Kreisel mit  $J_1 = J_2$  vereinfacht sich dies zu

$$T = \frac{1}{2} J_1 (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} J_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2. \quad (9.72)$$

Zur Bestimmung des Potentials wählen wir die  $\hat{z}_L$ -Achse entgegen der Gewichtskraft gerichtet. Das Potential ist offenbar

$$V(\phi, \theta, \psi) = MgZ_L, \quad (9.73)$$

wobei  $M$  die Gesamtmasse und  $Z_L$  die  $z$ -Koordinate des Schwerpunktes  $S$  bzw. die  $z$ -Komponente des Schwerpunktsvektors  $\vec{R}$  im Laborsystem  $S_L$  sind. Die Komponenten von  $\vec{R}$  transformieren sich nach

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \overset{\leftrightarrow}{R}^T \begin{pmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \end{pmatrix} = \overset{\leftrightarrow}{R} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}. \quad (9.74)$$

Die Komponenten  $X, Y, Z$  im körperfesten System sind natürlich konstant. Damit erhalten wir

$$Z_L = X \sin \theta \sin \psi + Y \sin \theta \cos \psi + Z \cos \theta \quad (9.75)$$

und

$$V = Mg(X \sin \theta \sin \psi + Y \sin \theta \cos \psi + z \cos \theta). \quad (9.76)$$

Für einen symmetrischen Kreisel ist die Strecke  $\overline{PS}$  zwischen raumfestem Punkt  $P$  und Schwerpunkt  $S$  parallel zur Figurenachse  $\hat{z}$ . Dann gilt  $X = Y = 0$  und

$$V = Mgl \cos \theta, \quad (9.77)$$

wobei  $\ell = Z$  der Abstand zwischen  $P$  und  $S$  ist. Die Lagrange-Funktion lautet demnach für einen symmetrischen schweren Kreisel

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} J_1 (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} J_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - Mgl \cos \theta. \quad (9.78)$$

### 9.4.2 Der symmetrische schwere Kreisel

Wir erkennen, dass für den symmetrischen Kreisel im Schwerfeld die Winkel  $\phi$  und  $\psi$  zyklisch sind. Damit finden wir zwei Erhaltungsgrößen:

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = J_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + J_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta = \text{const} \quad (9.79)$$

und

$$p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = J_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) = J_3 \omega_3 = \text{const}. \quad (9.80)$$

In  $p_\psi$  erkennen wir sofort die Drehimpulskomponente  $L_3$  entlang der Figurenachse  $\hat{z}$  im körperfesten System.  $p_\phi$  ist die Drehimpulskomponente  $L_{L3}$  entlang der Senkrechten  $\hat{z}_L$  im Laborsystem. Das können wir mit Hilfe der allgemeinen Transformation für Vektorkomponenten erkennen: Es ist

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \overset{\leftrightarrow}{R}^T \begin{pmatrix} L_{L1} \\ L_{L2} \\ L_{L3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} L_{L1} \\ L_{L2} \\ L_{L3} \end{pmatrix} = \overset{\leftrightarrow}{R} \begin{pmatrix} J_1 \omega_1 \\ J_1 \omega_2 \\ J_3 \omega_3 \end{pmatrix}, \quad (9.81)$$

also

$$\begin{aligned} L_{L3} &= \sin \theta \sin \psi J_1 \omega_1 + \sin \theta \cos \psi J_1 \omega_2 + \cos \theta J_3 \omega_3 \\ &= J_1 (\dot{\phi} \sin^2 \theta \sin^2 \psi + \dot{\theta} \sin \theta \sin \psi \cos \psi + \dot{\phi} \sin^2 \theta \cos^2 \psi - \dot{\theta} \sin \theta \sin \psi \cos \psi) + J_3 (\dot{\phi} \cos^2 \theta + \dot{\psi} \cos \theta) \\ &= J_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + J_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta = p_\phi. \end{aligned} \quad (9.82)$$

Es folgt auch aus dem Noether-Theorem, dass die Komponente  $L_{L3}$  erhalten sein muss. Wir finden also:  $\psi$  ist der Drehwinkel um die  $z$ -Achse im körperfesten System, der zu  $\psi$  konjugierte Impuls ist der Drehimpuls um diese Achse.  $\phi$  ist der Drehwinkel um die  $z_L$ -Achse im Laborsystem, der zu  $\phi$  konjugierte Impuls ist der Drehimpuls um diese Achse.

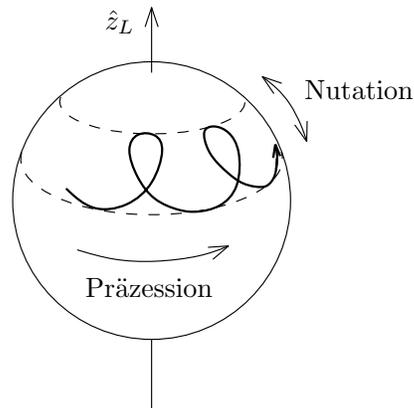
Da außerdem die Schwerkraft konservativ ist und die Zwangsbedingungen (raumfester Punkt!) holonom-skleronom sind, gilt  $H = E$ . Mit  $\partial \mathcal{L} / \partial t = 0$  folgt Energieerhaltung,

$$E = T + V = \frac{1}{2} J_1 (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} J_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 + Mgl \cos \theta = \text{const}. \quad (9.83)$$

Trotz der Existenz von drei Erhaltungsgrößen lassen sich die Bewegungsgleichungen für  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  nur numerisch integrieren. (Für  $\theta(t)$  lässt sich eine geschlossene Lösung finden, die eine spezielle Funktion, eine sogenannte elliptische Funktion, enthält.) Das Ergebnis ist eine Überlagerung von drei Bewegungen:

1. Der Kreisel rotiert um seine Figurenachse, beschrieben durch  $\psi(t)$ .
2. Die Figurenachse bewegt sich um die Senkrechte  $\hat{z}_L$  im Laborsystem herum, beschrieben durch  $\phi(t)$ . Diese Bewegung nennt man *Präzession*.
3. Der Winkel  $\theta(t)$  zwischen Figurenachse und Senkrechter ändert sich periodisch. Diese Bewegung heißt *Nutation*. Sie darf nicht mit der freien Nutation für den kräftefreien Kreisel verwechselt werden.

Die Kugelkoordinaten der Figurenachse  $\hat{z}$  im Laborsystem sind  $\phi$  und  $\theta$ . Durch Auftragen von  $\hat{z}(t)$  auf der Einheitskugel kann man die Präzession und Nutation darstellen. Ein typischer Fall sei hier skizziert:



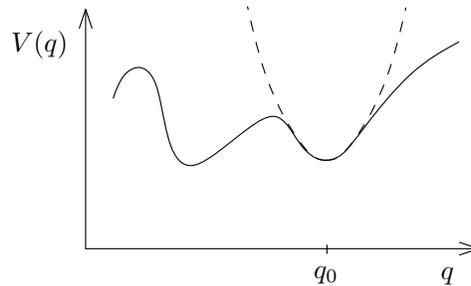
# Kapitel 10

## Lineare Schwingungen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit linearen Schwingungen in einer und in mehreren Koordinaten. „Linear“ bedeutet dabei, dass die rücktreibenden Kräfte proportional zu den Auslenkungen sein sollen, d.h. das *Hooke'sche Gesetz* gilt. Die große Bedeutung von linearen Schwingungen lässt sich schon für den Fall eines einzigen Freiheitsgrades verstehen: Ein konservatives, holonom-skleronomes System mit einem Freiheitsgrad  $q$  habe die Lagrange-Funktion

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q), \quad (10.1)$$

wobei insbesondere das Potential  $V$  eine beliebig komplizierte Funktion von  $q$  sein kann. ( $V$  hängt nicht von  $\dot{q}$  ab, da wir ein konservatives System betrachten.)



Die wesentliche Annahme ist nun, dass die Auslenkung  $q - q_0$  aus einem Potentialminimum  $q_0$  *klein* ist. Dann können wir  $V(q)$  um  $q_0$  in eine Taylor-Reihe entwickeln,

$$V(q) = V(q_0) + \frac{1}{2} \underbrace{V''(q_0)}_{=: \kappa} (q - q_0)^2 + \mathcal{O}((q - q_0)^3) \quad (10.2)$$

und Terme dritter und höherer Ordnung vernachlässigen. Der lineare Term verschwindet, da wir um ein Minimum entwickeln. Die Näherung

$$V(q) \cong V(q_0) + \frac{1}{2} \kappa (q - q_0)^2 \quad (10.3)$$

ist aber nur dann gut, wenn  $V''(q_0) = \kappa$  nicht verschwindet. Auf einem Potential der Form  $V(q) = \alpha q^4$  ist die hier entwickelte Theorie linearer Schwingungen nicht anwendbar. Das Verschwinden von  $\kappa$  erfordert aber einen Grund; für „generische“ Funktionen gilt  $\kappa > 0$  an einem Minimum.

In Abschnitt 5.9 hatten wir gesehen, dass unter den hier gemachten Annahmen die kinetische Energie eine homogene Funktion zweiten Grades in  $\dot{q}$  ist, also

$$T = \frac{1}{2} \mu(q) \dot{q}^2. \quad (10.4)$$

Die Abhängigkeit von  $q$ , die im Faktor  $\mu(q)$  steckt, kann kompliziert sein. Sind aber die Auslenkungen klein, so sind auch die Geschwindigkeiten klein (das können wir im Nachhinein anhand der gefundenen Lösung überprüfen).

Da nun  $T$  bereits explizit von zweiter Ordnung in der kleinen Größe  $\dot{q}$  ist, können und müssen wir  $\mu(q)$  nur in *nullter* Ordnung in  $q$  mitnehmen, also

$$T \cong \frac{1}{2} \mu(q_0) \dot{q}^2 =: \frac{1}{2} \mu \dot{q}^2. \quad (10.5)$$

Damit können wir  $L(q, \dot{q})$  bis zur 2. Ordnung in den kleinen Größen  $q$  und  $\dot{q}$  entwickeln. Um Schreibarbeit zu sparen, verschieben wir die generalisierte Koordinate  $q$  so, dass  $q_0 = 0$  gilt. Dann ist

$$L(q, \dot{q}) \cong \underbrace{L(0, 0)}_{\substack{\text{irrelevante} \\ \text{Konstante}}} + \frac{1}{2} \mu \dot{q}^2 - \frac{1}{2} \kappa q^2. \quad (10.6)$$

Die Lagrange-Gleichung 2. Art ist

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \mu \ddot{q} + \kappa q = 0, \quad (10.7)$$

also

$$\ddot{q} = -\frac{\kappa}{\mu} q. \quad (10.8)$$

Das ist die Bewegungsgleichung eines *harmonischen Oszillators*, sofern  $\mu, \kappa > 0$  gilt, was wir jetzt annehmen werden. Bei einem Federpendel wäre  $\mu$  die Masse und  $\kappa$  die Federkonstante.

Ein analoges Ergebnis erhalten wir auch für mehrere Freiheitsgrade, wie wir später sehen werden: Für kleine Auslenkungen um ein Potentialminimum führt ein System lineare Schwingungen aus. Es wurde bereits angedeutet, dass diese Erkenntnis auch in der Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie von zentraler Bedeutung ist.

## 10.1 Der harmonische Oszillator

### 10.1.1 Der freie gedämpfte Oszillator

Wir beginnen mit einer Wiederholung zum harmonischen Oszillator in einer Dimension. Wir verwenden dem Federpendel angepasste Bezeichnungen, aber die obige Diskussion zeigt, dass die Ergebnisse von sehr viel allgemeinerer Bedeutung sind. Zusätzlich zur Lagrange-Funktion

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \quad (10.9)$$

mit der Masse  $m$  und der Federkonstanten  $k$  führen wir eine Dissipationsfunktion  $P$  ein, um Reibungseffekte zu berücksichtigen. Wir nehmen Stokessche Reibung an, dann gilt nach Abschnitt 6.1

$$P = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2. \quad (10.10)$$

Die Bewegungsgleichung lautet

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial \dot{x}} = m \ddot{x} + kx + \alpha \dot{x} = 0. \quad (10.11)$$

Mit den Abkürzungen

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{und} \quad \gamma := \frac{\alpha}{2m} \quad (10.12)$$

erhalten wir die Gleichung

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (10.13)$$

Mit dem Ansatz

$$x = Ae^{\lambda t} \quad (10.14)$$

folgt die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (10.15)$$

mit den beiden Lösungen

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (10.16)$$

Für  $\gamma = \omega_0$  erhalten wir tatsächlich nur *eine* Lösung, da dann  $\lambda_+ = \lambda_-$  gilt. Diesen Fall werden wir gesondert zu behandeln haben. Ist  $\gamma \neq \omega_0$ , so finden wir die allgemeine Lösung

$$x(t) = A_+ e^{\lambda_+ t} + A_- e^{\lambda_- t} = A_+ e^{-\gamma t + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + A_- e^{-\gamma t - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t}. \quad (10.17)$$

Wir können nun folgende Fälle unterscheiden:

1. *Schwingfall*:  $\gamma < \omega_0$ . Hier ist  $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$  imaginär und wir definieren

$$\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \in \mathbb{R}. \quad (10.18)$$

Die allgemeine Lösung lautet nun

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A_+ e^{i\omega t} + A_- e^{-i\omega t}). \quad (10.19)$$

Mit den Anfangsbedingungen

$$x(0) = x_0, \quad (10.20)$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \quad (10.21)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} x_0 &= A_+ + A_-, \\ v_0 &= -\gamma \underbrace{(A_+ + A_-)}_{x_0} + i\omega A_+ - i\omega A_- \end{aligned} \quad (10.22)$$

und daraus

$$A_{\pm} = \frac{x_0}{2} \pm \frac{v_0 + \gamma x_0}{2i\omega} \quad (10.23)$$

und schließlich

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t} \left[ \left( \frac{x_0}{2} + \frac{v_0 + \gamma x_0}{2i\omega} \right) e^{i\omega t} + \left( \frac{x_0}{2} - \frac{v_0 + \gamma x_0}{2i\omega} \right) e^{-i\omega t} \right] \\ &= e^{-\gamma t} \left( x_0 \cos \omega t + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega} \sin \omega t \right). \end{aligned} \quad (10.24)$$

Mit

$$A := \sqrt{x_0^2 + \left( \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega} \right)^2} \quad (10.25)$$

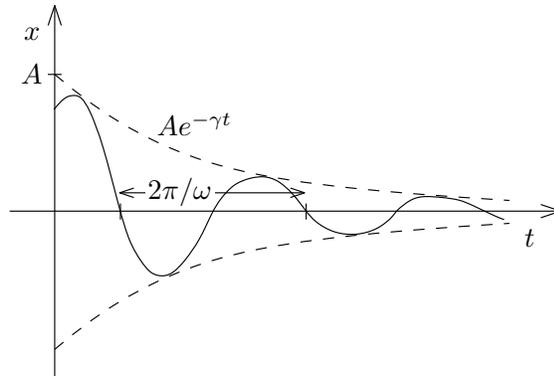
und

$$\tan \phi_0 := \frac{\omega x_0}{v_0 + \gamma x_0} \quad (10.26)$$

können wir auch schreiben

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi_0). \quad (10.27)$$

Offensichtlich ist die Lösung eine gedämpfte harmonische Schwingung mit der *Dämpfungs-konstante*  $\gamma = \alpha/2m$  und der Frequenz  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ , die gegenüber dem ungedämpften Fall reduziert ist.



2. *Kriechfall*:  $\gamma > \omega_0$ . Nun ist  $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$  reell. Die allgemeine Lösung ist schon bekannt,

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left( A_+ e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + A_- e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right). \quad (10.28)$$

Aus den Anfangsbedingungen  $x(0) = x_0$  und  $\dot{x}(0) = v_0$  folgt

$$x_0 = A_+ + A_-, \quad (10.29)$$

$$v_0 = -\gamma \underbrace{(A_+ + A_-)}_{x_0} + (A_+ - A_-) \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (10.30)$$

und daraus

$$A_{\pm} = \frac{x_0}{2} \pm \frac{v_0 + \gamma x_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \quad (10.31)$$

und schließlich

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[ \left( \frac{x_0}{2} + \frac{v_0 + \gamma x_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \right) e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + \left( \frac{x_0}{2} - \frac{v_0 + \gamma x_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \right) e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right]. \quad (10.32)$$

Es handelt sich um die Superposition zweier exponentieller Zerfälle mit Zerfallskonstanten

$$\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} > 0 \quad (10.33)$$

und

$$\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} > \gamma. \quad (10.34)$$

Jeder Term für sich hat natürlich keine Nullstellen. Die Gesamtlösung kann höchstens eine Nullstelle haben, wenn die Koeffizienten  $A_+$ ,  $A_-$  entgegengesetzte Vorzeichen haben.

3. *Aperiodischer Grenzfall*:  $\gamma = \omega_0$ . In diesem Fall kennen wir erst die *eine* Lösung  $e^{-\gamma t}$ . Eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung muss aber zwei unabhängige Lösungen haben.

Die Bewegungsgleichung lautet in diesem Fall

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \gamma^2 x = 0. \quad (10.35)$$

Eine Lösung ist  $x_1 = e^{-\gamma t}$ . Eine zweite Lösung erhalten wir z.B. durch die Variation der Konstanten mit dem Ansatz

$$x_2(t) = f(t)e^{-\gamma t}. \quad (10.36)$$

Einsetzen ergibt

$$\cancel{f} - \cancel{2\gamma f} + \gamma^2 \cancel{f} + \cancel{2\gamma f} - \cancel{2\gamma^2 f} + \gamma^2 \cancel{f} = 0 \quad (10.37)$$

$$\Rightarrow \ddot{f} = 0 \quad (10.38)$$

$$\Rightarrow f = at + b. \quad (10.39)$$

Eine von  $x_1$  unabhängige Lösung ist

$$x_2 = te^{-\gamma t}. \quad (10.40)$$

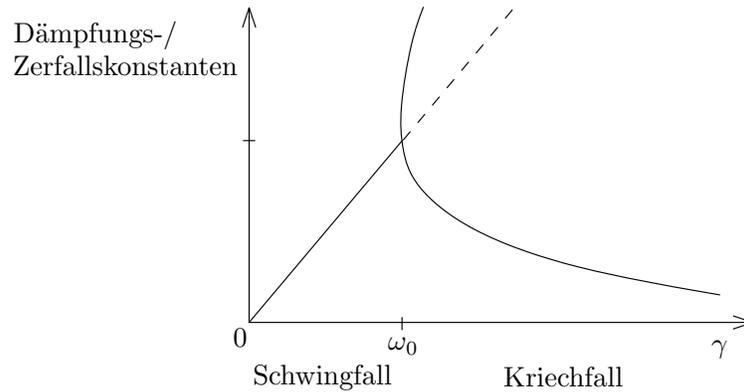
Die allgemeine Lösung lautet somit

$$x(t) = A_1 e^{-\gamma t} + A_2 t e^{-\gamma t}. \quad (10.41)$$

Mit den Anfangsbedingungen  $x(0) = x_0$  und  $\dot{x}(0) = v_0$  erhalten wir

$$x(t) = [x_0 + (v_0 + \gamma x_0)t] e^{-\gamma t}. \quad (10.42)$$

Interessanterweise ist die Annäherung von  $x \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$  im aperiodischen Grenzfall am *schnellsten*. Im Kriechfall wird der Abfall für große Zeiten nämlich von der kleineren Zerfallskonstanten  $\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} < \gamma$  bestimmt.



### 10.1.2 Der angetriebene harmonische Oszillator: Methode der Green-Funktionen

Das Verhalten eines periodisch angetriebenen harmonischen Oszillators ist aus der Experimentalphysik bekannt. Anstatt hier die Ergebnisse zu wiederholen, entwickeln wir eine allgemeinere Methode, die beliebige rein zeitabhängige antreibende Kräfte zu behandeln gestattet. Dies ist die Methode der Green-Funktionen, die in vielen Zusammenhängen in der Physik von großer Bedeutung ist.

Wir lösen zunächst ein *Hilfsproblem*: Wie reagiert ein anfangs ruhender harmonischer Oszillator auf einen *Kraftstoß* der Stärke eins? Die entsprechende Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \delta(t) \quad (10.43)$$

mit  $x = 0$  und  $\dot{x} = 0$  für  $t < 0$ . Integration über ein kleines Zeitintervall  $[-\epsilon, \epsilon]$  ergibt

$$\dot{x}(\epsilon) - \underbrace{\dot{x}(-\epsilon)}_{=0} + 2\gamma x(\epsilon) - \underbrace{2\gamma x(-\epsilon)}_{=0} + \omega_0^2 \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dt x(t) = 1. \quad (10.44)$$

Im Grenzfall  $\epsilon \rightarrow 0^+$  (d.h. von  $\epsilon > 0$  kommend) erhalten wir

$$\dot{x}(0^+) + 2\gamma x(0^+) = 1. \quad (10.45)$$

Da sich der Ort  $x$  nicht sprunghaft ändert, ist  $x(0^+) = x(0^-) = 0$ , also

$$\dot{x}(0^+) = 1. \quad (10.46)$$

Damit reduziert sich das Problem für  $t > 0$  auf ein bekanntes: Die Bewegungsgleichung lautet [da  $\delta(t) = 0$  für  $t > 0$ ]

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (10.47)$$

mit Anfangsbedingungen  $x(0) = 0$  und  $\dot{x}(0) = 1$ . Die Lösung haben wir im vorigen Abschnitt gefunden. Wir nennen diese Lösung jetzt die *Green-Funktion* des harmonischen Oszillators und bezeichnen sie mit  $G(t)$ ,

$$G(t) = \begin{cases} \frac{1}{\omega} e^{-\gamma t} \sin \omega t & \text{für } \gamma < \omega_0, \text{ mit } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \\ t e^{-\gamma t} & \text{für } \gamma = \omega_0, \\ \frac{1}{\Gamma} e^{-\gamma t} \sinh \Gamma t & \text{für } \gamma > \omega_0, \text{ mit } \Gamma = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \end{cases} \quad (10.48)$$

jeweils für  $t \geq 0$  sowie  $G(t) = 0$  für  $t \leq 0$ .

Nun betrachten wir eine *beliebige* zeitabhängige Kraft,

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \quad (10.49)$$

mit

$$f(t) := \frac{F(t)}{m}. \quad (10.50)$$

Die allgemeine Lösung ist die Summe der *allgemeinen* Lösung der *homogenen* Gleichung, die wir schon kennen, und einer *speziellen* Lösung der *inhomogenen* Gleichung. Um diese zu finden, denken wir uns die Kraft  $f(t)$  als aus unendlich vielen infinitesimalen Kraftstößen zusammengesetzt,

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') \delta(t - t'). \quad (10.51)$$

Jeder einzelne Kraftstoß würde zu einer Bewegung  $x(t) = f(t')G(t - t')$  führen; das ist das obige Resultat für einen Kraftstoß der Stärke  $f(t')$  statt eins, verschoben nach  $t'$ . Die Superposition dieser Lösungen lautet

$$x_{\text{spz}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') G(t - t'). \quad (10.52)$$

Wir zeigen, dass  $x_{\text{spz}}(t)$  tatsächlich die Bewegungsgleichungen erfüllt:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{\text{spz}} + 2\gamma\dot{x}_{\text{spz}} + \omega_0^2 x_{\text{spz}} &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') G''(t - t') + 2\gamma \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') G'(t - t') + \omega_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') G(t - t') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') [G''(t - t') + 2\gamma G'(t - t') + \omega_0^2 G(t - t')] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') \delta(t - t') = f(t). \end{aligned} \quad (10.53)$$

Da die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung exponentiell gedämpft ist, bleibt nach einer gewissen Zeit („Einschwingvorgang“, „Transienten“) nur diese spezielle Lösung übrig.

Beispiel: Harmonisch angetriebener harmonischer Oszillator. Hier ist

$$f(t) = f_0 \cos \Omega t. \quad (10.54)$$

Die spezielle Lösung ist dann

$$x_{\text{spz}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' f_0 \cos \Omega t' G(t - t'). \quad (10.55)$$

Zum Beispiel im Schwingfall ist dies

$$x_{\text{spz}}(t) = \frac{f_0}{\omega} \int_{-\infty}^t dt' \cos \Omega t' e^{-\gamma(t-t')} \sin \omega(t-t'). \quad (10.56)$$

Mit der Substitution  $\tau := t - t'$  erhalten wir

$$x_{\text{spz}}(t) = \frac{f_0}{\omega} \int_0^{\infty} d\tau \cos \Omega(t - \tau) e^{-\gamma\tau} \sin \omega\tau$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f_0}{\omega} \int_0^\infty d\tau e^{-\gamma\tau} (\cos \Omega t \cos \Omega\tau + \sin \Omega t \sin \Omega\tau) \sin \omega\tau \\
&= \frac{f_0}{2\omega} \int_0^\infty d\tau e^{-\gamma\tau} [\cos \Omega t \sin(\Omega + \omega)\tau - \cos \Omega t \sin(\Omega - \omega)\tau + \sin \Omega t \cos(\Omega - \omega)\tau - \sin \Omega t \cos(\Omega + \omega)\tau] \\
&= \frac{f_0}{2\omega} \left( \cos \Omega t \frac{\Omega + \omega}{\gamma^2 + (\Omega + \omega)^2} - \cos \Omega t \frac{\Omega - \omega}{\gamma^2 + (\Omega - \omega)^2} + \sin \Omega t \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\Omega - \omega)^2} - \sin \Omega t \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\Omega + \omega)^2} \right) \\
&= \frac{f_0}{2\omega} \left( \frac{2\omega(\gamma^2 - \Omega^2 + \omega^2)}{(\gamma^2 + \Omega^2 + \omega^2)^2 - 4\Omega^2\omega^2} \cos \Omega t + \frac{4\gamma\Omega\omega}{(\gamma^2 + \Omega^2 + \omega^2)^2 - 4\Omega^2\omega^2} \sin \Omega t \right) \\
&= f_0 \left( \frac{\gamma^2 - \Omega^2 + \omega^2}{(\gamma^2 + \Omega^2 + \omega^2)^2 - 4\Omega^2\omega^2} \cos \Omega t + \frac{2\gamma\Omega}{(\gamma^2 + \Omega^2 + \omega^2)^2 - 4\Omega^2\omega^2} \sin \Omega t \right). \tag{10.57}
\end{aligned}$$

Wegen

$$(\gamma^2 - \Omega^2 + \omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2 = (\gamma^2 + \Omega^2 + \omega^2)^2 - 4\Omega^2\omega^2 \tag{10.58}$$

existiert ein Phasenwinkel  $\alpha$  mit

$$\cos \alpha = \frac{\gamma^2 - \Omega^2 + \omega^2}{\sqrt{(\gamma^2 + \Omega^2 + \omega^2)^2 - 4\Omega^2\omega^2}}, \tag{10.59}$$

$$\sin \alpha = -\frac{2\gamma\Omega}{\sqrt{(\gamma^2 + \Omega^2 + \omega^2)^2 - 4\Omega^2\omega^2}}, \tag{10.60}$$

also

$$\tan \alpha = -\frac{2\gamma\Omega}{\gamma^2 - \Omega^2 + \omega^2}. \tag{10.61}$$

Damit wird

$$\begin{aligned}
x_{\text{spz}}(t) &= \frac{f_0}{\sqrt{(\gamma^2 + \Omega^2 + \omega^2)^2 - 4\Omega^2\omega^2}} (\cos \alpha \cos \Omega t - \sin \alpha \sin \Omega t) \\
&= \frac{f_0}{\sqrt{(\gamma^2 + \Omega^2 + \omega^2)^2 - 4\Omega^2\omega^2}} \cos(\Omega t + \alpha). \tag{10.62}
\end{aligned}$$

Der harmonisch angetriebene harmonische Oszillator schwingt also, nach Abklingen der Transienten, mit der Frequenz der antreibenden Kraft, aber mit einer Phasenverschiebung von  $\alpha$  gegenüber dieser. Die Amplitude ist

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\gamma^2 + \Omega^2 + \omega^2)^2 - 4\Omega^2\omega^2}} \tag{10.63}$$

also insbesondere im Grenzfall verschwindender Dämpfung,  $\gamma \rightarrow 0$ ,

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{\Omega^4 + 2\Omega^2\omega_0^2 + \omega_0^4 - 4\Omega^2\omega_0^2}} = \frac{f_0}{\sqrt{\Omega^4 - 2\Omega^2\omega_0^2 + \omega_0^4}} = \frac{f_0}{|\Omega^2 - \omega_0^2|}. \tag{10.64}$$

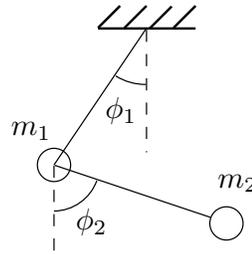
Wir finden die bekannte *Resonanzkatastrophe*: Beim Antrieb mit der Eigenfrequenz divergiert die Amplitude. Unser Resultat für  $x_{\text{spz}}(t)$  ist dann nicht sinnvoll. Tatsächlich geht die Rechnung für  $\gamma = 0$  und  $\Omega = \omega_0$  wegen Faktoren der Art  $1/(\Omega - \omega_0)$  nicht durch. Die korrekte Lösung ist eine Oszillation mit linear mit der Zeit anwachsender Amplitude.

## 10.2 Gekoppelte Schwingungen

In diesem Abschnitt betrachten wir Schwingungen in Systemen mit mehreren ( $S > 1$ ) gekoppelten Freiheitsgraden. Wir werden uns auf *konservative* Systeme mit höchstens holonom-skleronomen Zwangsbedingungen beschränken. Die Annahme von Konservativität schließt insbesondere Reibungskräfte aus. Die hier betrachteten Schwingungen sind also ungedämpft und die mechanische Energie ist erhalten. Außerdem sollen die Auslenkungen gegenüber den Ruhelagen in allen Freiheitsgraden so klein sein, dass wir die Entwicklung des Potentials nach diesen Auslenkungen nach der zweiten Ordnung abbrechen können.

Beispiele:

- Ebenes Doppelpendel:



Hier existieren  $S = 2$  generalisierte Koordinaten  $\phi_1, \phi_2$ .

- Elastischer Körper: In realen Festkörpern sind die Abstände der Kerne, die den Großteil der Masse tragen, nicht konstant, sondern können um einen Gleichgewichtswert schwingen. Im Vergleich zum starren Körper ist also ein System aus Massenpunkten verbunden durch ideale Federn ein realistischeres Modell. Für  $N$  Massenpunkte gibt es  $S = 3N - 6$  Schwingungsfreiheitsgrade, die übrigen sechs sind die Freiheitsgrade der starren Translation und Rotation.

Unter den angegebenen Bedingungen können wir näherungsweise schreiben, siehe auch Gl. (5.148),

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^S \mu_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (10.65)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^S \kappa_{ij} q_i q_j \quad (10.66)$$

und damit für die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ij} (\mu_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \kappa_{ij} q_i q_j). \quad (10.67)$$

Die Koeffizienten können symmetrisch gewählt werden:  $\mu_{ji} = \mu_{ij}$  und  $\kappa_{ji} = \kappa_{ij}$ . Die Lagrange-Gleichungen lauten

$$\sum_j (\mu_{ij} \ddot{q}_j + \kappa_{ij} q_j) = 0 \quad (10.68)$$

für  $i = 1, 2, \dots, S$ .

Dieses System von linearen Differentialgleichungen lösen wir mit dem komplexen Exponentialansatz

$$q_j = a_j e^{i\omega t}. \quad (10.69)$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichungen ergibt

$$\sum_j (\kappa_{ij} - \omega^2 \mu_{ij}) a_j = 0, \quad i = 1, \dots, S. \quad (10.70)$$

Dies sind die  $S$  Komponenten der Vektor-Gleichung

$$(\overset{\leftrightarrow}{\kappa} - \omega^2 \overset{\leftrightarrow}{\mu}) \vec{a} = 0. \quad (10.71)$$

Das ist eine *verallgemeinerte Eigenwertgleichung* für Eigenwerte  $\omega^2$  zu Eigenvektoren  $\vec{a}$ . Die Gleichung würde sich auf eine gewöhnliche Eigenwertgleichung reduzieren, wenn  $\overset{\leftrightarrow}{\mu}$  proportional zur Einheitsmatrix wäre. Wir können die Gleichung auf diese Form bringen, indem wir sie von links mit der inversen Matrix  $\overset{\leftrightarrow}{\mu}^{-1}$  multiplizieren:

$$(\overset{\leftrightarrow}{\mu}^{-1} \overset{\leftrightarrow}{\kappa} - \omega^2 \mathbb{1}) \vec{a} = 0, \quad (10.72)$$

wobei  $\overset{\leftrightarrow}{\mu}^{-1}\overset{\leftrightarrow}{\kappa}$  i.A. nicht symmetrisch ist. Die Umformung setzt natürlich voraus, dass  $\overset{\leftrightarrow}{\mu}$  nicht singulär ist, dass also  $\overset{\leftrightarrow}{\mu}^{-1}$  existiert. Man kann sich aber überlegen, dass  $\overset{\leftrightarrow}{\mu}$  nur singulär wird, wenn Deformationen des Systems existieren, bei denen keine Massen verschoben werden. Das ist in realen Systemen nie der Fall.

Lösungen für  $\vec{a} \neq 0$ , d.h. Eigenvektoren, existieren bekanntlich nur dann, wenn die charakteristische Gleichung

$$\det(\overset{\leftrightarrow}{\mu}^{-1}\overset{\leftrightarrow}{\kappa} - \omega^2 \mathbb{1}) = 0 \quad (10.73)$$

für die Eigenwerte erfüllt ist. Wegen

$$\det(\overset{\leftrightarrow}{\mu}^{-1}\overset{\leftrightarrow}{\kappa} - \omega^2 \mathbb{1}) = \det \overset{\leftrightarrow}{\mu}^{-1}(\overset{\leftrightarrow}{\kappa} - \omega^2 \overset{\leftrightarrow}{\mu}) = \det \overset{\leftrightarrow}{\mu}^{-1} \det(\overset{\leftrightarrow}{\kappa} - \omega^2 \overset{\leftrightarrow}{\mu}) = \frac{\det(\overset{\leftrightarrow}{\kappa} - \omega^2 \overset{\leftrightarrow}{\mu})}{\det \overset{\leftrightarrow}{\mu}} \quad (10.74)$$

können wir äquivalent

$$\det(\overset{\leftrightarrow}{\kappa} - \omega^2 \overset{\leftrightarrow}{\mu}) = 0 \quad (10.75)$$

fordern. Die charakteristische Gleichung legt die Eigenwerte  $\omega^2$  fest. Wir bezeichnen die Eigenwerte mit  $\omega_r^2$ ,  $r = 1, \dots, S$  und die zugehörigen Eigenvektoren mit  $\vec{a}_r$ . Die  $\omega_r^2$  müssen nicht alle verschieden sein. Man kann jedoch immer  $S$  linear unabhängige Eigenvektoren  $\vec{a}_r$  finden.

Man kann zeigen (siehe z.B. Goldsteins Buch), dass die verallgemeinerte Eigenwertgleichung

$$(\overset{\leftrightarrow}{\kappa} - \omega^2 \overset{\leftrightarrow}{\mu}) \vec{a} = 0 \quad (10.76)$$

mit reell-symmetrischen Matrizen  $\overset{\leftrightarrow}{\kappa}$  und  $\overset{\leftrightarrow}{\mu}$  ausschließlich *reelle* Eigenwerte  $\omega_r^2$  ergibt und dass man die Eigenvektoren  $\vec{a}_r$  ebenfalls *reell* wählen kann. Wir können die Eigenvektoren geeignet normieren, z.B. durch die Forderung

$$\vec{a}_r \cdot \vec{a}_r = 1. \quad (10.77)$$

Zu jedem  $\omega_r^2$  existieren offenbar zwei Wurzeln  $\pm\omega_r$ , wobei wir o.B.d.A.  $\text{Re } \omega_r \geq 0$  setzen. Zu  $\omega_r^2$  erhalten wir also die Lösung

$$\vec{q}_r(t) = c_r^+ \vec{a}_r e^{i\omega_r t} + c_r^- \vec{a}_r e^{-i\omega_r t} \quad (10.78)$$

$$\Leftrightarrow q_{rj}(t) = c_r^+ a_{rj} e^{i\omega_r t} + c_r^- a_{rj} e^{-i\omega_r t} \quad (10.79)$$

mit Koeffizienten  $c_r^\pm \in \mathbb{C}$ . Für  $\omega_r^2 < 0$  ist  $\omega_r$  imaginär und wir finden Lösungen, die für  $t \rightarrow -\infty$  oder  $t \rightarrow +\infty$  divergieren. Solche ungebundenen Lösungen sind offensichtlich nicht mit der Annahme kleiner Auslenkungen  $q_j$  vereinbar und können damit für kleine Schwingungen nicht vorkommen. (Sie treten auf, wenn wir das Potential  $V(\vec{q})$  um einen stationären Punkt entwickeln, der kein lokales Minimum ist. Dann existieren gewisse Richtungen im Konfigurationsraum, in denen es „bergab geht“.) Daher beschränken wir uns auf reelle Eigenfrequenzen  $\omega_r$ .

Damit die Lösung  $q_{rj}(t)$  reell ist, wie für eine physikalisch sinnvolle Lösung notwendig, muss

$$c_r^- = (c_r^+)^* \quad (10.80)$$

gelten. Wir können diese Koeffizienten auch durch Betrag und Phase ausdrücken,

$$c_r^\pm = \frac{C_r}{2} e^{\pm i\phi_r}. \quad (10.81)$$

Dann ist

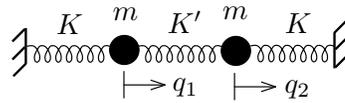
$$q_{rj}(t) = \frac{C_r}{2} a_{rj} \left( e^{i(\omega_r t + \phi_r)} + e^{-i(\omega_r t + \phi_r)} \right) = C_r a_{rj} \cos(\omega_r t + \phi_r). \quad (10.82)$$

Jede der  $S$  Lösungen nennt man eine *Normalschwingung* (oder *Eigenschwingung*) des Systems. Die allgemeine Lösung ist dann die Superposition der Normalschwingungen,

$$q_j(t) = \sum_{r=1}^S C_r a_{rj} \cos(\omega_r t + \phi_r) \quad (10.83)$$

mit beliebigen Parametern  $C_r, \phi_r \in \mathbb{R}$ . Das sind  $2S$  freie Parameter für ein System mit  $S$  Freiheitsgraden, also gerade die richtige Anzahl. Die Parameter kann man z.B. aus den  $2S$  Auslenkungen  $q_j(0)$  und Geschwindigkeiten  $\dot{q}_j(0)$  zur Zeit  $t = 0$  bestimmen.

Beispiel: Zwei gekoppelte harmonische Oszillatoren.



Die identischen Massen  $m$  seien durch ideale Federn mit der Federkonstante  $K$  an feste Wände und durch eine ideale Feder mit der Federkonstante  $K'$  aneinander gekoppelt. Die kinetische Energie lautet

$$T = \frac{1}{2}m\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{q}_2^2 \quad (10.84)$$

und die potentielle Energie (Federenergie)

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}Kq_1^2 + \frac{1}{2}K'(q_2 - q_1)^2 + \frac{1}{2}Kq_2^2 \\ &= \frac{1}{2}(K + K')q_1^2 - K'q_1q_2 + \frac{1}{2}(K + K')q_2^2 \\ &= \frac{1}{2}[(K + K')q_1^2 - K'q_1q_2 - K'q_2q_1 + (K + K')q_2^2]. \end{aligned} \quad (10.85)$$

Damit sind die Matrizen

$$\overset{\leftrightarrow}{\mu} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad (10.86)$$

$$\overset{\leftrightarrow}{\kappa} = \begin{pmatrix} K + K' & -K' \\ -K' & K + K' \end{pmatrix} \quad (10.87)$$

und die Eigenwertgleichung lautet

$$\begin{pmatrix} K + K' - m\omega^2 & -K' \\ -K' & K + K' - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (10.88)$$

Die charakteristische Gleichung lautet

$$\det \begin{pmatrix} K + K' - m\omega^2 & -K' \\ -K' & K + K' - m\omega^2 \end{pmatrix} = (K + K' - m\omega^2)^2 - (K')^2 = 0 \quad (10.89)$$

$$\Rightarrow K + K' - m\omega^2 = \pm K' \quad (10.90)$$

mit den Lösungen (Eigenwerten)

$$\omega^2 = \frac{K + K' \mp K'}{m}. \quad (10.91)$$

Wir nennen die kleinere Eigenfrequenz  $\omega_1$  und die größere  $\omega_2$ , also

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}, \quad (10.92)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K + 2K'}{m}}. \quad (10.93)$$

Die zugehörigen normierten Eigenvektoren sind

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (10.94)$$

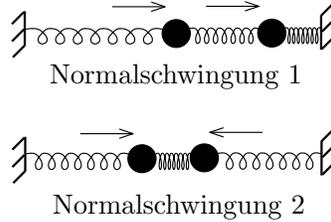
$$\vec{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (10.95)$$

Die Normalschwingungen lauten also

$$\vec{q}_1 = \frac{C_1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \phi_1), \quad (10.96)$$

$$\vec{q}_2 = \frac{C_2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \phi_2). \quad (10.97)$$

Offenbar schwingen die beiden Massen bei der ersten Normalschwingung in Phase ( $a_{11} = a_{12}$ ) und bei der zweiten gegenphasig.



Das macht verständlich, wieso bei der ersten Normalschwingung die mittlere Feder gar keine Rolle spielt – ihre Länge ändert sich überhaupt nicht. Ist  $K' \ll K$ , so sind die beiden Eigenfrequenzen ähnlich. Dann tritt in der Überlagerung  $\vec{q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2$  das aus der Experimentalphysik bekannte Phänomen der Schwebung auf.

### 10.2.1 Transformation auf Hauptkoordinaten

Es ist plausibel, dass sich die Lagrange-Funktion vereinfacht, wenn man generalisierte Koordinaten verwendet, die direkt die Normalschwingungen beschreiben. Wir führen also neue generalisierte Koordinaten, genannt *Hauptkoordinaten*,

$$Q_r = C_r \cos(\omega_r t + \phi_r), \quad r = 1, \dots, S \quad (10.98)$$

ein. Der Zusammenhang mit den alten Koordinaten lautet

$$q_j = \sum_r a_{rj} Q_r, \quad (10.99)$$

wobei  $\vec{a}_r$  die Eigenvektoren aus  $(\overset{\leftrightarrow}{\kappa} - \omega_r^2 \overset{\leftrightarrow}{\mu}) \vec{a}_r = 0$  sind. Einsetzen in die Lagrange-Funktion ergibt

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \sum_{ij} (\mu_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \kappa_{ij} q_i q_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ijrs} (\mu_{ij} a_{ri} \dot{Q}_r a_{sj} \dot{Q}_s - \kappa_{ij} a_{ri} Q_r a_{sj} Q_s) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{rs} \left( \sum_{ij} a_{ri} \mu_{ij} a_{sj} \dot{Q}_r \dot{Q}_s - \sum_{ij} a_{ri} \kappa_{ij} a_{sj} Q_r Q_s \right). \end{aligned} \quad (10.100)$$

Aufgrund der Eigenwertgleichung gilt jedoch

$$\overset{\leftrightarrow}{\kappa} \vec{a}_s = \omega_s^2 \overset{\leftrightarrow}{\mu} \vec{a}_s, \quad (10.101)$$

also ist

$$L = \frac{1}{2} \sum_{rs} \left( \sum_{ij} a_{ri} \mu_{ij} a_{sj} \dot{Q}_r \dot{Q}_s - \omega_s^2 \sum_{ij} a_{ri} \mu_{ij} a_{sj} Q_r Q_s \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{rs} \left( \sum_{ij} a_{ri} \mu_{ij} a_{sj} \right) (\dot{Q}_r \dot{Q}_s - \omega_s^2 Q_r Q_s). \quad (10.102)$$

Für zwei Eigenwerte  $\omega_r^2, \omega_s^2$  gilt nun

$$\overset{\leftrightarrow}{\kappa} \vec{a}_r = \omega_r^2 \overset{\leftrightarrow}{\mu} \vec{a}_r, \quad (10.103)$$

$$\overset{\leftrightarrow}{\kappa} \vec{a}_s = \omega_s^2 \overset{\leftrightarrow}{\mu} \vec{a}_s \quad (10.104)$$

woraus folgt

$$\vec{a}_s^T \overset{\leftrightarrow}{\kappa} \vec{a}_r = \omega_r^2 \vec{a}_s^T \overset{\leftrightarrow}{\mu} \vec{a}_r, \quad (10.105)$$

$$\vec{a}_r^T \overset{\leftrightarrow}{\kappa} \vec{a}_s = \omega_s^2 \vec{a}_r^T \overset{\leftrightarrow}{\mu} \vec{a}_s \quad (10.106)$$

und, da die Matrizen  $\overset{\leftrightarrow}{\kappa}$  und  $\overset{\leftrightarrow}{\mu}$  symmetrisch sind,

$$0 = \vec{a}_s^T \overset{\leftrightarrow}{\kappa} \vec{a}_r - \vec{a}_s^T \overset{\leftrightarrow}{\mu} \omega_r^2 \vec{a}_r = \omega_r^2 \vec{a}_s^T \overset{\leftrightarrow}{\mu} \vec{a}_r - \omega_s^2 \vec{a}_s^T \overset{\leftrightarrow}{\mu} \vec{a}_r = (\omega_r^2 - \omega_s^2) \vec{a}_s^T \overset{\leftrightarrow}{\mu} \vec{a}_r. \quad (10.107)$$

Sind  $\omega_r^2$  und  $\omega_s^2$  verschieden, so folgt für die zugehörigen Eigenvektoren

$$\vec{a}_s^T \overset{\leftrightarrow}{\mu} \vec{a}_r = 0. \quad (10.108)$$

Sind  $\omega_r^2$  und  $\omega_s^2$  dagegen gleich, obwohl  $r \neq s$  ist, sind  $\vec{a}_r$  und  $\vec{a}_s$  zumindest linear unabhängig. Man kann daher durch Linearkombination Eigenvektoren finden, die  $\vec{a}_s^T \overset{\leftrightarrow}{\mu} \vec{a}_r = 0$  erfüllen. Außerdem können wir die Eigenvektoren  $\vec{a}_r$  auch so normieren, dass gilt

$$\vec{a}_r^T \overset{\leftrightarrow}{\mu} \vec{a}_r = 1. \quad (10.109)$$

Insgesamt erhalten wir

$$\vec{a}_s^T \overset{\leftrightarrow}{\mu} \vec{a}_r = \delta_{sr} \quad \forall s, r. \quad (10.110)$$

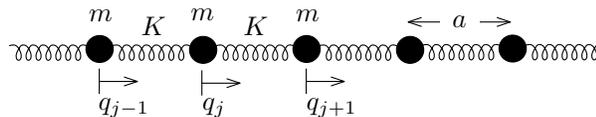
Damit wird die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^S (\dot{Q}_r^2 - \omega_r^2 Q_r^2). \quad (10.111)$$

Sie beschreibt offensichtlich  $S$  unabhängige harmonische Oszillatoren mit Eigenfrequenzen  $\omega_r$ . Die Transformation auf Hauptkoordinaten macht die Lösung aber natürlich nicht einfacher, weil wir zunächst dieselbe verallgemeinerte Eigenwertgleichung  $(\overset{\leftrightarrow}{\kappa} - \omega^2 \overset{\leftrightarrow}{\mu}) \vec{a} = 0$  lösen müssen wie zuvor.

### 10.3 Die lineare Kette

Ein besonders wichtiges Beispiel für gekoppelte Schwingungen ist die *lineare Kette* aus  $S \gg 1$  gleichen Massen  $m$  verbunden durch gleiche Federn mit der Federkonstanten  $K$ . Die lineare Kette kann z.B. als einfachstes Modell für die Gitterschwingungen in einem Kristall dienen. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass die Massen nur entlang der Kette ausgelenkt werden können (longitudinale Schwingungen).



Die Lagrange-Funktion lautet

$$L = \sum_j \left[ \frac{1}{2} m \dot{q}_j^2 - \frac{1}{2} K (q_{j+1} - q_j)^2 \right]. \quad (10.112)$$

Für lange Ketten erwarten wir, dass die Enden bei  $j = 1$  und  $j = S$  das Verhalten „im Inneren“, weit weg von den Enden kaum beeinflussen. Sind wir nur am Verhalten im Inneren interessiert, können wir die Rechnung

durch Annahme *periodischer Randbedingungen* vereinfachen. Dazu stellen wir uns die Kette geschlossen vor und identifizieren die Masse  $S + 1$  mit der Masse 1. Da dies eine Näherung für die gestreckte Kette ist, ist es nicht erforderlich, sich Gedanken über Effekte der Krümmung in einer ringförmig geschlossenen Kette zu machen.

Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_j \left[ \frac{d}{dt} m \delta_{ij} \dot{q}_j + K \delta_{i,j+1} (q_{j+1} - q_j) - K \delta_{ij} (q_{j+1} - q_j) \right] \\ &= m \ddot{q}_i + K (q_i - q_{i-1}) - K (q_{i+1} - q_i) \\ &= m \ddot{q}_i + K (2q_i - q_{i-1} - q_{i+1}) \end{aligned} \quad (10.113)$$

mit  $i = 1, \dots, S$ , wobei wir  $q_0 = q_S$  und  $q_{S+1} = q_1$  setzen. Wie können wir die  $S$  gekoppelten Bewegungsgleichungen lösen? An dieser Stelle zahlt sich die Annahme periodischer Randbedingungen aus. Die Kette ist invariant unter Translation um Vielfache der Gitterkonstanten  $a$ . Für translationsinvariante Systeme ist eine (diskrete) Fourier-Transformation oft nützlich. Wir führen daher neue generalisierte Koordinaten  $Q_k$  ein, die mit den alten gemäß

$$q_j = \frac{1}{\sqrt{S}} \sum_k Q_k e^{ikj} \quad (10.114)$$

zusammenhängen. Der Faktor  $1/\sqrt{S}$  ist ein konventioneller Normierungsfaktor. Um herauszufinden, über welche *Wellenzahlen*  $k$  wir summieren müssen, betrachten wir die Bedingung

$$q_S = q_0 \quad (10.115)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{S}} \sum_k Q_k e^{ikS} = \frac{1}{\sqrt{S}} \sum_k Q_k. \quad (10.116)$$

Damit dies für jede Wahl der  $Q_k$  gilt, muss

$$e^{ikS} = 1 \quad (10.117)$$

sein, also

$$kS = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (10.118)$$

$$\Rightarrow k = \frac{2\pi n}{S}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (10.119)$$

Es können aber nicht alle  $n \in \mathbb{Z}$  auftreten, da das System nur  $S$  Freiheitsgrade hat. Es kann also nur  $S$  unabhängige generalisierte Koordinaten  $Q_k$  geben. Um zu sehen, welche das sind, untersuchen wir die Rücktransformation

$$Q_k = \frac{1}{\sqrt{S}} \sum_{j=1}^S q_j e^{-ikj}, \quad k = \frac{2\pi n}{S}. \quad (10.120)$$

Es ist

$$Q_{k+2\pi} = \frac{1}{\sqrt{S}} \sum_j q_j e^{-ikj} \underbrace{e^{-i2\pi j}}_{=1} = Q_k. \quad (10.121)$$

$Q_k$  ist also periodisch mit der Periode  $2\pi$  (die Fourier-Transformierte einer Funktion einer diskreten Variablen ist allgemein periodisch). Wir können die Summe über  $k$  also z.B. auf  $k \in ]-\pi, \pi]$  einschränken. Dieses Intervall heißt *1. Brillouin-Zone* der linearen Kette. Dieser Begriff spielt für die physikalischen Eigenschaften von räumlich periodischen Systemen (Gittern) eine zentrale Rolle, also insbesondere in der Festkörperphysik. Damit läuft  $n$  über

$$n = -\frac{S}{2} + 1, -\frac{S}{2} + 2, \dots, \frac{S}{2}, \quad (10.122)$$

wobei wir  $S$  gerade angenommen haben. Das sind genau  $S$  verschiedene Werte von  $n$ .

Einsetzen in die Bewegungsgleichungen ergibt

$$\frac{1}{\sqrt{S}} \sum_k \left[ m \ddot{Q}_k e^{ikj} + K \left( 2Q_k e^{ikj} - Q_k e^{ik(j-1)} - Q_k e^{ik(j+1)} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{S}} \sum_k [m\ddot{Q}_k + K \underbrace{(2 - e^{-ik} - e^{ik})}_{= 2 - 2 \cos k} Q_k] e^{ikj} = 0 \quad (10.123)$$

für alle  $j$ . Die Faktoren  $e^{ikj}$  sind linear unabhängig, daher müssen die Koeffizienten jeder für sich verschwinden,

$$m\ddot{Q}_k + 2K(1 - \cos k)Q_k = 0. \quad (10.124)$$

Wir erhalten entkoppelte Gleichungen für die  $Q_k$ , die wir somit als Hauptkoordinaten der Kette identifizieren können, die deren Normalschwingungen beschreiben. Die Lösung finden wir wie üblich durch den Exponentialansatz

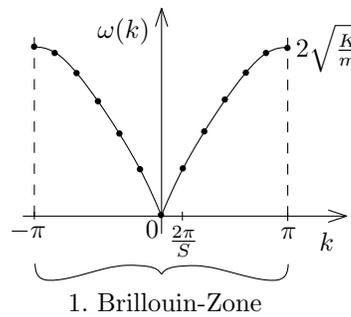
$$Q_k = e^{i\omega t}, \quad (10.125)$$

woraus folgt

$$-m\omega^2 + 2K(1 - \cos k) = 0 \quad (10.126)$$

$$\Rightarrow \omega(k) = \sqrt{\frac{K}{m}} \sqrt{2(1 - \cos k)} = \sqrt{\frac{K}{m}} \sqrt{4 \sin^2 \frac{k}{2}} = 2 \sqrt{\frac{K}{m}} \left| \sin \frac{k}{2} \right|. \quad (10.127)$$

Dies ist die *Dispersionsrelation* der linearen Kette.



Für kleine Wellenzahlen  $|k|$  ist die Dispersion offenbar linear:

$$\omega(k) \cong \sqrt{\frac{K}{m}} |k| =: c_s |k|. \quad (10.128)$$

Hier ist  $c_s$  die *Schallgeschwindigkeit* der Kette.

Die Wellenzahl  $k$  zählt hier die Normalschwingungen ab, entsprechend dem Index  $r$  in Abschnitt 10.2. Für jedes  $k$  existieren wieder zwei Lösungen  $\pm\omega$ . Die Normalschwingungen haben also die Form

$$q_{kj}(t) = \frac{1}{\sqrt{S}} Q_k^+(t) e^{ikj} + \frac{1}{\sqrt{S}} Q_k^-(t) e^{ikj} = \frac{1}{\sqrt{S}} c_k^+ e^{ikj} e^{i\omega(k)t} + \frac{1}{\sqrt{S}} c_k^- e^{ikj} e^{-i\omega(k)t} \quad (10.129)$$

mit komplexen Konstanten  $c_k^\pm$  und der angegebenen Dispersion  $\omega(k)$ . Die allgemeine Lösung ist dann die Superposition der Normalschwingungen,

$$\begin{aligned} q_j(t) &= \frac{1}{\sqrt{S}} \sum_k \left( c_k^+ e^{ikj} e^{i\omega(k)t} + c_k^- e^{ikj} e^{-i\omega(k)t} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{S}} \sum_k \left( c_{-k}^+ e^{-ikj} e^{i\omega(-k)t} + c_k^- e^{ikj} e^{-i\omega(k)t} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{S}} \sum_k \left( c_{-k}^+ e^{-i(kj - \omega(k)t)} + c_k^- e^{i(kj - \omega(k)t)} \right), \end{aligned} \quad (10.130)$$

wobei wir zunächst im ersten Term die Summationsvariable von  $k$  in  $-k$  umbenannt und dann ausgenutzt haben, dass die Funktion  $\omega(k)$  gerade ist. Damit  $q_j$  reell ist, muss  $c_k^- = (c_{-k}^+)^*$  gelten. Wir schreiben also

$$\frac{c_{-k}^+}{\sqrt{S}} = \frac{C_k}{2} e^{-i\phi_k}, \quad (10.131)$$

$$\frac{c_k^-}{\sqrt{S}} = \frac{C_k}{2} e^{i\phi_k} \quad (10.132)$$

mit reellen  $C_k$  und  $\phi_k$ . Damit wird die allgemeine Lösung schließlich

$$q_j(t) = \sum_k C_k \cos(kj - \omega(k)t + \phi_k) \quad (10.133)$$

mit

$$k = \frac{2\pi n}{S}, \quad n = -\frac{S}{2} + 1, \dots, \frac{S}{2}, \quad (10.134)$$

$$\omega(k) = 2 \sqrt{\frac{K}{m}} \left| \sin \frac{k}{2} \right|. \quad (10.135)$$

Die Normalschwingungen sind (Schall-) *Wellen* mit der Wellenzahl  $k$  und der Kreisfrequenz  $\omega(k)$ . Die spezielle Lösung für  $k = 0$  ist offenbar eine gleichförmige Auslenkung aller Massen, d.h. eine Translation der gesamten Kette. Da für diese Translation keine Rückstellkraft auftritt, ist  $\omega(0) = 0$ .

### 10.3.1 Übergang zum Kontinuum

Wir untersuchen noch, wie sich die Beschreibung beim Übergang von einer Kette aus einzelnen Massenpunkten zu einer homogenen Saite ändert. Die Massenpunkte können wir auch durch ihren Ort  $x = ja$  entlang der  $x$ -Achse abzählen. Wir schreiben also jetzt

$$q(x) \equiv q_j \quad \text{mit} \quad x = ja. \quad (10.136)$$

Wir führen auch eine *lineare Massendichte*

$$\rho := \frac{m}{a} \quad (10.137)$$

und eine *mechanische Spannung*

$$\sigma := Ka \quad (10.138)$$

ein. Die Lagrange-Funktion der Kette ist dann

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \sum_x \left[ \rho a \dot{q}(x)^2 - \frac{\sigma}{a} (q(x+a) - q(x))^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_x a \left[ \rho \dot{q}(x)^2 - \sigma \left( \frac{q(x+a) - q(x)}{a} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (10.139)$$

Der Übergang zur Saite erfolgt nun durch  $a \rightarrow 0$ ,  $S \rightarrow \infty$  mit der Gesamtlänge  $Sa = \text{const.}$  Dabei wird

$$\frac{q(x+a) - q(x)}{a} \rightarrow \frac{\partial q}{\partial x} \quad (10.140)$$

und

$$\sum_x a \rightarrow \int dx, \quad (10.141)$$

also wird die Lagrange-Funktion zu einem *Funktional* von  $q(x, t)$ ,

$$L[q, \dot{q}] = \frac{1}{2} \int dx \left[ \rho \left( \frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 - \sigma \left( \frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (10.142)$$

Man beachte die Symmetrie zwischen räumlichen und zeitlichen Ableitungen. Die Symmetrie wird noch deutlicher, wenn man die *Wirkung* aufschreibt:

$$S = \int dt dx \frac{1}{2} \left[ \rho \left( \frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 - \sigma \left( \frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (10.143)$$

In der Lagrange-Gleichung treten jetzt Ableitungen nach  $q(x)$  und  $\dot{q}(x)$  auf. Die Ableitung eines Funktionals, hier  $L[q, \dot{q}]$ , nach einer Funktion  $q(x)$  ist eine *Funktionalableitung*  $\delta L/\delta q(x)$ . Es ist plausibel, soll hier aber nicht gezeigt werden, dass die Regel

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij} \quad (10.144)$$

im Kontinuumsimes in

$$\frac{\delta q(x)}{\delta q(x')} = \delta(x - x') \quad (10.145)$$

übergeht. Damit wird die Lagrange-Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}(x)} - \frac{\delta L}{\delta q(x)} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta}{\delta \dot{q}(x)} \int dx' \frac{1}{2} \left[ \rho \left( \frac{\partial q(x', t)}{\partial t} \right)^2 - \sigma \left( \frac{\partial q(x', t)}{\partial x'} \right)^2 \right] \\ &\quad - \frac{\delta}{\delta q(x)} \int dx' \frac{1}{2} \left[ \rho \left( \frac{\partial q(x', t)}{\partial t} \right)^2 - \sigma \left( \frac{\partial q(x', t)}{\partial x'} \right)^2 \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int dx' \rho \dot{q}(x', t) \delta(x - x') + \int dx' \sigma \frac{\partial q(x', t)}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x'} \delta(x - x') \quad \left| \text{partielle Integration} \right. \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int dx' \rho \dot{q}(x', t) \delta(x - x') - \int dx' \sigma \frac{\partial^2 q(x', t)}{\partial (x')^2} \delta(x - x') \\ &= \rho \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \sigma \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (10.146)$$

Mit der Definition  $c_s := \sqrt{\sigma/\rho}$  erhalten wir

$$\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0. \quad (10.147)$$

Das ist die *Wellengleichung* mit der Schallgeschwindigkeit  $c_s$ . Die Lösungen sind bekanntlich

$$q(x, t) = f(x - c_s t) + g(x + c_s t) \quad (10.148)$$

mit *beliebigen*, zweimal stetig differenzierbaren Funktionen  $f$  und  $g$ . Ein vollständiges System linear unabhängiger Lösungen (Normalschwingungen) wird durch die ebenen Wellen

$$q_k(x, t) = A_k \cos(kx - \omega(k)t + \phi_k) \quad (10.149)$$

gebildet, wobei die Wellenzahl  $k \in \mathbb{R}$  nicht beschränkt ist. Die Dispersionsrelation lautet

$$\omega(k) = c_s |k|. \quad (10.150)$$

Wir erkennen, dass sich die lineare Kette für kleine  $k$  und  $\omega$  wie die homogene Saite verhält. Insbesondere ist die Dispersionsrelation der Kette für kleine  $k$

$$\omega(k) = 2\sqrt{\frac{K}{m}} \left| \sin \frac{k}{2} \right| \cong \sqrt{\frac{K}{m}} |k|. \quad (10.151)$$

Die Verallgemeinerung auf drei Dimensionen ist klar. Die Lagrange-Funktion lautet

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \int d^3r \left[ \rho \left( \frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 - \sigma \vec{\nabla} q \cdot \vec{\nabla} q \right] \quad (10.152)$$

und führt auf die Wellengleichung in drei Dimensionen

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{1}{c_s^2} \vec{\nabla}^2 q = 0. \quad (10.153)$$

Abschließend sei angemerkt, dass die Wirkung

$$S = \int dt dx \frac{1}{2} \left[ \rho \left( \frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 - \sigma \left( \frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (10.154)$$

eine *Feldtheorie* für das skalare Feld  $q(x, t)$  beschreibt. Ein Feld ist eine vom Ort (und i.A. auch von der Zeit) abhängige Größe. Die Elektrodynamik ist eine Feldtheorie für das kompliziertere elektromagnetische (Vektor-)Feld.



# Kapitel 11

## Hamilton-Mechanik I

Wir haben in Kapitel 5 den sehr leistungsfähigen Lagrange-Formalismus kennengelernt. Seine Stärke beruht v.a. auf der Forminvarianz der Bewegungsgleichungen unter fast beliebigen Transformationen der generalisierten Koordinaten,  $\vec{q} \rightarrow \vec{q}'$ . In diesem Kapitel betrachten wir den Hamilton-Formalismus, der, wie die Newton-Mechanik, zur Lagrange-Mechanik äquivalent ist. Warum machen wir uns also die Mühe? Das hat mehrere Gründe:

1. Der Hamilton-Formalismus ist rechentechnisch vorteilhaft bei zyklischen Koordinaten,
2. er hat eine noch höhere Symmetrie (Invarianz) als die Lagrange-Mechanik und macht die formale Struktur der mechanischen Gesetze klarer,
3. bei konservativ-skleronomen Systemen ist die Hamilton-Funktion gleich der Gesamtenergie und ist somit anschaulicher als die Lagrange-Funktion,
4. ganz allgemein bei nicht explizit zeitabhängigen Systemen ist die Hamilton-Funktion eine Erhaltungsgröße, was für die Lagrange-Funktion nicht gilt,
5. der Hamilton-Formalismus eignet sich besser zum Übergang zur Quantenmechanik und zur statistischen Physik (die Lagrange-Mechanik eignet sich dagegen besser zum Übergang zur relativistischen Physik und zur Feldtheorie).

In der Lagrange-Mechanik sind die generalisierten Koordinaten  $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_S)$  die grundlegenden Größen. Alle zugelassenen Werte von  $\vec{q}$  bilden den Konfigurationsraum. Mögliche Lösungen  $\vec{q}(t)$  der Bewegungsgleichungen heißen Konfigurationsbahnen. Die Bewegungsgleichungen werden mit Hilfe der Lagrange-Funktion  $L$  aufgestellt, die von den Koordinaten  $\vec{q}$ , den zugehörigen Geschwindigkeiten  $\dot{\vec{q}}$  und der Zeit  $t$  abhängt:

$$L = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t). \quad (11.1)$$

In der Hamilton-Mechanik verwendet man anstelle der generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i$  die konjugierten Impulse

$$\vec{p} = (p_1, \dots, p_S), \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (11.2)$$

als Variable. Der von den zugelassenen Werten von  $\vec{q}$  und  $\vec{p}$  gebildete  $2S$ -dimensionale Raum heißt *Phasenraum* – wir kommen darauf zurück. Zunächst suchen wir aber eine Funktion der Variablen  $\vec{q}, \vec{p}, t$ , die dieselbe Information wie  $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$  enthält. D.h. es muss eine umkehrbare Abbildung zwischen  $L$  und der gesuchten Funktion existieren. Dies wird durch eine sogenannte Legendre-Transformation bewerkstelligt, die wir zunächst einführen.

### 11.1 Die Legendre-Transformation

Wir diskutieren in diesem Abschnitt die mathematische Methode der Legendre-Transformation zunächst allgemein für Funktionen zweier Variabler. Die Methode ist übrigens nicht nur in der Mechanik wichtig, sondern z.B. auch in der Thermodynamik.

Gegeben sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion

$$f : x, y \mapsto f(x, y). \quad (11.3)$$

Ihr totales Differential ist

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy =: u dx + v dy. \quad (11.4)$$

Wir suchen nun eine *bijektive* Abbildung der Funktion  $f$  auf eine Funktion  $g$ , so dass  $g$  von den Variablen  $u = \partial f / \partial x$  und  $y$  abhängt. Dafür gibt es natürlich beliebig viele Möglichkeiten. Wir möchten zusätzlich erreichen, dass die Abhängigkeit der Funktion  $g$  von  $u$  und  $y$  „möglichst einfach“ ist. Genauer wollen wir  $g$  so wählen, dass wir die Ableitungen  $\partial g / \partial u$  und  $\partial g / \partial y$  schon kennen.

Wir zeigen, dass

$$f \mapsto g := ux - f \quad (11.5)$$

eine solche Abbildung darstellt, sofern  $u = u(x, y)$  für alle  $y$  nach  $x$  auflösbar ist. In der mathematischen Literatur wird die Legendre-Transformation oft  $g := f - ux$  definiert.

Dazu bilden wir das totale Differential

$$dg = d(ux) - df = du x + u dx - u dx - v dy = x du - v dy. \quad (11.6)$$

Dieser Ausdruck legt nahe,  $g$  als Funktion von  $u$  und  $y$  zu schreiben. Man sagt,  $u$  und  $y$  sind die *natürlichen Variablen* von  $g$ .  $g$  ist aber zunächst als Funktion von  $x, y$  gegeben:

$$g = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} x - f(x, y). \quad (11.7)$$

Damit wir  $g$  als Funktion von  $u, y$  schreiben können, muss die Abbildung

$$x \mapsto u = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (11.8)$$

für jedes (feste)  $y$  umkehrbar sein, denn dann können wir  $x$  eindeutig durch  $u, y$  ausdrücken. Das hatten wir aber vorausgesetzt. Damit existiert zu jeder Funktion  $f(x, y)$  eine Funktion  $g(u, y)$ .

Aus  $g = g(u, y)$  erhalten wir sofort

$$dg = \frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial y} dy \stackrel{!}{=} x du - v dy \quad (11.9)$$

und damit

$$\frac{\partial g}{\partial u} = x \quad \text{und} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -v \equiv -\frac{\partial f}{\partial y}. \quad (11.10)$$

Die Ableitungen sind also, wie gewünscht, ohne weitere Rechnung bekannt.

Die Abbildung  $f \mapsto g$  ist auch umkehrbar, denn es gilt einfach

$$f = xu - g \quad (11.11)$$

und  $u = u(x, y)$  existiert nach Voraussetzung. Damit ist gezeigt, dass die Abbildung  $f \mapsto g$  die gewünschten Eigenschaften hat.

## 11.2 Hamilton-Funktion und kanonische Gleichungen

Wir wenden die Legendre-Transformation nun für alle Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i$  auf die Lagrange-Funktion an. Wir führen also die Abbildung

$$L(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, t) \mapsto \sum_{i=1}^S \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{= p_i} \dot{q}_i - L \quad (11.12)$$

aus. Die rechte Seite ist gerade die aus Abschnitt 5.9 bekannte Hamilton-Funktion

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \equiv \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t). \quad (11.13)$$

Es ist wichtig, die Hamilton-Funktion durch die *kanonischen Variablen*  $\vec{q}$ ,  $\vec{p}$  auszudrücken. Im Hamilton-Formalismus darf in  $H$  keine Geschwindigkeit mehr auftreten; alle Geschwindigkeiten müssen durch  $q_i$ ,  $p_i$ ,  $t$  ausgedrückt werden.

Beispiele: 1. Harmonischer Oszillator. Aus

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} K q^2 \quad (11.14)$$

erhalten wir

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \dot{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{p}{m} \quad (11.15)$$

und ( $\dot{q}$  durch  $p$  ausdrücken!)

$$H = p \dot{q} - L = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} K q^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} K q^2. \quad (11.16)$$

Für dieses System hätten wir dies natürlich wegen  $H = E = T + V$  sofort hinschreiben können.

2. Ein wichtiger Fall ist das Teilchen in einem beliebigen elektromagnetischen Feld, für das die verallgemeinerte Lagrange-Funktion lautet

$$L = T - U = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + q \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} - q \phi. \quad (11.17)$$

Es folgt für den generalisierten (*kanonischen*) Impuls, in kartesischen Koordinaten,

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m \dot{\vec{r}} + q \vec{A}. \quad (11.18)$$

Diese ist offensichtlich verschieden vom *kinetischen* Impuls  $m \dot{\vec{r}}$ , der im zweiten Newtonschen Axiom auftritt. Es folgt  $\dot{\vec{r}} = (\vec{p} - q \vec{A})/m$  und damit

$$\begin{aligned} H = \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} - L &= \vec{p} \cdot \frac{\vec{p} - q \vec{A}}{m} - \frac{m}{2} \left( \frac{\vec{p} - q \vec{A}}{m} \right)^2 - q \frac{\vec{p} - q \vec{A}}{m} \cdot \vec{A} + q \phi \\ &= \frac{1}{2m} (\vec{p} - q \vec{A})^2 + q \phi. \end{aligned} \quad (11.19)$$

Dies sieht so aus, als hätten wir den Impuls um  $-q \vec{A}$  verschoben. Diese Form der Kopplung an das Vektorpotential („minimale Kopplung“) ist wichtig in praktisch allen Zweigen der Physik.

Als nächstes wollen wir die Bewegungsgleichungen herleiten. Das totale Differential von  $H$  ist

$$\begin{aligned} dH &= \sum_i dp_i \dot{q}_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i - dL \\ &= \sum_i \left( \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_i \left( -\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \dot{q}_i dp_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (11.20)$$

Andererseits gilt wegen  $H = H(\vec{q}, \vec{p}, t)$ ,

$$dH = \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (11.21)$$

Der Vergleich ergibt mit Hilfe der Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -\dot{p}_i, \quad (11.22)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad (11.23)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (11.24)$$

Die ersten beiden Gleichungen bilden die *kanonischen* oder *Hamiltonschen Gleichungen*

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (11.25)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (11.26)$$

Dies sind  $2S$  Differentialgleichungen *erster* Ordnung, die zu den  $S$  Lagrangeschen (Differential-) Gleichungen zweiter Ordnung äquivalent sind. Für  $2S$  Gleichungen erster Ordnung benötigen wir i.A.  $2S$  Anfangsbedingungen, um die Lösung eindeutig festzulegen. Geeignet sind z.B. die Koordinaten und Impulse zu einer festen Anfangszeit,  $\vec{q}(t_0)$ ,  $\vec{p}(t_0)$ . Wir sehen, dass die Bewegungsgleichungen im Hamilton-Formalismus eine sehr einfache Form annehmen.

Die Gleichung  $\partial H/\partial t = -\partial L/\partial t$  ist ebenfalls bemerkenswert. Wir wissen aus Abschnitt 5.9, dass aus der Homogenität in der Zeit ganz allgemein

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{dH}{dt} \quad (11.27)$$

folgt. Daraus folgt jetzt

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}; \quad (11.28)$$

für  $H$  sind totale und partielle Zeitableitung identisch. Das heißt, dass die Hamilton-Funktion *höchstens explizit* von der Zeit abhängen kann. Die implizite Zeitabhängigkeit über  $\vec{q}(t)$  und  $\vec{p}(t)$  muss sich herausheben. Insbesondere folgt: Genau dann, wenn  $H$  nicht explizit von der Zeit abhängt, ist  $H$  eine Erhaltungsgröße:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dH}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H = \text{const.} \quad (11.29)$$

Beispiel: Harmonischer Oszillator. Wir hatten schon

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} Kq^2 \quad (11.30)$$

hergeleitet. Die kanonischen Gleichungen lauten nun

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad (11.31)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -Kq. \quad (11.32)$$

Ableiten der ersten Gleichung nach der Zeit und einsetzen der zweiten ergibt

$$\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} = -\frac{K}{m} q. \quad (11.33)$$

Wir finden natürlich dieselbe Bewegungsgleichung wie im Newton- oder Lagrange-Formalismus.

### 11.2.1 Forminvarianz unter Punkttransformationen

Wir hatten in Abschnitt 5.4 gesehen, dass die Lagrange-Gleichungen unter bijektiven, differenzierbaren Punkttransformationen  $\vec{q} \rightarrow \vec{q}'(\vec{q}, t)$  invariant sind, wobei sich die Lagrange-Funktion einfach gemäß

$$L'(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t) = L(\vec{q}(\vec{q}', t), \dot{\vec{q}}(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t), t) \quad (11.34)$$

transformiert. Wie transformiert sich dabei die Hamilton-Funktion? Mit

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (11.35)$$

ergibt sich

$$p'_i = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_i} = \sum_j \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}'_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}'_i} \right) = \sum_j p_j \frac{\partial q_j}{\partial \dot{q}'_i} \quad (11.36)$$

und damit

$$H' = \sum_i p'_i \dot{q}'_i - L' = \sum_{ij} p_j \frac{\partial q_j}{\partial \dot{q}'_i} \dot{q}'_i - L' = \sum_j p_j \dot{q}_j - L' \quad (11.37)$$

oder ausführlicher

$$H'(\vec{q}', \vec{p}', t) = \sum_j p_j(\vec{q}', \vec{p}', t) \dot{q}_j(\vec{q}', \vec{p}', t) - L(\vec{q}'(\vec{q}', t), \dot{\vec{q}}'(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t), t). \quad (11.38)$$

Also erhalten wir  $H'$  aus  $H$  ebenfalls einfach durch Einsetzen der neuen Koordinaten und der *dazugehörigen* Impulse. Für die neuen Variablen folgt ganz analog zur obigen Herleitung

$$\dot{q}'_j = \frac{\partial H'}{\partial p'_j}, \quad \dot{p}'_j = -\frac{\partial H'}{\partial q'_j}, \quad \frac{\partial H'}{\partial t} = -\frac{\partial L'}{\partial t}. \quad (11.39)$$

Wir werden aber später sehen, dass die kanonischen Gleichungen noch unter einer sehr viel größeren Klasse von Transformationen invariant sind.

## 11.3 Der Phasenraum

Wir hatten bereits erwähnt, dass die kanonischen Variablen  $\vec{q}, \vec{p}$  des Hamilton-Formalismus den *Phasenraum* aufspannen. Der Phasenraum ist also ein  $2S$ -dimensionaler Raum von Vektoren

$$\vec{\pi} \equiv (\vec{q}, \vec{p}) \equiv (q_1, \dots, q_S, p_1, \dots, p_S). \quad (11.40)$$

Der Phasenraumvektor  $\vec{\pi}$  enthält die *vollständige* Information über das mechanische System. (Er enthält damit natürlich die *maximale* Information. In der Mechanik hat die Unterscheidung zwischen vollständiger und maximaler Information kaum Sinn, aber in der Quantentheorie werden wir sehen, dass die maximale Information unvollständig sein kann.)  $\vec{\pi}$  ist auch die *minimale* Angabe, die das System eindeutig charakterisiert – wir können keine Komponente  $q_i$  oder  $p_i$  weglassen, ohne Information zu verlieren. Daher bezeichnet man  $\vec{\pi}$  auch als *Zustand* des Systems.

Als Funktion der Zeit  $t$  bewegt sich der Punkt  $\vec{\pi}$  im Phasenraum und beschreibt dabei eine *Kurve*, die *Phasenraumbahn* oder *Phasenbahn*. Die Kurve als geometrische Form beschreibt die Zeitentwicklung noch nicht eindeutig. Es fehlt nämlich die Information, zu welchem Zeitpunkt welcher Zustand  $\vec{\pi}$  angenommen wird. Der Zustand des Systems für beliebige Zeiten ist eindeutig durch die Funktion  $\vec{\pi}(t)$  charakterisiert. Alternativ führt man manchmal den *Zustandsraum* mit den Koordinaten

$$(q_1, \dots, q_S, p_1, \dots, p_S, t) \quad (11.41)$$

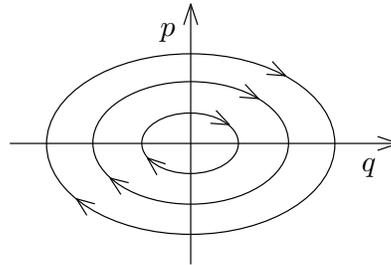
ein. Er hat offensichtlich  $2S + 1$  Dimensionen. Eine Kurve im Zustandsraum beschreibt das System eindeutig für alle Zeiten.

Wir betrachten als Beispiel wieder den harmonischen Oszillator. Es ist

$$E = H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{K}{2} q^2 = \text{const} \quad (11.42)$$

$$\Rightarrow \frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2E/K} = 1. \quad (11.43)$$

Dies ist eine Ellipsengleichung. Die Phasenraumbahnen sind daher Ellipsen mit den Halbachsen  $\sqrt{2E/K}$  in  $q$ -Richtung und  $\sqrt{2mE}$  in  $p$ -Richtung. (Es hat keinen Sinn, über große oder kleine Halbachsen zu sprechen, da  $q$  und  $p$  verschiedene Einheiten haben.)



Da  $\dot{q} = p/m$  und  $m > 0$  gilt, nimmt  $q$  für positive  $p$  zu und für negative  $p$  ab. Der Zustand  $\vec{\pi} = (q, p)$  bewegt sich also *im Uhrzeigersinn* auf der Phasenbahn. Der harmonische Oszillator hat außerdem die besondere Eigenschaft, dass die Schwingungsperiode

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{K/m}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \quad (11.44)$$

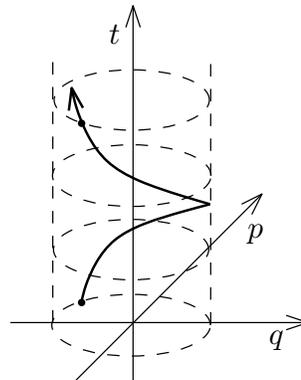
von der Energie unabhängig ist. Damit werden alle Phasenraumbahnen mit der gleichen Periode durchlaufen.

Die Bahnen im *Zustandsraum* erfüllen

$$q = A \cos(\omega t + \phi), \quad (11.45)$$

$$p = m\dot{q} = -m\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad (11.46)$$

mit beliebigen  $A$  und  $\phi$ . Die Bahnen sind daher elliptische Linksschrauben (links wegen des Minuszeichens in  $p$ ) mit Halbachsen entlang  $p$  und  $q$  im Verhältnis  $m\omega$ .



Ein interessanteres Beispiel ist das Fadenpendel (auch als mathematisches Pendel bezeichnet) mit der Masse  $m$  und der Länge  $\ell$ . Die Lagrange-Funktion lautet

$$L = \frac{1}{2} m\ell^2 \dot{\phi}^2 + mg\ell \cos \phi \quad (11.47)$$

$$\Rightarrow p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\ell^2 \dot{\phi} \quad (11.48)$$

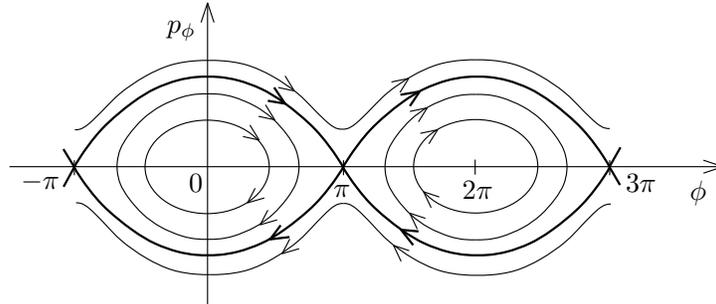
$$\Rightarrow H = p_\phi \dot{\phi} - L = \frac{p_\phi^2}{m\ell^2} - \frac{p_\phi^2}{2m\ell^2} - mgl \cos \phi = \frac{p_\phi^2}{2m\ell^2} - mgl \cos \phi. \quad (11.49)$$

Da  $E = H = \text{const}$  ist, sind die Phasenraumbahnen durch die Gleichung

$$\frac{p_\phi^2}{2m\ell^2} - mgl \cos \phi = E \quad (11.50)$$

$$\Rightarrow p_\phi = \pm \sqrt{2m\ell} \sqrt{E + mgl \cos \phi} \quad (11.51)$$

charakterisiert. Die Bahnen lassen sich leicht zeichnen:



Der Phasenraum des Fadenpendels enthält offenbar mehrere ausgezeichnete Punkte und Kurven. Diese sind von generellem Interesse und wir führen die entsprechenden Begriffe anhand dieses Beispiels ein.

- Ein *Fixpunkt* ist ein Punkt im Phasenraum (ein Zustand), der sich zeitlich nicht ändert:  $\dot{\vec{\pi}} = (\dot{\vec{q}}, \dot{\vec{p}}) = 0$ . Wegen  $\dot{q}_i = \partial H / \partial p_i$ ,  $\dot{p}_i = -\partial H / \partial q_i$  gilt an einem Fixpunkt

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \quad \forall i, \quad (11.52)$$

was wir auch in der Form

$$\frac{\partial H}{\partial \vec{\pi}} = 0 \quad (11.53)$$

schreiben können. Ein Fixpunkt ist also ein stationärer Punkt von  $H(\vec{\pi})$ . Fixpunkte treten hier bei  $(\phi, p_\phi) = (0, 0), (\pi, 0), (2\pi, 0), \dots$  auf.

- Bei einem *elliptischen Fixpunkt* führt eine kleine Störung dazu, dass das System auf einer engen Bahn um den Fixpunkt umläuft. Hier sind  $(0, 0), (2\pi, 0), \dots$  elliptisch. Das Pendel ruht im stabilen Gleichgewicht bei  $\phi = 0$  (äquivalent zu  $\phi = 2\pi$  usw.).
- Bei einem *hyperbolischen Fixpunkt* führt eine kleine Störung dazu, dass das System (weiter als nur infinitesimal) vom Fixpunkt fortläuft. Hier sind  $(\pi, 0), (3\pi, 0), \dots$  hyperbolisch. Das Pendel ruht im labilen Gleichgewicht bei  $\phi = \pi$ .
- Eine Phasenbahn, die direkt auf einen hyperbolischen Fixpunkt zuläuft oder die direkt von ihm fortläuft, heißt *Separatrix* (Plural: Separatrizen). Bei elliptischen Fixpunkten treten keine Separatrizen auf. Eine Separatrix trennt Phasenbahnen, die später in unterschiedliche Richtungen auseinander laufen, nämlich sobald der Zustand in die Nähe des hyperbolischen Fixpunktes kommt. Sie trennt oft Bereiche mit qualitativ unterschiedlichem Verhalten, im Beispiel Schwingungen um die Gleichgewichtslage im Inneren der augenförmigen Bereiche von Rotationen in einer Richtung außerhalb dieser Bereiche. Die Separatrix ist in der Skizze fett gezeichnet.

## 11.4 Zyklische Koordinaten

Eine Koordinate  $q_j$  ist gemäß Abschnitt 5.7 zyklisch, wenn sie nicht in  $L$  vorkommt. Dann folgt

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{p}_j = 0 \quad \Rightarrow \quad p_j = \text{const} =: c_j. \quad (11.54)$$

Nach den kanonischen Gleichungen ist dann aber auch

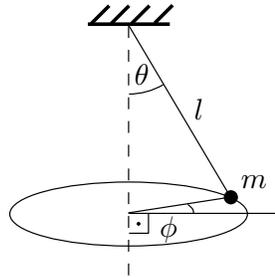
$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{p}_j = 0, \quad (11.55)$$

also kommt  $q_j$  auch in  $H$  nicht vor. Für zyklische Koordinaten ist der Hamilton-Formalismus besonders nützlich:  $H$  hängt im Prinzip von  $q_j$  und  $p_j$  ab, aber für zyklisches  $q_j$  fällt  $q_j$  heraus und  $p_j = c_j$  ist gar keine dynamische Variable, sondern eine Konstante, die wir i.A. aus den Anfangsbedingungen bestimmen. Damit können wir schreiben

$$H = H_{c_j}(q_1, \dots, q_{j-1}, q_{j+1}, \dots; p_1, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots; t), \quad (11.56)$$

$c_j$  ist hier ein Parameter ähnlich zu Massen, Ladungen usw. Wir haben also die Anzahl der Variablen um 2 reduziert. Der Freiheitsgrad beschrieben durch  $(q_j, p_j)$  ist vollständig aus den Gleichungen herausgefallen. Im Lagrange-Formalismus funktioniert das nicht, weil für zyklisches  $q_j$  zwar der Impuls  $p_j$  konstant ist, aber i.A. nicht die Geschwindigkeit  $\dot{q}_j$ , die in der Lagrange-Funktion auftritt.

Beispiel: Dreidimensionales Pendel.



Die kinetische und potentielle Energie lauten

$$T = \frac{m}{2} (l^2 \dot{\theta}^2 + l^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2), \quad (11.57)$$

$$V = -mgl \cos \theta, \quad (11.58)$$

also ist die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m}{2} (l^2 \dot{\theta}^2 + l^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + mgl \cos \theta. \quad (11.59)$$

Es folgt

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2} \quad (11.60)$$

und

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{ml^2 \sin^2 \theta}. \quad (11.61)$$

Damit lautet die Hamilton-Funktion

$$\begin{aligned} H &= p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} - L \\ &= \frac{p_\theta^2}{ml^2} + \frac{p_\phi^2}{ml^2 \sin^2 \theta} - \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - \frac{p_\phi^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} - mgl \cos \theta \\ &= \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{p_\phi^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} - mgl \cos \theta. \end{aligned} \quad (11.62)$$

Es ist entscheidend, dass  $H$  hier durch die Impulse  $p_\theta$  und  $p_\phi$  ausgedrückt wurde. Wir erkennen, dass  $\phi$  zyklisch ist. Also ist  $p_\phi = L_z$  erhalten und wird aus den Anfangsbedingungen bestimmt. Wir müssen nur noch die Variablen  $\theta$  und  $p_\theta$  beachten. Die Hamilton-Funktion des effektiven Systems mit einem Freiheitsgrad lautet

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{L_z^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} - mgl \cos \theta. \quad (11.63)$$

Die daraus resultierenden kanonischen Gleichungen sind

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}, \quad (11.64)$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{L_z^2}{ml^2} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} - mgl \sin \theta. \quad (11.65)$$

Es folgt

$$\ddot{\theta} = \frac{\dot{p}_\theta}{ml^2} = \frac{L_z^2}{m^2 l^4} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} - \frac{g}{l} \sin \theta. \quad (11.66)$$

Diese Gleichung für  $\theta(t)$  könnten wir nun lösen, vermutlich numerisch. Man beachte, dass sich für  $L_z = 0$  die bekannte Bewegungsgleichung für das ebene Pendel ergibt.

## 11.5 Das modifizierte Hamiltonsche Prinzip

Die kanonischen Gleichungen können wir auch direkt aus einem Integralprinzip gewinnen, analog zur Herleitung der Lagrange-Gleichungen 2. Art aus dem Hamiltonschen Prinzip. Dieses lautet

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) = 0, \quad (11.67)$$

wobei die Koordinaten bei der Anfangs- und Endzeit festgehalten werden,

$$\delta \vec{q}(t_1) = 0, \quad \delta \vec{q}(t_2) = 0. \quad (11.68)$$

Wir zeigen, dass die kanonischen Gleichungen aus dem *modifizierten Hamiltonschen Prinzip*

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \sum_j p_j \dot{q}_j - H(\vec{q}, \vec{p}, t) \right] = 0 \quad (11.69)$$

folgen, wobei  $q_1, \dots, q_S, p_1, \dots, p_S$  als unabhängige Funktionen von  $t$  anzusehen sind und Glg. (11.68) gelten. In Analogie zum Hamiltonschen Prinzip der Lagrange-Mechanik ist zunächst naheliegend, die Impulse zu den Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  nicht auch festzuhalten. Wir hatten ja die Geschwindigkeiten  $\dot{\vec{q}}(t_1)$  und  $\dot{\vec{q}}(t_2)$  nicht festgehalten. Und wir wissen schon, dass die Vorgabe von  $4S$  Koordinaten und Impulsen zu zwei Zeiten die Lösung überbestimmt. Wir kommen gleich darauf zurück.

Die Behauptung scheint plausibel, wir haben ja einfach die Lagrange-Funktion durch die Hamilton-Funktion ausgedrückt. Aber das ist kein Beweis, da die modifizierte Wirkung

$$S[\vec{q}, \vec{p}] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \sum_j p_j \dot{q}_j - H(\vec{q}, \vec{p}, t) \right] \quad (11.70)$$

als Funktional von anderen Argumenten (Funktionen) abhängt als die ursprüngliche Wirkung  $S$ , nämlich von  $\vec{q}(t)$  und  $\vec{p}(t)$  anstatt nur von  $\dot{\vec{q}}(t)$ .

Die Herleitung der kanonischen Gleichungen ist aber einfach:

$$0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \sum_j p_j \dot{q}_j - H(\vec{q}, \vec{p}, t) \right]$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_j \left[ \delta p_j \dot{q}_j + p_j \delta \dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j \right] \quad (11.71)$$

und, mittels partieller Integration unter Beachtung von  $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$ ,

$$\dots = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_j \left[ \dot{q}_j \delta p_j - \dot{p}_j \delta q_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j \right]. \quad (11.72)$$

Da die  $\delta q_j$  und  $\delta p_j$  alle unabhängig voneinander sind, folgt für die Koeffizienten

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad (11.73)$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}. \quad (11.74)$$

Das sind die kanonischen Gleichungen.

Wir kommen zurück zur Frage, welche Variablen zu den Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  festgehalten werden sollen. Ich danke F. Kuypers für hilfreiche Diskussionen in diesem Zusammenhang. Bei der Herleitung der kanonischen Gleichungen aus dem modifizierten Hamiltonschen Prinzip haben wir nur verwendet, dass die Variationen der Koordinaten verschwinden:  $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$ , nicht auch die Variationen der Impulse. Das wirkt im Rahmen der Hamilton-Mechanik aber unnatürlich, die Koordinaten und Impulse sind ja unabhängige Variablen. Bei der obigen Herleitung der kanonischen Gleichungen haben wir auch verwendet, dass die Variationen  $\delta q_j$  und  $\delta p_j$  alle linear unabhängig sind. Im folgenden Kapitel werden wir sehen, dass die Unterscheidung zwischen Koordinaten  $q_j$  und Impulsen  $p_j$  in der Hamilton-Mechanik willkürlich ist.

Es entspricht daher eher dem Geist der Hamilton-Mechanik, auch die Variationen der Impulse zu den Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  auf Null zu setzen,

$$\delta \vec{p}(t_1) = 0, \quad \delta \vec{p}(t_2) = 0. \quad (11.75)$$

Ist dies widerspruchsfrei möglich und was folgt ggf. daraus? Nehmen wir an, dass wir die Zustände  $\vec{\pi} = (\vec{q}, \vec{p})$  im  $2S$ -dimensionalen Phasenraum zu den Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  festhalten. Damit ist gemeint, dass alle Variationen zu diesen Zeiten verschwinden. Das modifizierte Hamiltonsche Prinzip sagt, dass die wahre Phasenraumbahn von  $\vec{\pi}(t_1)$  nach  $\vec{\pi}(t_2)$  die Wirkung extremal macht. Die Herleitung der kanonischen Gleichungen geht unverändert durch; darin wurden die Werte von  $\delta p_j(t_1)$  und  $\delta p_j(t_2)$  gar nicht verwendet. Wir erhalten also  $2S$  Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Lösung durch die Angabe von  $2S$  unabhängigen Parametern eindeutig bestimmt ist. Die Phasenraumpunkte  $\vec{\pi}(t_1)$  und  $\vec{\pi}(t_2)$  enthalten  $4S$  Parameter. Wir folgern also, dass für fast alle Phasenraumpunkte  $\vec{\pi}(t_1)$  und  $\vec{\pi}(t_2)$  gar keine mögliche Bahn existiert, die sie verbindet. Mögliche Bahnen existieren nur für einen  $2S$ -dimensionalen Unterraum des  $4S$ -dimensionalen Raumes der  $\vec{\pi}(t_1)$  und  $\vec{\pi}(t_2)$ . Beachte, dass wir diese Aussage bei dieser Betrachtungsweise aus dem Hamiltonschen Prinzip gefolgert haben. In der früheren Betrachtung, bei der nur die Koordinaten festgehalten wurden, haben wir sie hineingesteckt.

Zusammengefasst können wir das Hamiltonsche Prinzip in der Form

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \sum_j p_j \dot{q}_j - H(\vec{q}, \vec{p}, t) \right] = 0 \quad (11.76)$$

mit

$$\delta \vec{q}(t_1) = 0, \quad \delta \vec{q}(t_2) = 0, \quad \delta \vec{p}(t_1) = 0, \quad \delta \vec{p}(t_2) = 0 \quad (11.77)$$

an den Anfang stellen und daraus die Bewegungsgleichungen folgern. Es entspricht dem Wesen der Hamilton-Mechanik, die Koordinaten und Impulse analog zu behandeln.

# Kapitel 12

## Hamilton-Mechanik II

Nachdem wir die Grundlagen des Hamilton-Formalismus besprochen haben, wollen wir ihn nun verwenden, um mehr über die Struktur der Theorie der klassischen Mechanik zu lernen. Zunächst werden wir eine alternative Formulierung der kanonischen Gleichungen kennenlernen. Damit können wir die Symmetrieeigenschaften dieser Gleichungen anschließend kompakter formulieren.

### 12.1 Die Poisson-Klammern

Wir hatten schon gesehen, dass der Phasenraumvektor  $\vec{\pi} = (\vec{q}, \vec{p})$  den Zustand eines mechanischen Systems vollständig beschreibt. Daher lässt sich jede mögliche *Messgröße* (*Observable*) als Funktion von  $\vec{\pi}$  und evtl. der Zeit schreiben. Eine solche Funktion nennt man auch *Phasenfunktion*.

Sei  $f = f(\vec{q}, \vec{p}, t)$  eine beliebige, hinreichend oft differenzierbare Phasenfunktion. Dann ist ihre totale Zeitableitung

$$\frac{df}{dt} = \sum_{j=1}^S \left( \frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{j=1}^S \left( \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (12.1)$$

Der Summenausdruck hat eine bemerkenswerte Symmetrie. Wir definieren die *Poisson-Klammer* zweier Funktionen  $f$  und  $g$  durch

$$\{f, g\} \equiv \{f, g\}_{\vec{q}, \vec{p}} := \sum_{j=1}^S \left( \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right). \quad (12.2)$$

Die Bewegungsgleichung (12.1) wird damit

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (12.3)$$

Damit können wir nun die Bewegungsgleichung für *beliebige* Größen aufstellen, nicht nur für die kanonischen Variablen  $\vec{q}, \vec{p}$ . Insbesondere ergibt sich ein einfaches Kriterium für Erhaltungsgrößen: Eine nicht explizit von der Zeit abhängige Phasenfunktion  $f$  ist genau dann eine Erhaltungsgröße, wenn

$$\{f, H\} = 0 \quad (12.4)$$

gilt.

Speziell lauten die kanonischen Gleichungen nun

$$\dot{q}_j = \{q_j, H\}, \quad (12.5)$$

$$\dot{p}_j = \{p_j, H\}. \quad (12.6)$$

Außerdem ergibt sich

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (12.7)$$

wie wir schon wissen. Weiter ergibt die Definition (12.2) sofort die *fundamentalen Poisson-Klammern*

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad (12.8)$$

$$\{p_i, p_j\} = 0, \quad (12.9)$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}. \quad (12.10)$$

Nun wissen wir bereits, dass wir die Koordinaten  $\vec{q}$  fast beliebig transformieren können. Der Nutzen der Poisson-Klammern wird durch folgenden Satz untermauert: Sei  $(\vec{q}, \vec{p})$  ein Satz kanonischer Variabler, d.h. generalisierter Koordinaten und zugehöriger Impulse, und sei  $(\vec{Q}, \vec{P})$  ein anderer Satz kanonischer Variabler. Dann gilt für zwei beliebige Phasenfunktionen  $f, g$ :

$$\{f, g\}_{\vec{q}, \vec{p}} = \{f, g\}_{\vec{Q}, \vec{P}}. \quad (12.11)$$

Die Poisson-Klammern sind also unabhängig von der Wahl der generalisierten Koordinaten. Damit können wir auf die Angabe der jeweiligen kanonischen Variablen,  $\vec{q}, \vec{p}$  oder  $\vec{Q}, \vec{P}$ , verzichten.

Beweis:

$$\begin{aligned} \{f, g\}_{\vec{q}, \vec{p}} &= \sum_j \left( \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right) \\ &= \sum_{jkl} \left\{ \left( \frac{\partial f}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial q_j} \right) \left( \frac{\partial g}{\partial Q_l} \frac{\partial Q_l}{\partial p_j} + \frac{\partial g}{\partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial p_j} \right) - \left( \frac{\partial f}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial p_j} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left( \frac{\partial g}{\partial Q_l} \frac{Q_l}{\partial q_j} + \frac{\partial g}{\partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial q_j} \right) \right\} \\ &= \sum_{jkl} \left\{ \frac{\partial f}{\partial Q_k} \frac{\partial g}{\partial Q_l} \left( \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} \frac{\partial Q_l}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_k}{\partial p_j} \frac{\partial Q_l}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial f}{\partial Q_k} \frac{\partial g}{\partial P_l} \left( \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} \frac{\partial P_l}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_k}{\partial p_j} \frac{\partial P_l}{\partial q_j} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial P_k} \frac{\partial g}{\partial Q_l} \left( \frac{\partial P_k}{\partial q_j} \frac{\partial Q_l}{\partial p_j} - \frac{\partial P_k}{\partial p_j} \frac{\partial Q_l}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial f}{\partial P_k} \frac{\partial g}{\partial P_l} \left( \frac{\partial P_k}{\partial q_j} \frac{\partial P_l}{\partial p_j} - \frac{\partial P_k}{\partial p_j} \frac{\partial P_l}{\partial q_j} \right) \right\} \\ &= \sum_{kl} \left[ \frac{\partial f}{\partial Q_k} \frac{\partial g}{\partial Q_l} \{Q_k, Q_l\}_{\vec{q}, \vec{p}} + \frac{\partial f}{\partial Q_k} \frac{\partial g}{\partial P_l} \{Q_k, P_l\}_{\vec{q}, \vec{p}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial P_k} \frac{\partial g}{\partial Q_l} \{P_k, Q_l\}_{\vec{q}, \vec{p}} + \frac{\partial f}{\partial P_k} \frac{\partial g}{\partial P_l} \{P_k, P_l\}_{\vec{q}, \vec{p}} \right]. \quad (12.12) \end{aligned}$$

Die hier benötigten Poisson-Klammern werden wir im nächsten Abschnitt berechnen:

$$\{Q_k, Q_l\}_{\vec{q}, \vec{p}} = 0, \quad (12.13)$$

$$\{P_k, P_l\}_{\vec{q}, \vec{p}} = 0, \quad (12.14)$$

$$\{Q_k, P_l\}_{\vec{q}, \vec{p}} = \delta_{kl}. \quad (12.15)$$

Einsetzen in Gl. (12.12) ergibt

$$\{f, g\}_{\vec{q}, \vec{p}} = \sum_{kl} \left[ \frac{\partial f}{\partial Q_k} \frac{\partial g}{\partial P_l} \delta_{kl} - \frac{\partial f}{\partial P_k} \frac{\partial g}{\partial Q_l} \delta_{kl} \right] = \{f, g\}_{\vec{Q}, \vec{P}}, \quad (12.16)$$

was zu zeigen war.

Wir stellen einige wichtige Identitäten zusammen, die leicht zu beweisen sind: Für alle Phasenfunktionen gilt

$$\{f, f\} = 0, \quad (12.17)$$

$$\{f, g\} = -\{g, f\}, \quad (12.18)$$

$$\{f + g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\}, \quad (12.19)$$

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g \quad (12.20)$$

und die Jacobi-Identität

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0. \quad (12.21)$$

Unter Anwendung von Gl. (12.18) ergeben sich entsprechende Identitäten für das zweite Argument der Poisson-Klammer:

$$\{f, g + h\} = \{f, g\} + \{f, h\}, \quad (12.22)$$

$$\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h, \quad (12.23)$$

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0. \quad (12.24)$$

In Verbindung mit den fundamentalen Poisson-Klammern (12.8)–(12.10), lassen sich damit die meisten Poisson-Klammern algebraisch ausrechnen, ohne die darin vorkommenden Ableitungen nach  $q_j, p_j$  explizit ausführen zu müssen.

Formal ähnliche Beziehungen gelten in der Quantenmechanik für den Kommutator

$$[\hat{A}, \hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad (12.25)$$

für Operatoren  $\hat{A}$  und  $\hat{B}$ . In der Tat lassen sich die Poisson-Klammern als klassischer Grenzfall aus den quantenmechanischen Kommutatoren herleiten.

Außerdem gelten die Produktregeln für Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\}, \quad (12.26)$$

$$\frac{d}{dt} \{f, g\} = \left\{ \frac{df}{dt}, g \right\} + \left\{ f, \frac{dg}{dt} \right\}. \quad (12.27)$$

### 12.1.1 Poissonscher Satz

Eine nützliche Eigenschaft der Poisson-Klammern wird durch den Poissonschen Satz ausgedrückt: Sind  $f$  und  $g$  Erhaltungsgrößen, so ist es auch  $\{f, g\}$ .

Beweis: Für Erhaltungsgrößen ist

$$0 = \frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (12.28)$$

$$0 = \frac{dg}{dt} = \{g, H\} + \frac{\partial g}{\partial t}. \quad (12.29)$$

Mithilfe der Jacobi-Identität folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{f, g\} &= \{\{f, g\}, H\} + \frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} \\ &= -\{\{g, H\}, f\} - \{\{H, f\}, g\} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} \\ &= \left\{ \frac{\partial g}{\partial t}, f \right\} - \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} - \left\{ \frac{\partial g}{\partial t}, f \right\} = 0, \end{aligned} \quad (12.30)$$

was zu zeigen war. Dies führt aber nicht immer zu einer neuen und interessanten Erhaltungsgröße.

Beispiel: Für ein Teilchen gilt

$$\begin{aligned} \{L_x, L_y\} &= \{yp_z - zp_y, zp_x - xp_z\} \\ &= \{yp_z, zp_x\} - \{yp_z, xp_z\} - \{zp_y, zp_x\} + \{zp_y, xp_z\} \\ &= yz\{p_z, p_x\} + z\{y, p_x\}p_z + \dots \end{aligned} \quad (12.31)$$

Hier sind aber nur solche Terme von Null verschieden, die die fundamentalen Klammern  $\{r_j, p_j\}$  oder  $\{p_j, r_j\}$  enthalten:

$$\{L_x, L_y\} = y\{p_z, z\}p_x - 0 - 0 + x\{z, p_z\}p_y = -yp_x + xp_y = L_z. \quad (12.32)$$

Sind also die  $x$ - und  $y$ -Komponente des Drehimpulses erhalten, so muss dies auch für die  $z$ -Komponente gelten. Allgemeiner können nicht nur zwei Komponenten von  $\vec{L}$  erhalten sein.

## 12.2 Kanonische Transformationen

Wir haben gesehen, dass die Lagrange-Gleichungen und auch die kanonischen Gleichungen forminvariant unter Punkttransformationen sind. Es wurde erwähnt, dass die kanonischen Gleichungen sogar unter einer viel größeren Klasse von Transformationen invariant sind. Diese wollen wir nun untersuchen.

Unter einer *Phasentransformation* verstehen wir eine bijektive, differenzierbare Abbildung

$$\begin{aligned}\vec{q} &\mapsto \vec{Q} = \vec{Q}(\vec{q}, \vec{p}, t), \\ \vec{p} &\mapsto \vec{P} = \vec{P}(\vec{q}, \vec{p}, t),\end{aligned}\tag{12.33}$$

d.h. eine *Punkttransformation im Phasenraum*.

Eine Phasentransformation  $(\vec{q}, \vec{p}) \mapsto (\vec{Q}, \vec{P})$  heißt *kanonisch im weiteren Sinne*, wenn zu *jeder* Hamilton-Funktion  $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$  eine Hamilton-Funktion  $\tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t)$  existiert, so dass für  $j = 1, \dots, S$  gilt

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_j}, \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_j}.\tag{12.34}$$

In Worten, eine Phasentransformation ist kanonisch im weiteren Sinne, wenn zu jedem  $H$  ein  $\tilde{H}$  existiert, so dass  $\vec{Q}, \vec{P}$  mit  $\tilde{H}$  ebenfalls kanonische Gleichungen erfüllen. Die kanonischen Gleichungen sind dann also forminvariant unter der Transformation  $\vec{q} \mapsto \vec{Q}, \vec{p} \mapsto \vec{P}, H \mapsto \tilde{H}$ . Das Wort „jeder“ in der Definition ist wichtig, es bedeutet, dass Kanonizität (im weiteren Sinne) eine Eigenschaft der Phasentransformation  $(\vec{q}, \vec{p}) \mapsto (\vec{Q}, \vec{P})$  ist und nicht des speziellen, durch  $H$  beschriebenen Systems.

Beispiel: Die Vertauschung der Koordinaten und Impulse,

$$\vec{Q} = \vec{p}, \quad \vec{P} = \vec{q},\tag{12.35}$$

ist kanonisch im weiteren Sinne, denn die kanonischen Gleichungen lauten

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}\tag{12.36}$$

$$\Rightarrow \dot{P}_j = \frac{\partial H}{\partial Q_j}, \quad \dot{Q}_j = -\frac{\partial H}{\partial P_j}.\tag{12.37}$$

Diese Gleichungen nehmen wieder die Form der kanonischen Gleichungen an, wenn wir  $\tilde{H} = -H$  wählen.

Wie können wir prüfen, ob eine Transformation kanonisch im weiteren Sinne ist? Ein Antwort ergibt sich aus dem modifizierten Hamiltonschen Prinzip

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \sum_j p_j \dot{q}_j - H \right) = 0.\tag{12.38}$$

Die Phasentransformation  $(\vec{q}, \vec{p}) \mapsto (\vec{Q}, \vec{P})$  ist genau dann kanonisch im weiteren Sinne, wenn zu jedem  $H$  ein  $\tilde{H}$  existiert, so dass gilt

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \sum_j P_j \dot{Q}_j - \tilde{H} \right) = 0.\tag{12.39}$$

Bei der weiteren Diskussion müssen wir beachten, dass zwar die Koordinaten  $\vec{q}, \vec{Q}$  an der Anfangs- und Endzeit festgehalten werden, aber nicht die Impulse (vgl. Abschnitt 11.5). Ein Kriterium für Kanonizität im weiteren Sinne stellt der folgende Satz dar:

Die Phasentransformation  $(\vec{q}, \vec{p}) \mapsto (\vec{Q}, \vec{P})$  ist kanonisch im weiteren Sinne, wenn zu jedem  $H$  ein  $\tilde{H}$  existiert, so dass gilt

$$\sum_j p_j \dot{q}_j - H = c \left( \sum_j P_j \dot{Q}_j - \tilde{H} \right) + \frac{dF_1}{dt},\tag{12.40}$$

wobei  $c$  eine Konstante und  $F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t)$  eine Funktion der alten und neuen Koordinaten und evtl. der Zeit ist, genannt *erzeugende Funktion* oder *Erzeugende*.

Bemerkung 1: Die Behauptung ist plausibel, da wir aus Abschnitt 5.6.2 wissen, dass die Bewegungsgleichungen invariant unter Transformationen der Lagrange-Funktion der Form  $L \mapsto cL + dF/dt$  sind. Das ist aber kein Beweis, da die Funktionen von unterschiedlichen Variablen abhängen.

Bemerkung 2: Die Erzeugende  $F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t)$  und die Konstante  $c$  legen gemeinsam die Phasentransformation  $(\vec{q}, \vec{p}) \mapsto (\vec{Q}, \vec{P})$  und die neue Hamilton-Funktion  $\tilde{H}$  eindeutig fest. Es gilt nämlich einerseits (Kettenregel)

$$dF_1 = \sum_j \left( \frac{\partial F_1}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} dQ_j \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt \quad (12.41)$$

und andererseits, wegen Gl. (12.40),

$$\begin{aligned} dF_1 &= \left[ \sum_j p_j \dot{q}_j - H - c \left( \sum_j P_j \dot{Q}_j - \tilde{H} \right) \right] dt \\ &= \sum_j (p_j dq_j - cP_j dQ_j) + (c\tilde{H} - H) dt. \end{aligned} \quad (12.42)$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j}, \quad (12.43)$$

$$P_j = -\frac{1}{c} \frac{\partial F_1}{\partial Q_j}, \quad (12.44)$$

$$\tilde{H} = \frac{1}{c} \left( H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \right). \quad (12.45)$$

Die erste Gleichung,

$$p_j = \frac{\partial F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t)}{\partial q_j}, \quad (12.46)$$

lösen wir nach den  $Q_j$  auf und erhalten

$$Q_j = Q_j(\vec{q}, \vec{p}, t). \quad (12.47)$$

Dieses Ergebnis setzen wir in die zweite Gleichung ein und erhalten

$$P_j = P_j(\vec{q}, \vec{p}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \Big|_{Q_j=Q_j(\vec{q}, \vec{p}, t)}. \quad (12.48)$$

Damit ist die Phasentransformation  $(\vec{q}, \vec{p}) \mapsto (\vec{Q}, \vec{P})$  bestimmt. Die Hamilton-Funktion  $\tilde{H}$  erhalten wir dann einfach durch Einsetzen,

$$\tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t) = \frac{1}{c} \left( H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \right) \Big|_{Q_j=Q_j(\vec{q}, \vec{p}, t), P_j=P_j(\vec{q}, \vec{p}, t)}. \quad (12.49)$$

Beweis des Satzes: Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \sum_j p_j \dot{q}_j - H(\vec{q}, \vec{p}, t) \right) \\ &= \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ c \left( \sum_j P_j \dot{Q}_j - H(\vec{Q}, \vec{P}, t) \right) + \frac{dF_1}{dt} \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_j \left( c\delta P_j \dot{Q}_j + cP_j \delta \dot{Q}_j - c \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_j} \delta Q_j - c \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_j} \delta P_j \right) \end{aligned}$$

$$+ \delta \left[ F_1(\vec{q}(t_2), \vec{Q}(t_2), t_2) - F_1(\vec{q}(t_1), \vec{Q}(t_1), t_1) \right]. \quad (12.50)$$

Wie üblich integrieren wir den zweiten Term im Integral partiell. Nun müssen wir aber beachten, dass zwar  $\vec{q}(t_1)$  und  $\vec{q}(t_2)$  festgehalten werden, dass daraus aber *nicht* schon folgt, dass auch  $\vec{Q}(\vec{q}(t_1), \vec{p}(t_1), t_1)$  und  $\vec{Q}(\vec{q}(t_2), \vec{p}(t_2), t_2)$  fest sind. Diese neuen Koordinaten hängen nämlich auch von den nicht festgehaltenen alten Impulsen  $\vec{p}(t_1)$ ,  $\vec{p}(t_2)$  ab. Daher ist

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_j c P_j \delta \dot{Q}_j = \sum_j c P_j \delta Q_j \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_j c \dot{P}_j \delta Q_j. \quad (12.51)$$

Bei der Auswertung des  $F_1$ -abhängigen Terms in Gl. (12.50) müssen wir ebenfalls beachten, dass  $\vec{Q}(t_1)$ ,  $\vec{Q}(t_2)$  nicht fest sind,

$$\delta \left[ F_1(\vec{q}(t_2), \vec{Q}(t_2), t_2) - F_1(\vec{q}(t_1), \vec{Q}(t_1), t_1) \right] = \sum_j \left( \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \Big|_{t=t_2} \delta Q_j(t_2) - \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \Big|_{t=t_1} \delta Q_j(t_1) \right). \quad (12.52)$$

Insgesamt erhalten wir

$$0 = \sum_j \left( c P_j + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \right) \delta Q_j \Big|_{t_1}^{t_2} + c \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \dot{Q}_j \delta P_j - \dot{P}_j \delta Q_j - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_j} \delta Q_j - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_j} \delta P_j \right). \quad (12.53)$$

Der Ausdruck

$$c P_j + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \quad (12.54)$$

verschwindet aber gemäß Gl. (12.44) für alle  $t$ , also insbesondere für  $t_1$  und  $t_2$ . Im verbleibenden Ausdruck sind die  $\delta Q_j$  und  $\delta P_j$  unabhängig und wir folgern

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_j}, \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_j}, \quad (12.55)$$

also die kanonischen Gleichungen für  $\vec{Q}$ ,  $\vec{P}$  und  $\tilde{H}$ . Damit ist die Kanonizität im weiteren Sinne gezeigt.

Die Konstante  $c$  in den im weiteren Sinne kanonischen Transformationen ist eigentlich uninteressant, weil sie durch die weitere Phasentransformation

$$\vec{Q} \mapsto \vec{Q}' = c \vec{Q}, \quad \vec{P} \mapsto \vec{P}' = \vec{P}, \quad \tilde{H} \mapsto \tilde{H}' = c \tilde{H} \quad (12.56)$$

beseitigt werden kann. Man zeigt leicht, dass diese Transformation kanonisch im weiteren Sinne ist. Daher beschränken wir uns ab jetzt auf Transformationen, die die kanonischen Gleichungen invariant lassen und für die  $c = 1$  gilt. Solche Transformationen heißen *kanonisch* (oder kanonisch im engeren Sinne).

Beispiel: Die Transformation

$$\vec{Q} = \vec{p}, \quad \vec{P} = \vec{q} \quad (12.57)$$

ist zwar kanonisch im weiteren Sinne, wie oben gezeigt, aber nicht kanonisch. Es gilt nämlich  $\tilde{H} = -H$ , also  $c = -1$ .

Die Transformation

$$\vec{Q} = \vec{p}, \quad \vec{P} = -\vec{q} \quad (12.58)$$

ist hingegen kanonisch. Aus

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (12.59)$$

folgt

$$\dot{P}_j = -\frac{\partial H}{\partial Q_j}, \quad \dot{Q}_j = \frac{\partial H}{\partial P_j}, \quad (12.60)$$

also ist  $\tilde{H} = H$  und  $c = 1$ . Dieses Beispiel zeigt, dass die Unterscheidung zwischen Koordinaten und Impulsen im Hamilton-Formalismus ziemlich künstlich ist.

### 12.2.1 Verschiedene Formen der erzeugenden Funktion

Für kanonische Transformationen ( $c = 1$ ) haben wir die folgenden Beziehungen zwischen den alten und den neuen Größen gefunden:

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j}, \quad (12.61)$$

$$P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j}, \quad (12.62)$$

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (12.63)$$

Für den obigen Beweis war es nützlich, die Erzeugende  $F_1$  von  $\vec{q}$  und  $\vec{Q}$  abhängen zu lassen. Die hohe Symmetrie zwischen Koordinaten und Impulsen im Hamilton-Formalismus legt aber nahe, dass man auch Impulse anstelle von Koordinaten als Variablen der Erzeugenden wählen können sollte. Das ist in der Tat der Fall. Die Erzeugende muss nur für jedes  $j$  von einer alten und einer neuen Variablen abhängen. Also sind die Kombinationen

$$(q_j, Q_j), \quad (q_j, P_j), \quad (p_j, Q_j), \quad (p_j, P_j) \quad (12.64)$$

möglich. Wir betrachten hier nur Erzeugende von *reinem* Typ, die für alle  $j$  von derselben Kombination abhängen, also z.B. nur von *allen* alten Impulsen und *allen* neuen Koordinaten. Der Übergang zwischen den vier Typen erfolgt durch Legendre-Transformationen (mit umgekehrtem Vorzeichen). Das ist plausibel, da Legendre-Transformationen die natürlichen Variablen von Funktionen ändern und dabei bijektiv (informationserhaltend) sind. Wir fassen hier die relevanten Beziehungen ohne Herleitung zusammen (für  $F_1$  hatten wir sie oben schon hergeleitet).

1.  $F_1 = F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t)$ :

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j}, \quad P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (12.65)$$

2.  $F_2$ :

$$F_2(\vec{q}, \vec{P}, t) = F_1 - \sum_j \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} Q_j = F_1 + \sum_j P_j Q_j, \quad (12.66)$$

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j}, \quad Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (12.67)$$

3.  $F_3$ :

$$F_3(\vec{p}, \vec{Q}, t) = F_1 - \sum_j \frac{\partial F_1}{\partial q_j} q_j = F_1 - \sum_j p_j q_j, \quad (12.68)$$

$$q_j = -\frac{\partial F_3}{\partial p_j}, \quad P_j = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_j}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}. \quad (12.69)$$

4.  $F_4$ :

$$F_4(\vec{p}, \vec{P}, t) = F_1 - \sum_j \left( \frac{\partial F_1}{\partial q_j} q_j + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} Q_j \right) = F_1 - \sum_j (p_j q_j - P_j Q_j), \quad (12.70)$$

$$q_j = -\frac{\partial F_4}{\partial p_j}, \quad Q_j = \frac{\partial F_4}{\partial P_j}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}. \quad (12.71)$$

Welche Form am günstigsten ist, hängt von der Aufgabenstellung ab. Es existieren auch nicht immer alle vier Formen der Erzeugenden.

Wir betrachten einige Beispiele:

1. Räumliche Punkttransformation. Es sei

$$F_2(\vec{q}, \vec{P}, t) = \sum_j g_j(\vec{q}, t) P_j \quad (12.72)$$

mit hinreichend oft stetig differenzierbaren Funktionen  $g_j$  der alten Koordinaten und evtl. der Zeit. Dann lesen wir ab:

$$Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = g_j(\vec{q}, t). \quad (12.73)$$

Das ist offensichtlich eine allgemeine Punkttransformation. Punkttransformationen sind also spezielle kanonische Transformationen. Sie sind wichtig, weil die Lagrange-Gleichungen unter allgemeinen Punkttransformationen invariant sind, wie wir bereits wissen. Die zugehörige Transformation der Impulse und der Hamilton-Funktion erhalten wir aus

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = \sum_j \frac{\partial g_j}{\partial q_i} P_j \quad (12.74)$$

und

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H + \sum_j \frac{\partial g_j}{\partial t} P_j. \quad (12.75)$$

2. Vertauschung von Koordinaten und Impulsen. Aus

$$F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t) = \sum_j q_j Q_j \quad (12.76)$$

erhalten wir

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j} = Q_j, \quad P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j} = -q_j, \quad (12.77)$$

also

$$Q_j = p_j, \quad P_j = -q_j, \quad (12.78)$$

was wir bereits als kanonisch erkannt hatten.

3. Harmonischer Oszillator. Die Hamilton-Funktion lautet

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2. \quad (12.79)$$

Wir suchen eine kanonische Transformation, die die Lösung vereinfacht. Das würde durch eine *zyklische* neue Koordinate  $Q$  gewährleistet. An dieser Stelle geben wir eine geeignete erzeugende Funktion einfach an. In Kapitel 15 werden wir eine systematische Methode kennenlernen, um eine solche Erzeugende zu finden.

Der Ansatz ist

$$F_1(q, Q, t) = \frac{1}{2} m \omega_0 q^2 \cot Q. \quad (12.80)$$

Es folgt

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m \omega_0 q \cot Q, \quad (12.81)$$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{1}{2} m \omega_0 q^2 \frac{1}{\sin^2 Q}. \quad (12.82)$$

Wir lösen die Gleichungen nach den alten Variablen (zum Quadrat) auf:

$$q^2 = \frac{2P}{m \omega_0} \sin^2 Q \quad (12.83)$$

$$\Rightarrow p^2 = m^2 \omega_0^2 q^2 \cot^2 Q = 2m \omega_0 P \cos^2 Q. \quad (12.84)$$

Die Hamilton-Funktion wird damit

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} = H = \omega_0 P \cos^2 Q + \omega_0 P \sin^2 Q = \omega_0 P. \quad (12.85)$$

$Q$  ist tatsächlich zyklisch. Damit ist  $P$  erhalten:

$$P(t) = P(0) = \text{const.} \quad (12.86)$$

Die Bewegungsgleichung für  $Q$  ist einfach

$$\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = \omega_0 \quad (12.87)$$

mit der Lösung

$$Q(t) = Q(0) + \omega_0 t. \quad (12.88)$$

Rücktransformation auf die alten Variablen ergibt schließlich

$$q(t) = \sqrt{\frac{2P(0)}{m\omega_0}} \sin(\omega_0 t + Q(0)), \quad (12.89)$$

$$p(t) = \sqrt{2m\omega_0 P(0)} \cos(\omega_0 t + Q(0)). \quad (12.90)$$

$Q$  ist also die Phase der Oszillation und  $P$  ist i.W. seine Gesamtenergie.

Wir sehen, dass die Menge (mathematisch eine *Gruppe*) der kanonischen Transformationen die Punkttransformationen  $\vec{q} \mapsto \vec{Q}$  im Konfigurationsraum enthält, aber weit darüber hinaus geht. Die Hamiltonsche Mechanik hat also eine sehr hohe Symmetrie, die man *symplektische* Symmetrie nennt. Den Phasenraum bezeichnet man auch als *symplektischen Raum*.

### 12.2.2 Kanonizität und Poisson-Klammern

Die Methode der erzeugenden Funktionen gestattet es, beliebig viele kanonische Transformationen zu erzeugen. Sie ist aber nicht sehr nützlich, wenn wir prüfen wollen, ob eine gegebene Transformation kanonisch ist. Dafür müssten wir nämlich eine erzeugende Funktion finden oder, noch schwieriger, zeigen, dass keine existiert. Eine viel einfachere Methode ergibt sich aus dem folgenden Satz:

Die Phasentransformation  $(\vec{q}, \vec{p}) \mapsto (\vec{Q}, \vec{P})$  ist genau dann kanonisch, wenn gilt

$$\{Q_i, Q_j\}_{\vec{q}, \vec{p}} = 0, \quad (12.91)$$

$$\{P_i, P_j\}_{\vec{q}, \vec{p}} = 0, \quad (12.92)$$

$$\{Q_i, P_j\}_{\vec{q}, \vec{p}} = \delta_{ij}, \quad (12.93)$$

d.h. wenn die fundamentalen Poisson-Klammern für die neuen Variablen, ausgedrückt durch die alten, gelten. (Wir müssen hier die in den Poisson-Klammern zu verwendenden Variablen  $\vec{q}, \vec{p}$  angeben, weil der Beweis der Unabhängigkeit der Poisson-Klammern von den kanonischen Variablen in Abschnitt 12.1 den gegenwärtigen Beweis verwendet. Wir können also die Unabhängigkeit nicht voraussetzen, sonst wäre der Beweis zirkulär.)

Beweis: Wir betrachten

$$\dot{Q}_i = \frac{d}{dt} Q_i(\vec{q}, \vec{p}, t) = \sum_j \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial Q_i}{\partial t} = \sum_j \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial Q_i}{\partial t}. \quad (12.94)$$

Nun existiert für eine kanonische Transformation eine Erzeugende  $F_2(\vec{q}, \vec{P}, t)$ , wobei gilt  $H = \tilde{H} - \partial F_2 / \partial t$ . Also folgt

$$\dot{Q}_i = \sum_j \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q_j} \right) - \sum_j \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \frac{\partial^2 F_2}{\partial p_j \partial t} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_j \partial t} \right) + \frac{\partial^2 F_2}{\partial t \partial P_i}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{jk} \left[ \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \left( \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial p_j} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial p_j} \right) - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \left( \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial q_j} \right) \right] - \left\{ Q_i, \frac{\partial F_2}{\partial t} \right\}_{\vec{q}, \vec{p}} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial P_i \partial t} \\
&= \sum_{jk} \left[ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \frac{\partial Q_k}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \frac{\partial P_k}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \frac{\partial P_k}{\partial q_j} \right) \right] - \left\{ Q_i, \frac{\partial F_2}{\partial t} \right\}_{\vec{q}, \vec{p}} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial P_i \partial t} \\
&= \sum_k \left( -\dot{P}_k \{Q_i, Q_k\}_{\vec{q}, \vec{p}} + \dot{Q}_k \{Q_i, P_k\}_{\vec{q}, \vec{p}} \right) - \left\{ Q_i, \frac{\partial F_2}{\partial t} \right\}_{\vec{q}, \vec{p}} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial P_i \partial t}. \tag{12.95}
\end{aligned}$$

Wir müssen noch den Term mit  $F_2$  untersuchen, der offenbar nur dann auftritt, wenn die Erzeugende explizit von der Zeit abhängt. Es ist

$$\begin{aligned}
-\left\{ Q_i, \frac{\partial F_2}{\partial t} \right\}_{\vec{q}, \vec{p}} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial P_i \partial t} &= -\sum_j \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \frac{\partial^2 F_2}{\partial p_j \partial t} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_j \partial t} \right) + \sum_j \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_j \partial t \partial P_i} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial p_j \partial t \partial P_i} \right) \\
&= \sum_j \left[ \left( -\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} + \frac{\partial p_j}{\partial P_i} \right) \frac{\partial^2 F_2}{\partial p_j \partial t} + \left( \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} + \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \right) \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_j \partial t} \right]. \tag{12.96}
\end{aligned}$$

Aber hierin ist

$$-\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} + \frac{\partial p_j}{\partial P_i} = -\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_j \partial P_i} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial P_i \partial q_j} = 0 \tag{12.97}$$

und

$$\frac{\partial Q_i}{\partial p_j} + \frac{\partial q_j}{\partial P_i} = +\frac{\partial^2 F_2}{\partial p_j \partial P_i} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial P_i \partial p_j} = 0. \tag{12.98}$$

Die Vertauschbarkeit von zweiten Ableitungen ergibt also die Identitäten  $\partial Q_i / \partial q_j = \partial p_j / \partial P_i$  und  $\partial Q_i / \partial p_j = -\partial q_j / \partial P_i$ . Solche Beziehungen nennt man Maxwell-Relationen. Sie spielen auch in der Thermodynamik eine Rolle.

Zusammengefasst erhalten wir

$$\dot{Q}_i = \sum_k \left( -\dot{P}_k \{Q_i, Q_k\}_{\vec{q}, \vec{p}} + \dot{Q}_k \{Q_i, P_k\}_{\vec{q}, \vec{p}} \right). \tag{12.99}$$

Dafür ist offensichtlich *hinreichend*, dass gilt

$$\{Q_i, Q_k\}_{\vec{q}, \vec{p}} = 0, \tag{12.100}$$

$$\{Q_i, P_k\}_{\vec{q}, \vec{p}} = \delta_{ik}. \tag{12.101}$$

Da Gl. (12.99) aber für alle Hamilton-Funktionen gelten muss, sind die  $Q_i, P_i$  unabhängig und die fundamentalen Kommutatoren für  $Q_i, P_i$  sind auch *notwendig*. Ausgehend von  $\dot{P}_i$  erhalten wir analog

$$\{P_i, P_k\}_{\vec{q}, \vec{p}} = 0. \tag{12.102}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. Die Untersuchung der fundamentalen Poisson-Klammern ist eine sehr einfache Methode zur Überprüfung der Kanonizität einer Phasentransformation.

Beispiel: Ist die Transformation

$$Q = \frac{q^2 + p^2}{2}, \tag{12.103}$$

$$P = \arctan \frac{p}{q} \tag{12.104}$$

kanonisch?  $Q$  und  $P$  sind mit Polarkoordinaten im Phasenraum verwandt.  $\{Q, Q\}_{q,p} = 0$  und  $\{P, P\}_{q,p} = 0$  sind trivial erfüllt. Wir müssen also nur  $\{Q, P\}_{q,p}$  überprüfen. Es ist

$$\{Q, P\}_{q,p} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = q \frac{\frac{1}{q}}{1 + \frac{p^2}{q^2}} - p \frac{-\frac{p}{q^2}}{1 + \frac{p^2}{q^2}} = \frac{q^2}{q^2 + p^2} + \frac{p^2}{q^2 + p^2} = 1.$$

Also ist die Transformation kanonisch.

## 12.3 Infinitesimale kanonische Transformationen

Wir betrachten nun kanonische Transformationen, unter denen sich die kanonischen Variablen nur infinitesimal ändern. Dabei werden wir insbesondere die Zeitentwicklung eines Systems als spezielle kanonische Transformation erkennen. In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf nicht explizit zeitabhängige Transformationen.

Die infinitesimalen Transformationen können wir als

$$Q_i = q_i + dq_i, \quad (12.105)$$

$$P_i = p_i + dp_i \quad (12.106)$$

schreiben. Eine erzeugende Funktion ist

$$F_2(\vec{q}, \vec{P}, t) = \sum_i q_i P_i + \epsilon G(\vec{q}, \vec{P}) \quad (12.107)$$

mit einem infinitesimalen Parameter  $\epsilon$ , wie wir leicht sehen können:

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad (12.108)$$

$$\Rightarrow dp_i = P_i - p_i = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad (12.109)$$

und andererseits

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i} \quad (12.110)$$

$$\Rightarrow dq_i = Q_i - q_i = \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}. \quad (12.111)$$

Nun ist  $\epsilon$  bereits infinitesimal, daher können wir in  $G$  die Variable  $P_i$  durch  $p_i$  ersetzen. Wir betrachten also  $G = G(\vec{q}, \vec{p})$  von nun an als Funktion von  $\vec{q}$  und  $\vec{p}$ . Zusammengefasst ist also

$$dq_i = \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}, \quad dp_i = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}. \quad (12.112)$$

Setzen wir nun speziell  $G$  gleich der Hamilton-Funktion,  $G(\vec{q}, \vec{p}) = H(\vec{q}, \vec{p})$ , und  $\epsilon = dt$ , so finden wir

$$dq_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} dt, \quad dp_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} dt \quad (12.113)$$

$$\Rightarrow \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (12.114)$$

Das sind gerade die kanonischen Gleichungen! Man sagt daher, dass die Hamilton-Funktion die Zeitentwicklung des Systems *erzeugt*.

Nebenbei sehen wir, dass die infinitesimale Zeitentwicklung überhaupt eine kanonische Transformation ist. Die Zeitentwicklung über ein endliches Zeitintervall von  $t_0$  bis  $t$  erhält man durch Hintereinanderausführung von kanonischen Transformationen für die infinitesimalen Zeitschritte. Diese ist daher ebenfalls kanonisch. Man kann auch direkt sehen, dass die Zeitentwicklung über ein endliches Zeitintervall von  $t_0$  bis  $t$  kanonisch ist: Sie ist nämlich offensichtlich eine Phasentransformation des Phasenraumvektors  $\vec{\pi}(t_0)$  in den Phasenraumvektor  $\vec{\pi}(t)$ , und die Variablen  $\vec{\pi}(t)$  sind *per Konstruktion* (mittels der Legendre-Transformation) kanonisch. Die Erzeugende für nicht nur infinitesimale Zeitentwicklung ist mathematisch i.A. kompliziert.

## 12.4 Phasenraumvolumen und Liouvillescher Satz

Die Poisson-Klammern sind wie gesehen invariant unter kanonischen Transformationen. Eine weitere wichtige Invariante ist das Volumenelement im Phasenraum,

$$d\Gamma := dq_1 \dots dq_S dp_1 \dots dp_S. \quad (12.115)$$

Nach der Substitutionsregel der Integralrechnung gilt nämlich beim Übergang von Variablen  $(\vec{q}, \vec{p})$  auf  $(\vec{Q}, \vec{P})$ ,

$$\begin{aligned} dq_1 \dots dq_S dp_1 \dots dp_S &= \frac{\partial(q_1, \dots, q_S, p_1, \dots, p_S)}{\partial(Q_1, \dots, Q_S, P_1, \dots, P_S)} dQ_1 \dots dQ_S dP_1 \dots dP_S \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial q_1}{\partial P_S} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_S}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial p_S}{\partial P_S} \end{vmatrix} dQ_1 \dots dQ_S dP_1 \dots dP_S. \end{aligned} \quad (12.116)$$

Die Determinante ist die Jacobi- oder Funktionaldeterminante  $\det \overset{\leftrightarrow}{J}$ .

Bei mehrfacher Anwendung der Substitutionsregel tritt das Produkt der entsprechenden Jacobi-Determinanten auf. Für die Transformation  $(\vec{q}, \vec{p}) \mapsto (\vec{Q}, \vec{q}) \mapsto (\vec{Q}, \vec{P})$  (die beiden Teilschritte sind jeweils nicht kanonisch!) gilt daher

$$\det \overset{\leftrightarrow}{J} = \frac{\partial(\vec{q}, \vec{p})}{\partial(\vec{Q}, \vec{P})} = \frac{\partial(\vec{q}, \vec{p})}{\partial(\vec{Q}, \vec{q})} \frac{\partial(\vec{Q}, \vec{q})}{\partial(\vec{Q}, \vec{P})}. \quad (12.117)$$

(Hier haben wir angenommen, dass  $q_1, \dots, q_S, Q_1, \dots, Q_S$  unabhängige Variable sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn eine Erzeugende vom Typ  $F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t)$  existiert. Falls das nicht der Fall ist, kann man auf andere Variablen als  $(\vec{q}, \vec{Q})$  transformieren, die einer der anderen Typen von Erzeugenden entsprechen.) Jetzt vertauschen wir in der ersten Determinante auf der rechten Seite die ersten  $S$  Zeilen mit den übrigen  $S$  Zeilen:

$$\det \overset{\leftrightarrow}{J} = (-1)^S \frac{\partial(\vec{p}, \vec{q})}{\partial(\vec{Q}, \vec{q})} \frac{\partial(\vec{Q}, \vec{q})}{\partial(\vec{Q}, \vec{P})} = (-1)^S \frac{\partial(\vec{p}, \vec{q})}{\partial(\vec{Q}, \vec{q})} \left[ \frac{\partial(\vec{Q}, \vec{P})}{\partial(\vec{Q}, \vec{q})} \right]^{-1}. \quad (12.118)$$

In der ersten Determinante sind  $\vec{p}$  und  $\vec{q}$  als unabhängige Funktionen anzusehen. Daher ist

$$\frac{\partial(\vec{p}, \vec{q})}{\partial(\vec{Q}, \vec{q})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial p_1}{\partial q_1} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \frac{\partial q_1}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial q_1}{\partial q_1} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial Q_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_1}{\partial Q_1} & \cdots & \mathbb{1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial Q_1} & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{vmatrix} = \frac{\partial(p_1, \dots, p_S)}{\partial(Q_1, \dots, Q_S)} \quad (12.119)$$

und analog

$$\frac{\partial(\vec{Q}, \vec{P})}{\partial(\vec{Q}, \vec{q})} = \frac{\partial(P_1, \dots, P_S)}{\partial(q_1, \dots, q_S)}. \quad (12.120)$$

Nun ist

$$\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial Q_j \partial q_i} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i} \quad \forall i, j = 1, \dots, S. \quad (12.121)$$

(Diese Art von Identität, die die Vertauschbarkeit der Ableitungen einer Funktion nach ihren natürlichen Variablen ausnutzt, spielt in der Thermodynamik eine wichtige Rolle; Stichwort „Maxwell-Identitäten“.) Die Matrix mit den Komponenten  $\partial p_i / \partial Q_j$  ist also das Negative der Matrix mit den Komponenten  $\partial P_j / \partial q_i$ . Für deren Determinanten gilt dann

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial p_1}{\partial Q_S} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_S}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial p_S}{\partial Q_S} \end{vmatrix} = (-1)^S \begin{vmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial P_S}{\partial q_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_1}{\partial q_S} & \cdots & \frac{\partial P_S}{\partial q_S} \end{vmatrix}. \quad (12.122)$$

Da sich die Determinante bei Transposition der Matrix nicht ändert, folgt

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial p_1}{\partial Q_S} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_S}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial p_S}{\partial Q_S} \end{vmatrix} = (-1)^S \begin{vmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial q_S} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_S}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial P_S}{\partial q_S} \end{vmatrix}, \quad (12.123)$$

also

$$\frac{\partial(\vec{p}, \vec{q})}{\partial(\vec{Q}, \vec{q})} \left[ \frac{\partial(\vec{Q}, \vec{P})}{\partial(\vec{Q}, \vec{q})} \right]^{-1} = \frac{\partial(p_1, \dots, p_S)}{\partial(Q_1, \dots, Q_S)} \left[ \frac{\partial(P_1, \dots, P_S)}{\partial(q_1, \dots, q_S)} \right]^{-1} = (-1)^S \quad (12.124)$$

und damit

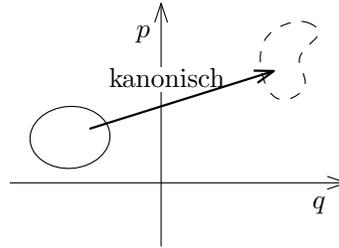
$$\det \overset{\leftrightarrow}{J} = (-1)^S (-1)^S = 1. \quad (12.125)$$

Es folgt

$$dq_1 \dots dq_S dp_1 \dots dp_S = |\det \overset{\leftrightarrow}{J}| dQ_1 \dots dQ_S dP_1 \dots dP_S = dQ_1 \dots dQ_S dP_1 \dots dP_S$$

unter beliebigen kanonischen Transformationen  $(\vec{q}, \vec{p}) \mapsto (\vec{Q}, \vec{P})$ .

Unter einer kanonischen Transformation wird ein beliebiges, nicht unbedingt infinitesimales, Volumen  $V$  im Phasenraum i.A. in komplizierter Weise verformt. Aus der eben bewiesenen Aussage folgt aber, dass sich sein  $2S$ -dimensionaler Rauminhalt (Phasenraumvolumen) dabei nicht ändert. Der Rauminhalt lässt sich nämlich als Integral über dieses Volumen  $V$  und damit als Summe über Volumenelemente  $dq_1 \dots dq_S dp_1 \dots dp_S$  schreiben. Da die Zeitentwicklung ja eine spezielle kanonische Transformation ist, gelten die gemachten Aussagen auch für die Änderung von Phasenraumvolumina mit der Zeit.



Das ist die Grundlage für den wichtigen Liouvilleschen Satz, den wir nun besprechen wollen. Dazu führen wir zunächst die neue Idee der *Verteilungsfunktion* oder *Dichte* im Phasenraum ein. Wir nehmen an, wir haben nicht ein, sondern viele gleichartige mechanische Systeme, man spricht von einem „Ensemble“. Uns interessiert hier nicht das Verhalten jedes einzelnen Systems, sondern Eigenschaften des Ensembles *im Mittel*. Das kann z.B. der Fall sein, weil wir tatsächlich viele gleichartige Systeme vorliegen haben (Beispiel: Gasatome in einem Behälter) oder weil wir viele Messungen an demselben System oder an gleichartig präparierten Systemen ausführen. Die Untersuchung von gemittelten Eigenschaften ist die zentrale Aufgabe der statistischen Mechanik.

Ein Ensemble können wir mittels der *Verteilungsfunktion* oder *Phasenraum-dichte*  $\rho(\vec{q}, \vec{p}, t)$  charakterisieren. Dabei ist

$$\rho(\vec{q}, \vec{p}, t) dq_1 \dots dq_S dp_1 \dots dp_S = \rho(\vec{q}, \vec{p}, t) d\Gamma \quad (12.126)$$

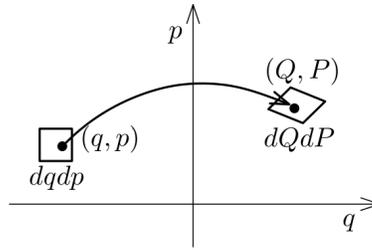
die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig herausgegriffenes System (ein Element des Ensembles) kanonische Variablen  $(\vec{q}, \vec{p})$  im Phasenraumelement  $d\Gamma = dq_1 \dots dq_S dp_1 \dots dp_S$  hat. Da dieses System sicherlich in irgendeinem Zustand ist, muss gelten

$$\int d\Gamma \rho(\vec{q}, \vec{p}, t) = 1. \quad (12.127)$$

Wir betrachten nun die Zeitentwicklung. Wie gesehen ist die Zeitentwicklung von Zeit  $t_0$  bis zur Zeit  $t$  eine kanonische Transformation  $(\vec{q}, \vec{p}) \mapsto (\vec{Q}, \vec{P})$ . Unter kanonischen Transformationen bleibt das Phasenraumvolumenelement  $d\Gamma$  invariant,

$$d\Gamma = dQ_1 \dots dQ_S dP_1 \dots dP_S = dq_1 \dots dq_S dp_1 \dots dp_S. \quad (12.128)$$

Die Wahrscheinlichkeit  $\rho d\Gamma$ , ein herausgegriffenes System in  $d\Gamma$  zu finden, bleibt in *mitfließenden* Koordinaten und Impulsen ebenfalls invariant, da keine Systeme erzeugt oder vernichtet werden.



Daher ist die Verteilungsfunktion  $\rho$  selbst unter der Zeitentwicklung des Systems invariant:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (12.129)$$

Dies ist der *Liouvillesche Satz*. Es ist entscheidend, dass hier eine totale Zeitableitung steht, d.h. die zeitliche Änderung der kanonischen Variablen  $\vec{q}$ ,  $\vec{p}$  wird berücksichtigt. Der Liouvillesche Satz bedeutet, dass sich die *mitfließende* Verteilungsfunktion nicht ändert. Die Änderung der Verteilungsfunktion an einem *festen* Phasenraumpunkt wäre  $\partial\rho/\partial t$ , was i.A. nicht verschwindet. Wenn wir  $\rho(\vec{q}, \vec{p}, t)$  anschaulich als Dichte einer „Flüssigkeit“ im 2S-dimensionalen Phasenraum interpretieren, bedeutet der Liouvillesche Satz, dass diese Flüssigkeit *inkompressibel* ist.

In Abschnitt 12.1 wurde gezeigt, dass für *jede* Phasenfunktion  $f(\vec{q}, \vec{p}, t)$  gilt

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (12.130)$$

Die Verteilungsfunktion  $\rho$  ist offensichtlich eine Phasenfunktion und erfüllt daher

$$\frac{d\rho}{dt} = \{\rho, H\} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad (12.131)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} = -\{\rho, H\} = \{H, \rho\}. \quad (12.132)$$

Diese Gleichung, die man ebenfalls als Liouvilleschen Satz bezeichnet, kann man als Kontinuitätsgleichung für die Verteilungsfunktion  $\rho$  ansehen. Dabei beschreibt  $\partial\rho/\partial t$  die explizite Änderung der Wahrscheinlichkeit in einem festen, nicht mitbewegten Phasenraumvolumenelement und  $\{\rho, H\}$  den Fluss von Wahrscheinlichkeit durch dessen Oberfläche. Insbesondere gilt für eine *stationäre* Verteilungsfunktion  $\partial\rho/\partial t = 0$  und damit  $\{\rho, H\} = 0$ .

Beispiel: Für den harmonischen Oszillator ist die Zeitentwicklung der Verteilungsfunktion besonders einfach. Ausgehend von der Hamilton-Funktion

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{K}{2}q^2 \quad (12.133)$$

transformieren wir auf skalierte Variablen

$$Q = (mK)^{1/4} q, \quad P = \frac{1}{(mK)^{1/4}} p. \quad (12.134)$$

Diese Transformation ist offensichtlich kanonisch. Die neue Hamilton-Funktion lautet

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{\frac{K}{m}}}_{=\omega} (P^2 + Q^2). \quad (12.135)$$

Die kanonischen Gleichungen

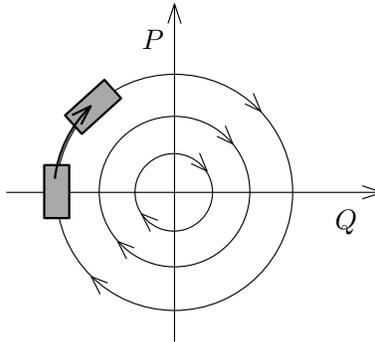
$$\dot{Q} = \frac{\partial\tilde{H}}{\partial P} = \omega P, \quad \dot{P} = -\frac{\partial\tilde{H}}{\partial Q} = -\omega Q \quad (12.136)$$

haben die Lösungen

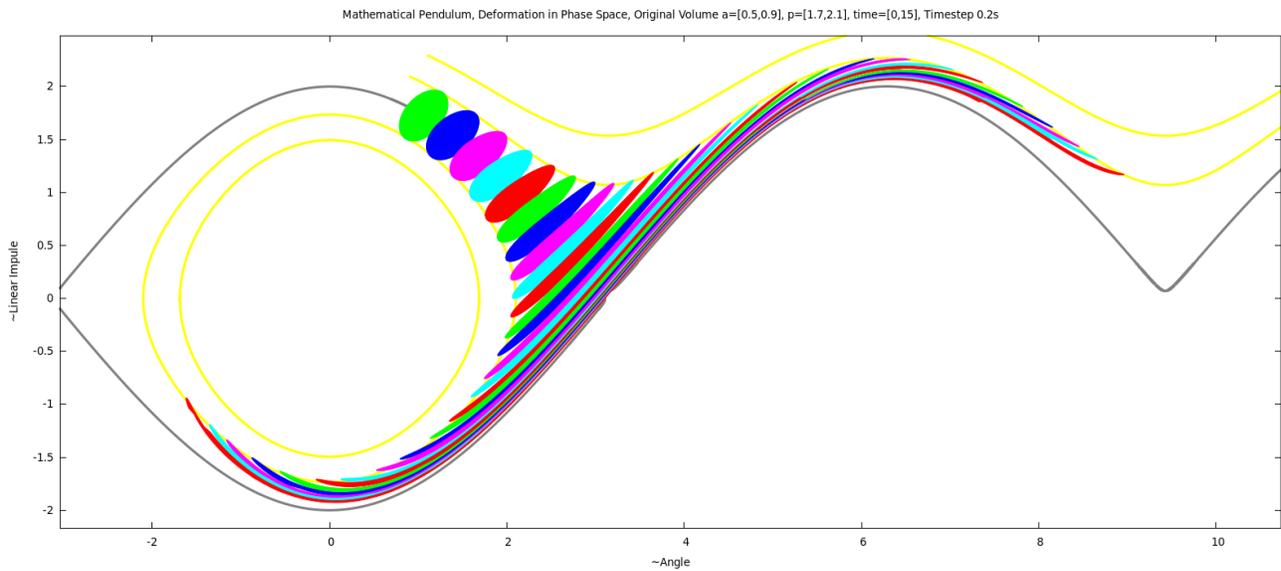
$$Q = A \cos(\omega t + \phi), \quad (12.137)$$

$$P = -A \sin(\omega t + \phi) \tag{12.138}$$

mit beliebigen  $A$  und  $\phi$ . Diese beschreiben eine *starre Rotation* im Phasenraum im Uhrzeigersinn. Also rotiert eine beliebige Verteilungsfunktion  $\rho(Q, P, t)$  einfach starr um den Nullpunkt.



In jedem nicht zu einem harmonischen Oszillator äquivalenten System wird die Zeitentwicklung nicht durch eine starre Rotation im Phasenraum beschrieben. Aber das mittelfließende Phasenraumvolumen bleibt erhalten, wie übrigens auch die Topologie – ein einfach zusammenhängendes Phasenraumvolumen bleibt einfach zusammenhängend. Es kann sich aber fast beliebig verzerren. Als Beispiel betrachten wir das Fadenpendel. Die folgende Graphik zeigt, dass die Verteilung vom hyperbolischen Fixpunkt bei  $\phi = \pi$  nicht zerschnitten wird, sondern sich zu einem langen Streifen verformt.



Graphik zur Verfügung gestellt von A. Wachsmuth

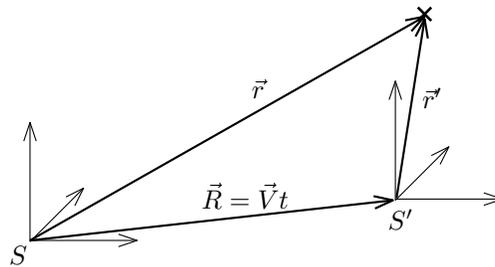


# Kapitel 13

## Relativistische Kinematik

In diesem und dem folgenden Kapitel betrachten wir die *Spezielle Relativitätstheorie* (SRT) im Hinblick auf die klassische Mechanik. Im Wesentlichen geht es dabei um die Frage, ob und wie sich die Gesetze der Mechanik ändern, wenn es eine maximale Geschwindigkeit, die Lichtgeschwindigkeit  $c$ , gibt. Die volle Struktur der SRT kann erst in der Elektrodynamikvorlesung dargestellt werden.

Wir haben gesehen, dass die Newton-Mechanik ohne Einführung von Scheinkräften nur in *Inertialsystemen* gültig ist. In Abschnitt 3.3 hatte sich herausgestellt, dass Inertialsysteme durch *Galilei-Transformationen* ineinander überführt werden. Dabei führt ein Bezugssystem  $S'$  gegenüber einem Bezugssystem  $S$  eine Translation mit konstanter Geschwindigkeit  $\vec{V}$  aus.



Für die Koordinaten und die Zeit eines Punktes bezüglich  $S$  und  $S'$  gilt, mit  $\vec{R} = \vec{V}t$ ,

$$\vec{r} = \vec{V}t + \vec{r}', \quad (13.1)$$

$$t = t'. \quad (13.2)$$

Die Gesetze der Newton-Mechanik bleiben unter Galilei-Transformationen unverändert. Man sagt, die Newton-Mechanik ist *Galilei-invariant*. Daher hat es, wenn die Newtonsche Mechanik korrekt ist, keinen Sinn, ein bestimmtes Inertialsystem als ruhend zu definieren. Man könnte es gar nicht von anderen unterscheiden. In der Newton-Mechanik gibt es also keinen absoluten Raum. Andererseits gibt es eine absolute Zeit, da diese in allen Inertialsystemen gleich ist. Die Lagrange- und Hamilton-Mechanik sind ebenfalls invariant unter Galilei-Transformationen, da sie ja für gleiche Systeme die gleichen Voraussagen wie die Newton-Mechanik machen. (Die Lagrange- und Hamilton-Mechanik sind, wie wir gesehen haben, noch unter viel allgemeineren Transformationen invariant. Diese sind für uns hier nicht von Bedeutung.)

Obwohl die klassische Mechanik nicht auf natürliche Weise zum Konzept eines absoluten Raumes führt, wurde dessen Existenz in der Wissenschaft des 19. Jahrhunderts überwiegend angenommen. Dies beruhte auf der Annahme, dass das *Licht* (oder allgemeiner alle elektromagnetischen Wellen) eine Anregung gekoppelter Schwinger sein müsse. Wir hatten in Abschnitt 10.3 gesehen, dass der *Schall* eine Anregung gekoppelter Schwinger ist. Eine analoge Vermutung für das Licht lag also nahe. Der vermutete Träger der Lichtwellen wurde *Äther* genannt. Wenn der Äther existiert, zeichnet er ein Inertialsystem vor allen anderen aus, nämlich das, in dem der Äther ruht. Damit gäbe es einen absoluten Raum.

Die Existenz des Äthers hätte beobachtbare Konsequenzen. Insbesondere würde die gemessene Lichtgeschwindigkeit von der Geschwindigkeit  $\vec{V}$  der Messapparatur gegenüber dem Äther abhängen. Michelson und Morley wollten die Existenz des Äthers durch den Nachweis der Abhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Richtung der Bewegung des Labors gegenüber dem Fixsternhimmel nachweisen. Ihre Experimente zeigten aber im Gegenteil, dass die Lichtgeschwindigkeit nicht richtungsabhängig ist, im Widerspruch zur Äthertheorie.

## 13.1 Die Einsteinschen Postulate

Ausgehend von den Michelson-Morley- und weiteren Experimenten vermutete Einstein, dass nicht nur die Gesetze der Mechanik, sondern auch die der Elektrodynamik in allen Inertialsystemen gleich sind. Er formulierte zwei Postulate (Axiome):

1. *Äquivalenzpostulat*: Die physikalischen Gesetze sind in allen Inertialsystemen identisch.
2. *Konstanz der Lichtgeschwindigkeit*: Die Lichtgeschwindigkeit  $c$  im Vakuum ist zu allen Zeiten, an allen Orten und in jeder Raumrichtung gleich groß und ist insbesondere unabhängig von der Bewegung der Quelle.

Das erste Postulat ist eigentlich nichts Neues, es gilt schon in der nicht relativistischen Newton-Mechanik. Nun werden aber auch die Gesetze der Elektrodynamik eingeschlossen. Die wesentliche Neuerung steckt im zweiten Postulat. Es sagt aus, dass  $c = \text{const}$  ein Gesetz im Sinne des ersten Postulats und damit invariant ist. Es geht sogar darüber hinaus, da es  $c = \text{const}$  auch für beschleunigte Bezugssysteme fordert. Die Postulate wirken recht harmlos, heben aber die gesamte Mechanik aus den Angeln.

Wir zeigen jetzt, dass die bisher betrachtete Mechanik den Einsteinschen Postulaten widerspricht. Wir betrachten zwei Inertialsysteme  $S$  und  $\underline{S}$ .  $\underline{S}$  möge sich gegenüber  $S$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{v} = v\hat{x} = v\hat{x}$  entlang der gemeinsamen  $x$ -Achse bewegen. In  $S$  werden zwei Lichtblitze in der positiven und negativen  $x$ -Richtung ausgesandt. Nach dem zweiten Postulat sind ihre Geschwindigkeiten in  $S$ :

$$\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13.3)$$

Die Galilei-Transformation liefert die folgenden Geschwindigkeiten in  $\underline{S}$ :

$$\underline{\vec{c}}_1 = \begin{pmatrix} c-v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\vec{c}}_2 = \begin{pmatrix} -c-v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13.4)$$

$$\Rightarrow \underline{c}_1 = c-v, \quad \underline{c}_2 = c+v, \quad (13.5)$$

falls  $v < c$  gilt. Nach dem zweiten Postulat muss aber gelten  $\underline{c}_1 = \underline{c}_2 = c$ . Wir finden also einen Widerspruch. Offenbar muss das Additionsgesetz für Geschwindigkeiten auf fundamentaler Ebene geändert werden.

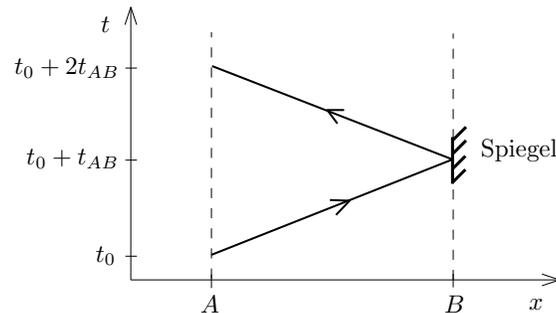
### 13.1.1 Relativität der Gleichzeitigkeit und Zeitdilatation

Um die Konsequenzen der Einsteinschen Postulate hinsichtlich der Gleichzeitigkeit von Ereignissen diskutieren zu können, benötigen wir sorgfältige Definitionen der Begriffe Ereignis und Gleichzeitigkeit, die uns bisher offensichtlich erschienen waren. Als *Ereignis* bezeichnen wir einen Vorgang, der an einem bestimmten Ort  $\vec{r}$  und zu einer bestimmten Zeit  $t$  (bzgl. eines gegebenen Bezugssystems) stattfindet.  $\vec{r}$  und  $t$  bilden die Raum-Zeit-Koordinaten des Ereignisses. Hinter der Definition steht die Idee, dass wir uns beliebige Vorgänge, die i.A. nicht in Raum und Zeit scharf lokalisiert sind, als aus solchen Ereignissen aufgebaut denken können.

Um die *Gleichzeitigkeit* von Ereignissen zu definieren, müssen wir zunächst sagen, wie wir zwei Uhren in einem Inertialsystem synchronisieren wollen. Wir betrachten zwei feste Punkte  $A$  und  $B$  in einem Inertialsystem. Aufgrund des zweiten Postulats läuft ein Lichtsignal von  $A$  nach  $B$  genauso lange wie von  $B$  nach  $A$ . Diese Zeit sei

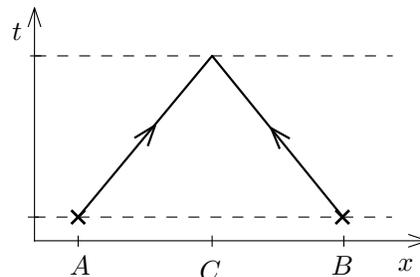
$$t_{AB} := \frac{\overline{AB}}{c}. \quad (13.6)$$

Stellen wir bei  $B$  einen Spiegel auf, so braucht ein Lichtsignal von  $A$  zum Spiegel und zurück die Zeit  $2t_{AB}$ . Senden wir bei  $A$  zur Zeit  $t_0$  das Signal aus, so sehen wir zur Zeit  $t_0 + 2t_{AB}$  das reflektierte Signal. Wenn wir von  $A$  aus gleichzeitig auf der Uhr bei  $B$  die Zeit  $t_0 + t_{AB}$  ablesen, so sind die beiden Uhren *synchron*.



Lesen wir eine frühere oder spätere Zeit ab, so wissen wir, um wieviel die Uhr bei  $B$  gegenüber der Uhr bei  $A$  nach- oder vorgeht. Wir können dann die Uhr bei  $A$  entsprechend stellen oder dafür sorgen, dass die Uhr bei  $B$  gestellt wird. Entsprechend können wir weitere Uhren synchronisieren. Man kann sich überlegen, dass die Synchronizität in einem Inertialsystem transitiv ist. Sind also die Uhren bei  $A$  und  $B$  synchron und die Uhren bei  $B$  und  $C$  synchron, so sind auch die Uhren bei  $A$  und  $C$  synchron.

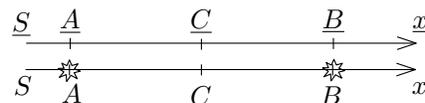
Wir haben Synchronizität unter Verwendung des Konzepts der Gleichzeitigkeit an *einem* Ort definiert, das wir als durch die Erfahrung hinreichend bestimmt ansehen. Wir definieren nun zwei Ereignisse an *verschiedenen* Orten in einem Inertialsystem als *gleichzeitig*, wenn bei ihrem Eintritt zwei synchrone Uhren an diesen Orten dieselbe Zeit anzeigen. Alternativ und ohne vorherige Definition von Synchronizität können wir zwei Ereignisse auch als gleichzeitig definieren, wenn sie von einem Ort  $C$  im gleichen Abstand zu den Orten  $A, B$  der beiden Ereignisse gleichzeitig wahrgenommen werden können.



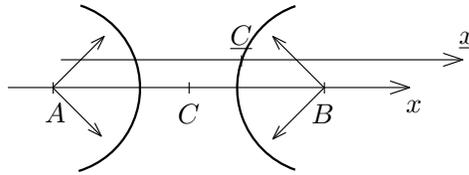
Bisher haben wir nur die Synchronisation von Uhren in demselben Inertialsystem diskutiert. Wir können sicherlich auch zwei Uhren in gegeneinander bewegten Inertialsystemen synchronisieren, *wenn* sie sich (zu einem bestimmten Zeitpunkt) an demselben Ort befinden. Dann können wir nämlich die angezeigten Zeiten vergleichen und eine der Uhren entsprechend nachstellen.

Das folgende Gedankenexperiment zeigt, dass Ereignisse, die in einem Bezugssystem  $S$  gleichzeitig stattfinden, dies in einem anderen Bezugssystem  $\underline{S}$  nicht tun müssen. In  $S$  sei ein Bahnsteig parallel zur  $x$ -Richtung raumfest. An seinen Enden bei  $A$  und  $B$  steht je eine Lichtquelle. In der Mitte zwischen  $A$  und  $B$  steht ein Beobachter bei  $C$ . Am Bahnsteig entlang fährt ein Zug mit konstanter Geschwindigkeit  $\vec{v} = v\hat{x}$ . Das Bezugssystem  $\underline{S}$  sei am Zug fest. Im Zug befindet sich ein zweiter Beobachter bei  $\underline{C}$ .

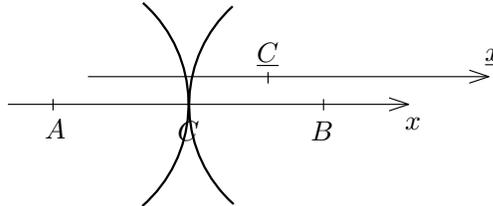
Wenn  $C$  und  $\underline{C}$  auf gleicher Höhe sind, senden beide Lichtquellen gleichzeitig (in  $S$ ) ein Signal aus.



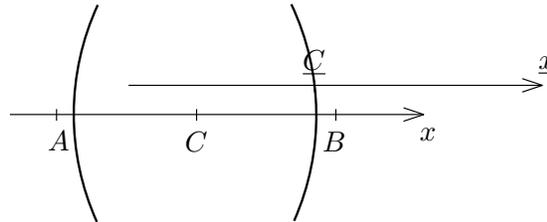
Das Lichtsignal von  $B$  erreicht  $\underline{C}$  zuerst:



Später erreichen beide Signale *gleichzeitig*  $C$ . Der Beobachter bei  $C$  stellt damit fest, dass die Signale in  $S$  gleichzeitig ausgesendet wurden.

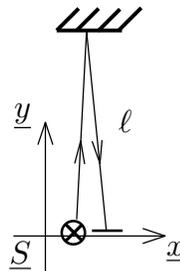


Noch später erreicht das Signal von  $A$  den Beobachter bei  $\underline{C}$ . Da die Signale die gleiche Strecke  $\overline{AC} = \overline{BC}$  zurückgelegt haben, folgert er, dass die Signale in  $\underline{S}$  *nicht* gleichzeitig ausgesendet wurden.



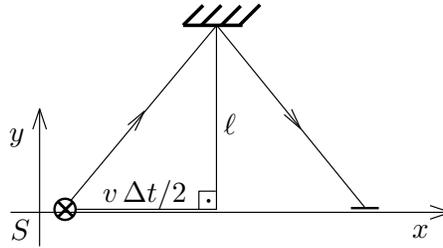
Es kann aufgrund des zweiten Postulats für dieses Gedankenexperiment übrigens nicht wichtig sein, dass die Lichtquellen am Bahnsteig und nicht am Zug befestigt sind. Das Resultat ist jedenfalls, dass Gleichzeitigkeit von Ereignissen an verschiedenen Orten keine invariante Eigenschaft ist. Im Beispiel misst der Beobachter bei  $C$  eine Zeitdifferenz  $\Delta t = 0$ , der Beobachter bei  $\underline{C}$  dagegen  $\underline{\Delta t} \neq 0$ . Allgemeiner folgern wir also, dass Zeitintervalle in gegeneinander bewegten Inertialsystemen nicht gleich sind. Aus den Einsteinschen Postulaten folgt somit, dass es keine absolute Zeit gibt.

Das können wir noch an einem weiteren Gedankenexperiment erkennen: Der Beobachter im Zug ( $\underline{S}$ ) habe eine Lichtquelle, die Signale in transversaler Richtung  $\underline{y}$  aussenden kann, einen Spiegel im Abstand  $\ell$  und einen Detektor neben der Quelle.



Die Laufzeit eines Lichtsignals beträgt offenbar  $\underline{\Delta t} = 2\ell/c$ . Diese Zeit kann mit *einer einzelnen* im Bezugssystem  $\underline{S}$  festen Uhr gemessen werden. Die Zeit, die eine solche Uhr anzeigt, nennt man die *Eigenzeit* des Bezugssystems.  $\underline{\Delta t} \equiv \Delta\tau$  ist also die vergangene Eigenzeit.

Was sieht der Beobachter auf dem Bahnsteig ( $S$ )?



Für diesen betrage die Laufzeit  $\Delta t$ . Die vom Lichtpuls in  $S$  zurückgelegte Strecke ist

$$s = 2 \sqrt{\ell^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2}. \quad (13.7)$$

Daraus folgt mit dem zweiten Postulat

$$\Delta t = \frac{s}{c} = \frac{2}{c} \sqrt{\ell^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2}. \quad (13.8)$$

Diese Gleichung können wir nach  $\Delta t$  auflösen:

$$c^2 \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 = \ell^2 + v^2 \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 \quad (13.9)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 = \frac{\ell^2}{c^2 - v^2} \quad (13.10)$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{2\ell}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \Delta\tau = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > \Delta\tau. \quad (13.11)$$

Im Bezugssystem  $S$  wird also eine *längere* Zeit als die Eigenzeit  $\Delta\tau$  gemessen. Diesen Effekt nennt man *Zeitdilatation*. Die experimentelle Anordnung kann als Uhr angesehen werden, wobei das Hin- und Herlaufen des Lichtpulses ein Ticken der Uhr bedeutet. Ein Beobachter in  $S$  sieht, dass die Uhr in  $\underline{S}$  *langsamer* läuft. Natürlich erscheinen alle zeitabhängigen Prozesse verlangsamt, nicht nur Uhren.

Es sei hervorgehoben, dass  $\Delta t$  *keine* Eigenzeit in  $S$  ist, da *zwei* Uhren zur Messung von  $\Delta t$  erforderlich sind; die Aussendung und der Empfang des Signals geschehen in  $S$  an verschiedenen Orten. Eigenzeiten in gegeneinander bewegten Inertialsystemen können nie direkt miteinander verglichen werden, da sich zwei Uhren in den beiden Bezugssystemen höchstens zu *einem* Zeitpunkt an demselben Ort befinden. Das beschriebene Gedankenexperiment ist nicht symmetrisch (eine Uhr in  $\underline{S}$ , zwei Uhren in  $S$ ), daher ist das folgende Argument *falsch*: Wir könnten ebensogut  $S$  als gegenüber  $\underline{S}$  bewegt ansehen. Dann folgte analog  $\underline{\Delta t} > \Delta t$  (Fehlschluss!). Das widerspräche dem Ergebnis  $\Delta t > \underline{\Delta t}$ , also sei die SRT in sich widersprüchlich.

## 13.2 Die Lorentz-Transformation

Wir haben im vorigen Abschnitt gesehen, dass die Zeit nicht absolut ist, dass sich also beim Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen die Zeit transformieren muss. Die Galilei-Transformation ist daher mit Einsteins Postulaten unvereinbar. Wir untersuchen nun, was an ihre Stelle tritt.

Wir betrachten wieder zwei Inertialsysteme  $S$  und  $\underline{S}$ , deren Ursprünge zur Zeit  $t = \underline{t} = 0$  zusammenfallen mögen.  $\underline{S}$  bewege sich gegenüber  $S$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$ . Zur Zeit  $t = 0$  werde am (gemeinsamen) Ursprung eine elektromagnetische

$$\text{in } S : \quad c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (13.12)$$

$$\text{in } \underline{S} : \quad c^2 \underline{t}^2 = \underline{x}^2 + \underline{y}^2 + \underline{z}^2. \quad (13.13)$$

Die Transformation muss so erfolgen, dass beide Gleichungen erfüllt sind. Offenbar ist die Größe

$$s^2 := c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \equiv c^2 t^2 - \vec{r}^2 \quad (13.14)$$

invariant, d.h. in beiden Bezugssystemen gleich, nämlich Null. Aufgrund der Homogenität des Raumes und der Zeit muss die Transformation  $(t, \vec{r}) \rightarrow (\underline{t}, \underline{\vec{r}})$  linear sein. Wir suchen also eine lineare Transformation, die die Größe  $s^2$  invariant lässt.  $s^2 = c^2 t^2 - \vec{r}^2$  sieht dem Betragsquadrat eines Vektors  $(ct, x, y, z)$  ähnlich, nur sind einige Vorzeichen „falsch“. Wir wissen, dass das Betragsquadrat von Vektoren unter Drehungen invariant ist, und vermuten daher, dass die gesuchte Transformation eine verallgemeinerte Drehung ist. Wir führen zunächst eine nützliche Notation ein:

- $(a^0, a^1, a^2, a^3) = (a^0, \vec{a})$  (beachte die hochgestellten Indizes) heißt *kontravarianter Vierervektor* (oder 4-Vektor). Wir verwenden auch die Notation  $(a^\mu)$ , wobei die Klammer anzeigen soll, dass wir den 4-Vektor meinen, nicht eine Komponente.
- $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a^0, -\vec{a})$  heißt *kovarianter Vierervektor* (4-Vektor). Wir schreiben auch  $(a_\mu)$ . Offenbar enthält  $(a_\mu)$  dieselbe Information wie  $(a^\mu)$ .
- Das (verallgemeinerte) *Skalarprodukt* zweier 4-Vektoren ist definiert durch

$$\sum_{\mu=0}^3 a_\mu b^\mu = \sum_{\mu=0}^3 a^\mu b_\mu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (13.15)$$

Wir lassen nun das Summenzeichen  $\sum_{\mu=0}^3$  weg, über doppelte obere und untere Indizes soll automatisch summiert werden (*Einsteinsche Summenkonvention*):

$$a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (13.16)$$

Es ist offensichtlich wichtig, sorgfältig zwischen oberen und unteren Indizes zu unterscheiden. Ein Ausdruck mit doppelten oberen oder doppelten unteren Laufindizes ist i.A. nicht wohlgeformt, z.B.  $a_\mu b_\mu$ .

- Das (verallgemeinerte) *Betragsquadrat* eines 4-Vektors ist dann

$$a_\mu a^\mu = (a^0)^2 - \vec{a} \cdot \vec{a}. \quad (13.17)$$

Beachte, dass  $a_\mu a^\mu$  negativ werden kann.

- Kontravariante und kovariante Vierervektoren hängen zusammen über

$$a^0 = a_0, \quad a^1 = -a_1, \quad a^2 = -a_2, \quad a^3 = -a_3. \quad (13.18)$$

In Matrix-Schreibweise lauten diese Beziehungen

$$\begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad (13.19)$$

also (Summenkonvention!)

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu \quad (13.20)$$

und analog

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu, \quad (13.21)$$

wobei  $g^{\mu\nu}$  und  $g_{\mu\nu}$  die Matrixdarstellung

$$g = (g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (13.22)$$

haben.  $g$  heißt *metrischer Tensor* oder einfach *Metrik*. Mit Hilfe des metrischen Tensors können wir Indizes *heben* oder *senken*, d.h. Vektoren zwischen kontravarianter und kovarianter Form umrechnen. Während der metrische Tensor in der SRT die angegebene Form hat und insbesondere in Raum und Zeit konstant ist, ist er in der *Allgemeinen* Relativitätstheorie selbst eine dynamische Größe.

Speziell ist

$$s^2 = x_\mu x^\mu \quad (13.23)$$

mit dem Viererortsvektor  $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ , woraus folgt  $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z)$ . Die lineare Transformation von  $t, \vec{r}$  auf  $\underline{t}, \underline{\vec{r}}$  sei

$$\underline{x}_\mu = L_\mu^\nu x_\nu, \quad \underline{x}^\mu = L^\mu_\nu x^\nu. \quad (13.24)$$

Beachte, dass es auf die Reihenfolge der Indizes ankommt, wie nur darauf, ob sie oben oder unten stehen. Es folgt

$$\underline{s}^2 = \underline{x}_\mu \underline{x}^\mu = L_\mu^\nu x_\nu L^\mu_\lambda x^\lambda = x_\nu L_\mu^\nu L^\mu_\lambda x^\lambda. \quad (13.25)$$

Es soll  $\underline{s}^2 = 0$  für alle  $x_\nu$  mit  $s^2 = x_\nu x^\nu = 0$  gelten. Dies erfordert

$$L_\mu^\nu L^\mu_\lambda = \alpha \delta_\lambda^\nu \quad (13.26)$$

mit einem evtl. von  $\vec{v}$  abhängigen Skalar  $\alpha$ . Das Kronecker-Symbol  $\delta_\lambda^\nu$  ist definiert wie üblich, wir haben nur darauf geachtet, den oberen Index oben zu lassen und den unteren unten. Ein beliebiges Skalarprodukt transformiert sich dann gemäß

$$\underline{a}_\mu \underline{b}^\mu = a_\nu L_\mu^\nu L^\mu_\lambda b^\lambda = \alpha a_\nu \delta_\lambda^\nu b^\lambda = \alpha(\vec{v}) a_\nu b^\nu. \quad (13.27)$$

Nun bewegt sich  $S$  gegenüber  $\underline{S}$  mit der Geschwindigkeit  $-\vec{v}$ . Für die Rücktransformation gilt also

$$a_\nu b^\nu = \alpha(-\vec{v}) \underline{a}_\mu \underline{b}^\mu. \quad (13.28)$$

Aufgrund der Isotropie des Raumes darf  $\alpha(\vec{v})$  jedoch nur vom Betrag der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  abhängen, nicht von der Richtung. Also folgt

$$\underline{a}_\mu \underline{b}^\mu = \alpha^2(v) \underline{a}_\mu \underline{b}^\mu \quad (13.29)$$

und schließlich  $\alpha(v) = \pm 1$ . Die Lösung  $-1$  ist aber unsinnig, da  $\alpha$  sicherlich stetig in  $\vec{v}$  sein muss und sich für  $\vec{v} = 0$  die identische Transformation mit  $L = \mathbb{1}$  ergeben muss. Alternativ kann man drei Transformationen mit Geschwindigkeiten  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  und  $\vec{v}_3$  betrachten, die  $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = |\vec{v}_3| = v$  und  $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = 0$  erfüllen. Hier ergibt sich  $\alpha^3(v) = 1$ . Wir finden also, dass die Transformation ganz allgemein *alle* Skalarprodukte  $a_\mu b^\mu$  von 4-Vektoren invariant lassen muss.

Wir definieren nun eine *allgemeine Lorentz-Transformation* als eine lineare Abbildung

$$\underline{x}_\mu = L_\mu^\nu x_\nu, \quad \underline{x}^\mu = L^\mu_\nu x^\nu, \quad (13.30)$$

die alle Skalarprodukte invariant lässt. Dann ist, wie oben gesehen,  $L_\mu^\nu L^\mu_\lambda = \delta_\lambda^\nu$ . Daher sind  $L_\mu^\nu$  und  $L^\mu_\nu$  die Komponenten zweier zueinander inverser Matrizen.

Weiter sei ein *Lorentz-Skalar* (Welt-Skalar) eine Größe, die unter Lorentz-Transformationen invariant ist. Damit sind Skalarprodukte und speziell Betragsquadrate Lorentz-Skalare.

Wie sieht die Matrix  $L = (L^\mu_\nu)$  mit den Komponenten  $L^\mu_\nu$  aus? Wir betrachten o.B.d.A. die Bewegung des Bezugssystems  $\underline{S}$  gegenüber  $S$  entlang der gemeinsamen  $x$ -Achse mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$ . Es gilt  $\underline{y} = y$  und  $\underline{z} = z$  – sonst könnte es passieren, dass zwei aufeinander zufliegende Objekte aus Sicht von  $S$  zusammenstoßen, aus Sicht von  $\underline{S}$  dagegen aneinander vorbei fliegen. Außerdem ist der Koordinatenursprung in der  $yz$ -Ebene willkürlich, also dürfen  $\underline{x}$  und  $\underline{t}$  nicht von  $y, z$  abhängen. Damit ist

$$L = (L^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} L^0_0 & L^0_1 & 0 & 0 \\ L^1_0 & L^1_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (13.31)$$

Also ist

$$c\underline{t} = L^0_0 ct + L^0_1 x, \quad (13.32)$$

$$\underline{x} = L^1_0 ct + L^1_1 x. \quad (13.33)$$

Nun soll für alle  $x, t$  gelten

$$\begin{aligned} c^2 t^2 - x^2 &= c^2 \underline{t}^2 - \underline{x}^2 = (L^0_0 ct + L^0_1 x)^2 - (L^1_0 ct + L^1_1 x)^2 \\ &= [(L^0_0)^2 - (L^1_0)^2] c^2 t^2 + 2[L^0_0 L^0_1 - L^1_0 L^1_1] ct x + [(L^0_1)^2 - (L^1_1)^2] x^2. \end{aligned} \quad (13.34)$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$(L^0_0)^2 - (L^1_0)^2 = 1, \quad (13.35)$$

$$L^0_0 L^0_1 - L^1_0 L^1_1 = 0, \quad (13.36)$$

$$(L^0_1)^2 - (L^1_1)^2 = -1. \quad (13.37)$$

Speziell für den Ursprung von  $\underline{S}$  gilt

$$x = vt = \frac{v}{c} ct \quad (13.38)$$

und damit

$$\underline{x} = 0 = L^1_0 ct + L^1_1 x = \left( L^1_0 + L^1_1 \frac{v}{c} \right) ct \quad (13.39)$$

$$\Rightarrow L^1_0 + L^1_1 \frac{v}{c} = 0. \quad (13.40)$$

Zusammen mit den Gleichungen (13.35)–(13.37) haben wir nun vier Gleichungen für vier Unbekannte. Die Lösung ist

$$L^1_1 = L^0_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} =: \gamma, \quad (13.41)$$

$$L^1_0 = L^0_1 = -\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} =: -\beta\gamma \quad \text{mit } \beta = \frac{v}{c}, \quad (13.42)$$

wie man durch Einsetzen bestätigt. Also ist

$$L \equiv (L^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13.43)$$

und die Lorentz-Transformation lautet

$$c\underline{t} = \gamma ct - \beta\gamma x, \quad (13.44)$$

$$\underline{x} = -\beta\gamma ct + \gamma x. \quad (13.45)$$

Für  $v \ll c$  ergibt sich  $\gamma \rightarrow 1$ ,  $\beta \rightarrow 0$ ,  $\beta c = v$ , also die Galilei-Transformation  $c\underline{t} = ct$ ,  $\underline{x} = x - vt$ . Der nicht-relativistische Grenzfall kommt also richtig heraus.

Die Lorentz-Transformation für eine beliebige Geschwindigkeit  $\vec{v}$  von  $\underline{S}$  gegenüber  $S$  können wir leicht erhalten. Dazu zerlegen wir die Transformation in drei Systemen bezüglich der Translation entlang  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  und  $\hat{z}$ . Eine Lorentz-Transformation zwischen zwei Bezugssystemen mit parallelen Achsen, wie wir sie bisher betrachtet haben, nennt man eine *spezielle Lorentz-Transformation* oder einen „Boost“. Die allgemeine Lorentz-Transformation hatten wir dadurch definiert, dass sie Skalarprodukte invariant lässt. Das schließt neben Boosts auch rein räumliche, zeitunabhängige Drehungen und Kombinationen von Boosts und Drehungen ein. Insgesamt hat eine allgemeine Lorentz-Transformation sechs Parameter, nämlich die drei Komponenten von  $\vec{v}$  und drei Parameter für die Drehung, z.B. drei Euler-Winkel.

### 13.2.1 Längenkontraktion

Eine weitere scheinbar paradoxe Folgerung lässt sich sofort aus der Lorentz-Transformation ziehen: Wir betrachten wieder den Zug, der an einem Bahnsteig entlang fährt. Im mitbewegten System  $\underline{S}$  habe der Zug die Länge  $\underline{\ell} = \underline{x}_B - \underline{x}_A$ ;  $\underline{x}_A$  und  $\underline{x}_B$  sind die Koordinaten der Enden des Zuges. Am Bahnsteig sei ein Längenmaßstab befestigt. Im Ruhesystem  $S$  des Bahnsteigs wird die Länge  $\ell = x_B - x_A$  des Zuges ermittelt, indem zur gleichen Zeit  $t_A = t_B$  (in  $S$ ) die Koordinaten  $x_A$  und  $x_B$  abgelesen werden. Dann gilt

$$\begin{aligned}\underline{\ell} = \underline{x}_B - \underline{x}_A &= -\beta\gamma ct_B + \gamma x_B + \beta\gamma ct_A - \gamma x_A \\ &= \beta\gamma c \underbrace{(t_A - t_B)}_{=0} + \gamma(x_B - x_A) = \gamma\ell = \frac{\ell}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},\end{aligned}\quad (13.46)$$

also

$$\ell = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \underline{\ell} < \underline{\ell}.\quad (13.47)$$

Vom Bahnsteig aus gesehen erscheint der Zug verkürzt. Dieses Phänomen nennt man *Längenkontraktion*.

### 13.2.2 Additionstheorem für Geschwindigkeiten

Wir betrachten drei Bezugssysteme  $S$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ , wobei sich  $S_1$  gegenüber  $S$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}_1$  bewegt,  $S_2$  gegenüber  $S_1$  mit  $\vec{v}_2$  und  $S_2$  gegenüber  $S$  mit  $\vec{v}_{\text{tot}}$ . Nicht-relativistisch hätten wir natürlich  $\vec{v}_{\text{tot}} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ . Aber in der SRT kann das nicht mehr gelten, weil sonst z.B. aus  $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \frac{2}{3}c\hat{x}$  folgen würde  $v_{\text{tot}} = \frac{4}{3}c$ , wodurch  $\gamma$  und damit die Raum-Zeit-Koordinaten in  $S_2$  imaginär würden.

Um den korrekten Zusammenhang von  $\vec{v}_{\text{tot}}$  mit  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  zu finden, müssen wir die Kombination der Lorentz-Transformationen zu  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  untersuchen. Wir beschränken uns hier auf den Fall, dass  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  parallel sind. Ihre Richtung wählen wir o.B.d.A. als  $x$ -Richtung. Nicht parallele Geschwindigkeiten können auf dieselbe Weise behandelt werden. Mit  $n = 1, 2$  und

$$\beta_n := \frac{v_n}{c},\quad (13.48)$$

$$\gamma_n := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_n^2}}\quad (13.49)$$

lauten die Transformationsmatrizen

$$L^{(n)} = \begin{pmatrix} \gamma_n & -\beta_n\gamma_n & 0 & 0 \\ -\beta_n\gamma_n & \gamma_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\quad (13.50)$$

Die gesamte Transformation von  $S$  auf  $S_2$  wird dann beschrieben durch das Produkt

$$L^{\text{tot}} = L^{(2)}L^{(1)} = \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2) & -\gamma_1\gamma_2(\beta_1 + \beta_2) & 0 & 0 \\ -\gamma_1\gamma_2(\beta_1 + \beta_2) & \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\quad (13.51)$$

$L^{\text{tot}}$  muss die Form einer Lorentz-Transformation mit der resultierenden Geschwindigkeit  $\vec{v}_{\text{tot}}$  haben,

$$L^{\text{tot}} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \gamma_{\text{tot}} & -\beta_{\text{tot}}\gamma_{\text{tot}} & 0 & 0 \\ -\beta_{\text{tot}}\gamma_{\text{tot}} & \gamma_{\text{tot}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\quad (13.52)$$

Es folgt

$$\gamma_{\text{tot}} = \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2), \quad (13.53)$$

$$\beta_{\text{tot}} = \frac{\gamma_1 \gamma_2 (\beta_1 + \beta_2)}{\gamma_{\text{tot}}} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}. \quad (13.54)$$

Damit  $L^{\text{tot}}$  tatsächlich eine Lorentz-Transformation ist, müssen  $\beta_{\text{tot}}$  und  $\gamma_{\text{tot}}$  miteinander konsistent sein. Das ist der Fall:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{\text{tot}}^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(\beta_1 + \beta_2)^2}{(1 + \beta_1 \beta_2)^2}}} = \frac{1 + \beta_1 \beta_2}{\sqrt{(1 + \beta_1 \beta_2)^2 - (\beta_1 + \beta_2)^2}} = \frac{1 + \beta_1 \beta_2}{\sqrt{1 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + \beta_1^2 \beta_2^2}} \\ &= \frac{1 + \beta_1 \beta_2}{\sqrt{1 - \beta_1^2} \sqrt{1 - \beta_2^2}} = \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2) = \gamma_{\text{tot}}. \end{aligned} \quad (13.55)$$

Das Additionstheorem lautet also für parallele Geschwindigkeiten

$$v_{\text{tot}} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}. \quad (13.56)$$

(Offensichtlich werden hier nicht die Geschwindigkeiten addiert, eher handelt es sich um die „Addition“ zweier Boosts.) Damit ist  $v_{\text{tot}} < c$ , sofern  $v_1, v_2 < c$  gilt, denn

$$\begin{aligned} c - v_{\text{tot}} &= c - \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \\ &= \frac{c + \frac{v_1 v_2}{c} - v_1 - v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \\ &= \frac{1}{c} \frac{c^2 + v_1 v_2 - c v_1 - c v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \\ &= \frac{1}{c} \frac{(c - v_1)(c - v_2)}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} > 0. \end{aligned} \quad (13.57)$$

Durch Kombination von Translationen mit Geschwindigkeiten kleiner als die Lichtgeschwindigkeit kann man also niemals die Lichtgeschwindigkeit überschreiten. Ist dagegen z.B.  $v_2 \rightarrow c$ , so ergibt sich  $v_{\text{tot}} \rightarrow (v_1 + c)/(1 + v_1/c) = c$  unabhängig von  $v_1$ . Demnach ist die Geschwindigkeit von Licht unabhängig von der Geschwindigkeit  $v_1$  der Quelle. Das ist ein Teil des zweiten Einsteinschen Postulats. Wir hatten die Theorie natürlich gerade so konstruiert, dass dieses Postulat erfüllt ist.

### 13.3 Lichtkegel und Minkowski-Raum

Wir fassen jetzt  $x = (x^\mu) = (ct, \vec{r})$  als *Relativvektor* zwischen zwei Ereignissen auf. Dieser Vierervektor hat die zunächst merkwürdige Eigenschaft, dass sein Betragsquadrat

$$s^2 = x_\mu x^\mu = c^2 t^2 - \vec{r}^2 \quad (13.58)$$

nicht unbedingt positiv ist. Wir haben gesehen, dass  $s^2$  unter Lorentz-Transformationen invariant (Lorentz-invariant) ist. Damit ist insbesondere das Vorzeichen von  $s^2$  eine invariante, vom Bezugssystem unabhängige, Eigenschaft des Vektors.

Welche Bedeutung hat das Vorzeichen von  $s^2$ ? Im letzten Abschnitt hatten wir gesehen, dass für die Ausbreitung von Licht immer  $s^2 = 0$  gilt. Für  $s^2 > 0$  können wir eine Lorentz-Transformation finden, die den räumlichen Anteil zum Verschwinden bringt. Es ist nämlich

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (13.59)$$

wenn wir

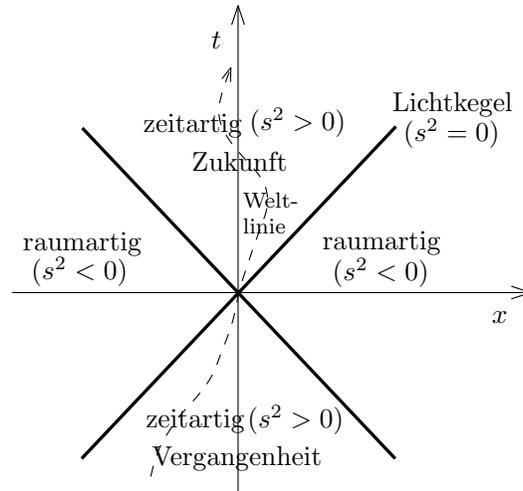
$$\beta = \frac{x}{ct}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (13.60)$$

wählen. Wegen  $s^2 = c^2t^2 - x^2 > 0$  ist  $|x/t| < c$ , also  $|\beta| < 1$ , und es handelt sich um eine korrekte Lorentz-Transformation. Es existiert also ein Bezugssystem, in dem die beiden Ereignisse am gleichen *Ort* stattfinden. Analog kann man für  $s^2 < 0$  ein Bezugssystem finden, in dem die beiden Ereignisse zur gleichen *Zeit* stattfinden.

Daher bezeichnet man einen Vierervektor  $x = (ct, \vec{r})$  als

- *zeitartig*, wenn  $s^2 = c^2t^2 - \vec{r}^2 > 0$  ist,
- *lichtartig*, wenn  $s^2 = c^2t^2 - \vec{r}^2 = 0$  ist,
- *raumartig*, wenn  $s^2 = c^2t^2 - \vec{r}^2 < 0$  ist.

Den vierdimensionalen Raum der Vierervektoren  $x$ , ausgestattet mit dem verallgemeinerten Skalarprodukt  $x_\mu y^\mu$ , bezeichnet man als *Minkowski-Raum*. Man kann den Minkowski-Raum also in zeit- und raumartige Regionen, getrennt durch lichtartige Vektoren, einteilen. Ein Schnitt mit  $y = z = 0$  ist hier skizziert:



Die lichtartigen Raum-Zeit-Punkte bilden den *Lichtkegel*, der eine einlaufende (für  $t < 0$ ) bzw. auslaufende (für  $t > 0$ ) Kugelwelle beschreibt. Die zeitartige Region zerfällt in zwei nicht zusammenhängende Teile für  $t \leq 0$ , die Vergangenheit und die Zukunft. Diese Begriffe bleiben in der SRT absolut, d.h. Lorentz-invariant; es gibt keine Lorentz-Transformation, die Punkte in der Zukunft in die Vergangenheit transformiert oder umgekehrt. Das muss so sein, um die Kausalität zu gewährleisten. Die raumartige Region ist zusammenhängend; beachte die hier nicht eingezeichneten  $y$ - und  $z$ -Richtungen.

Die Trajektorie eines Teilchens im Minkowski-Raum heißt *Weltlinie*. Wir schließen aus Experimenten wie dem Photoeffekt, dass das Licht auch Teilchennatur hat. Die Weltlinien der Lichtteilchen (Photonen) liegen dann offenbar auf dem Lichtkegel, da sie sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Die Bewegung von Photonen können wir aber nicht im Rahmen der relativistischen klassischen Mechanik beschreiben, was sich z.B. daran zeigt, dass  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  für lichtschnelle Teilchen nicht definiert ist.

Teilchen mit nicht verschwindender Masse können in jedem Bezugssystem nur Geschwindigkeiten  $v < c$  haben. Ihre Weltlinien liegen daher im Inneren des Lichtkegels und haben überall eine größere Steigung als dieser. Licht und massive Teilchen können Informationen übertragen, daher können Ereignisse auf und im Inneren des Lichtkegels mit dem Ereignis bei  $(ct, \vec{r}) = 0$  kausal zusammenhängen. Zwischen Ereignissen mit raumartigem Abstand können keine Informationen ausgetauscht werden, da selbst das Licht dafür zu langsam ist. Solche Ereignisse können daher nicht kausal zusammenhängen. Das ist damit konsistent, dass die zeitliche Reihenfolge solcher Ereignisse nicht Lorentz-invariant ist.

### 13.4 Eigenzeit und Vierergeschwindigkeit

Die Strategie besteht jetzt darin, alle Größen als Lorentz-Skalare oder Vierervektoren (oder höhere Tensoren, die wir hier aber nicht brauchen) zu formulieren, dann verhalten sie sich unter Transformationen zwischen Inertialsystemen richtig; mit Hilfe dieser Größen formulierte Gesetze erfüllen das erste Postulat. Wir kennen bisher den Orts-Vierervektor ( $x^\mu$ ). Für die Lagrange-Mechanik benötigen wir zumindest noch einen Geschwindigkeits-Vierervektor (Vierergeschwindigkeit) ( $u^\mu$ ). Wie sieht dieser aus? Der Ansatz

$$u^\mu \stackrel{?}{=} \frac{dx^\mu}{dt} \quad (13.61)$$

ist keine gute Idee, denn  $t = x^0/c$  ist *kein* Lorentz-Skalar: wir haben gerade gesehen, dass sich  $t \rightarrow \underline{t}$  unter Lorentz-Transformationen ändert. Damit ist  $(dx^\mu/dt)$  kein Vierervektor. Wir benötigen also zunächst einen *Skalar* der Zeit. Eine vernünftige Wahl ist die *Eigenzeit*  $\tau$ , also die auf einer mitgeführten Uhr gemessene Zeit. Wir benötigen das Differential  $d\tau$ . Es ist

$$c^2 d\tau^2 - 0 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = ds^2. \quad (13.62)$$

Die linke Seite der Gleichung bezieht sich auf das mitgeführte Koordinatensystem, in dem die Uhr natürlich keinen Weg zurücklegt. Das mitgeführte Koordinatensystem ist i.A. kein Inertialsystem. Da wir aber nur ein infinitesimales Zeitintervall  $d\tau$  betrachten, ist unerheblich, ob das Teilchen eine beschleunigte Bewegung ausführt.

Aus Gl. (13.62) folgt

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - v^2 dt^2 = (c^2 - v^2) dt^2 \quad (13.63)$$

$$\Rightarrow d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \frac{dt}{\gamma}. \quad (13.64)$$

Da  $\gamma \geq 1$  ist, folgt  $d\tau \leq dt$ ; im Laborsystem vergeht eine längere Zeit als im mitgeführten System (Zeitdilatation). Nun können wir die Vierergeschwindigkeit als korrekten Vierervektor mit den Komponenten

$$u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} \quad (13.65)$$

definieren. Konkret gilt

$$u^0 = \gamma \frac{dct}{dt} = \gamma c, \quad (13.66)$$

$$\vec{u} = \gamma \frac{d\vec{r}}{dt} = \gamma \vec{v} \quad (13.67)$$

mit der gewöhnlichen (Dreier-) Geschwindigkeit  $\vec{v}$ . Also ist

$$u_\mu u^\mu = (u^0)^2 - \vec{u} \cdot \vec{u} = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 v^2 = \frac{c^2 - v^2}{1 - v^2/c^2} = c^2. \quad (13.68)$$

Das ist offensichtlich ein Lorentz-Skalar. Da  $s$  die Bogenlänge entlang einer Weltlinie ist, ist  $(u^\mu) = (dx^\mu/d\tau) = c(dx^\mu/ds)$  Tangentenvektor an der Weltlinie.

Die naheliegende Verallgemeinerung der Beschleunigung hat die Komponenten

$$a^\mu := \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}. \quad (13.69)$$

Man sieht sofort, dass gilt

$$a^\mu u_\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} u_\mu = \frac{1}{2} \left( \frac{du^\mu}{d\tau} u_\mu + u^\mu \frac{du_\mu}{d\tau} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} u^\mu u_\mu = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} c^2 = 0 \quad (13.70)$$

(beachte  $a^\mu u_\mu = a_\mu u^\mu$ ). Die Viererbeschleunigung ist also immer orthogonal zur Vierergeschwindigkeit und damit zur Weltlinie.

Während das Betragsquadrat  $u_\mu u^\mu = c^2$  nicht nur Lorentz-invariant, sondern auch universell ist, finden wir für  $a_\mu a^\mu$  einen systemspezifischen Ausdruck:

$$a_\mu a^\mu = \frac{du_\mu}{d\tau} \frac{du^\mu}{d\tau} = \gamma^2 \frac{du_\mu}{dt} \frac{du^\mu}{dt} = \gamma^2 \left[ \left( \frac{d}{dt} \gamma c \right)^2 - \left( \frac{d}{dt} \gamma \vec{v} \right)^2 \right]. \quad (13.71)$$

Mit

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{1}{2} \frac{-\frac{1}{c^2} 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{\gamma^3}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{a}, \quad (13.72)$$

wobei wir wie üblich

$$\vec{a} := \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (13.73)$$

definieren, findet man nach einiger Rechnung

$$a_\mu a^\mu = -\gamma^4 \left[ \gamma^2 \left( \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{a} \right)^2 + \vec{a}^2 \right]. \quad (13.74)$$



# Kapitel 14

## Relativistische Dynamik

Die bisher betrachteten Bewegungsgleichungen der Mechanik (Newton, Lagrange, Hamilton) sind alle nicht Lorentz-invariant. In diesem Kapitel geht es darum, diese Grundgleichungen geeignet zu erweitern. Dabei gehen wir von zwei Prämissen aus:

- Die bisher bekannten Bewegungsgleichungen sind im Grenzfall  $v \ll c$  korrekt.
- Die Mechanik muss Lorentz-invariant formuliert werden.

### 14.1 Newton-Mechanik

In der nicht-relativistischen Newton-Mechanik lautet das Bewegungsgesetz (2. Axiom) für konstante Masse

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}. \quad (14.1)$$

Eine naheliegende relativistische Verallgemeinerung ist

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = ma^\mu = K^\mu. \quad (14.2)$$

Die (träge) Masse  $m$  ist eine Eigenschaft des Körpers, wir nehmen daher an, dass sie ein Lorentz-Skalar ist. Damit ist die linke Seite ein Vierervektor. Die rechte Seite ist dann ebenfalls ein Vierervektor, eine relativistisch verallgemeinerte Kraft, die wir noch nicht kennen. Sie wird auch „Minkowski-Kraft“ genannt.

Wir können sofort das folgende Skalarprodukt bestimmen:

$$K^\mu u_\mu = ma^\mu u_\mu = 0. \quad (14.3)$$

Die Viererkraft ist also immer orthogonal zur Vierergeschwindigkeit. Damit können wir die zeitliche Komponente  $K^0$  der Viererkraft ausdrücken:

$$K^\mu u_\mu = K^0 u_0 - \vec{K} \cdot \vec{u} = K^0 \gamma c - \vec{K} \cdot \gamma \vec{v} = 0 \quad (14.4)$$

$$\Rightarrow K^0 = \frac{\vec{K} \cdot \vec{v}}{c}. \quad (14.5)$$

Die räumlichen Komponenten der Viererbeschleunigung lauten, mit  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,

$$\frac{d\vec{u}}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt} \gamma \vec{v} = \gamma \frac{d\gamma}{dt} \vec{v} + \gamma^2 \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\gamma^4}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{a}) \vec{v} + \gamma^2 \vec{a} \quad (14.6)$$

mit Glg. (13.72) und der gewöhnlichen Beschleunigung  $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ . Im Grenzfall  $v/c \rightarrow 0$  folgt  $\gamma \rightarrow 1$  und  $d\vec{u}/d\tau \rightarrow \vec{a}$ . Daher müssen im Grenzfall  $v/c \rightarrow 0$  die räumlichen Komponenten  $\vec{K}$  der Viererkraft in die Kraft  $\vec{F}$

aus dem Newtonschen Bewegungsgesetz übergehen. Dieser Grenzfall, zusammen mit der Forderung, dass  $(K^\mu)$  nach Gl. (14.2) ein Vierervektor sein muss, reichen nicht hin, um  $(K^\mu)$  eindeutig festzulegen. Das Problem besteht darin, dass  $(K^\mu)$  in komplizierter Weise von der Vierergeschwindigkeit  $(u^\mu)$  abhängen kann, der nicht relativistische Grenzfall jedoch höchstens die führenden Terme für kleine  $v/c$  festlegt.

Die sich hier sinnvoll anschließende Diskussion ist in einigen Lehrbüchern unsauber. Goldsteins Darstellung ist zwar sorgfältig, verwendet aber eine altmodische Notation. Wir definieren zunächst den Viererimpuls

$$p^\mu := mu^\mu. \quad (14.7)$$

Nun zeigen die Uhren im Laborsystem  $S$  die Zeit  $t$  an und nicht die Eigenzeit  $\tau$  von irgendwelchen bewegten Teilchen. Daher ist es natürlicher, in der Bewegungsgleichung die Zeitableitung nach der Laborzeit  $t$  und nicht nach  $\tau$  zu verwenden,

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dp^\mu}{dt} = K^\mu, \quad (14.8)$$

wobei wir gemäß Gl. (13.64)  $dt/d\tau = \gamma$  eingesetzt haben. Es folgt für die räumlichen Komponenten

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\vec{K}}{\gamma} =: \vec{F}. \quad (14.9)$$

Im Versuch, die Form der Newtonschen Bewegungsgleichung zu bewahren, wurde die rechte Seite der Gleichung als  $\vec{F}$  definiert. Beachte, dass  $\vec{F}$  im Gegensatz zu  $\vec{K}$  nicht die räumlichen Komponenten eines Vierervektors enthält.

Nur im Grenzfall  $v/c \rightarrow 0$  wird  $\vec{p} = m\vec{v}$  und damit  $\vec{F}$  die Kraft aus der nicht-relativistischen Bewegungsgleichung. Für beliebige Geschwindigkeiten gilt

$$\vec{p} = m\vec{u} = \gamma m\vec{v} \quad (14.10)$$

und damit

$$\frac{d}{dt} \gamma m\vec{v} = \vec{F}. \quad (14.11)$$

Interpretiert man  $\gamma m$  als geschwindigkeitsabhängige „relativistische Masse“, so erkennt man den Versuch, relativistische Effekte im Rahmen einer Newtonschen Formulierung durch Ersetzung von  $m$  durch  $\gamma m$  zu berücksichtigen. Dieser Versuch ist letztlich nicht zielführend und man kann schon die Einführung von  $\vec{F}$  als Anachronismus sehen.

Akzeptieren wir die Definition, so können wir für die räumlichen Komponenten von  $(K^\mu)$  schreiben

$$\vec{K} = \gamma \vec{F} \quad (14.12)$$

und für die zeitliche Komponente

$$K^0 = \gamma \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c}. \quad (14.13)$$

Diese zeitliche Komponente wollen wir näher untersuchen. Aus

$$m \frac{du^0}{d\tau} = K^0 \quad (14.14)$$

folgt nun

$$m\gamma \frac{d}{dt} \gamma c = \gamma \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c} \quad (14.15)$$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} \gamma mc^2. \quad (14.16)$$

Im nicht-relativistischen Grenzfall gilt (unter der Annahme einer konservativen Kraft)

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{dT}{dt}, \quad (14.17)$$

wobei  $T$  die kinetische Energie ist. Es liegt also nahe,  $\gamma mc^2$  als relativistische Verallgemeinerung der kinetischen Energie aufzufassen, zumindest bis auf eine additive Konstante. Wir *definieren* daher die *relativistische kinetische Energie* als

$$T_{\text{rel}} := \gamma mc^2, \quad (14.18)$$

so dass gilt

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{dT_{\text{rel}}}{dt}. \quad (14.19)$$

Für kleine Geschwindigkeiten  $v \ll c$  ist

$$T_{\text{rel}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cong mc^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) = mc^2 + \frac{1}{2} mv^2. \quad (14.20)$$

Das ist in der Tat bis auf eine Konstante der bekannte nicht-relativistische Ausdruck. Die Konstante  $mc^2$  erscheint hier auf natürliche Weise – wir könnten sie nur durch die alternative Definition  $T_{\text{rel}} := (\gamma - 1)mc^2$  loswerden, die unnatürlich wirkt. Die Konstante ist aber im Rahmen der klassischen Mechanik beliebig, da sie keinerlei Konsequenzen für die Dynamik hat. In der Allgemeinen Relativitätstheorie hat dieser Term dagegen überprüfbare Konsequenzen: Hier geht die Gesamtenergiedichte in die Grundgleichungen ein und man erhält nur Übereinstimmung mit Experimenten, wenn man für jedes Teilchen seine *Ruheenergie*  $mc^2$  berücksichtigt. Auch in der Quantenfeldtheorie, die die Erzeugung und Vernichtung von Teilchen beschreiben kann, wird deutlich, dass es sehr sinnvoll ist, einem Teilchen der Masse  $m$  die Ruheenergie  $mc^2$  zuzuordnen. Das ist die Energie, die notwendig ist, um das Teilchen in einem Zustand mit Impuls  $\vec{p} = 0$  zu erzeugen.

Ist die kinetische Energie  $T_{\text{rel}}$  eines Teilchens ein Lorentz-Skalar? Sicherlich nicht, da sie sich mit der Geschwindigkeit des Bezugssystems ändern sollte. Tatsächlich finden wir

$$T_{\text{rel}} = \gamma mc^2 = mu^0 c = p^0 c, \quad (14.21)$$

die kinetische Energie ist also bis auf einen konstanten Faktor die zeitliche Komponente des Viererimpulses

$$(p^\mu) = (p^0, p^1, p^2, p^3) = \left( \frac{T_{\text{rel}}}{c}, \vec{p} \right). \quad (14.22)$$

Das gilt natürlich nur, weil wir die Ruheenergie  $mc^2$  in  $T_{\text{rel}}$  eingeschlossen haben. Wieder finden wir, dass die Ruheenergie in der SRT auf natürliche Weise erscheint.

Wir erhalten eine wichtige Beziehung für die kinetische Energie: Es ist

$$m^2 c^2 = m^2 u_\mu u^\mu = p_\mu p^\mu = (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 = \frac{T_{\text{rel}}^2}{c^2} - \vec{p}^2, \quad (14.23)$$

also

$$T_{\text{rel}}^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2. \quad (14.24)$$

Ein freies Teilchen hat *nur* kinetische Energie,  $E = T_{\text{rel}}$ . In diesem Fall ist

$$E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2 \quad (14.25)$$

oder

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}. \quad (14.26)$$

Beides sind gebräuchliche Formen der *relativistischen Energie-Impuls-Beziehung* für freie Teilchen.

## 14.2 Lagrange- und Hamilton-Mechanik

Systematischer als im Rahmen der Newton-Mechanik lässt sich die relativistische Mechanik mit Hilfe des Lagrange-Formalismus formulieren. Wir betrachten das freie Teilchen und das Teilchen im elektromagnetischen Feld. Das ist keine wirkliche Einschränkung, denn von den fundamentalen Kräften erfordern die schwache und die starke Kraft

i.A. eine quantentheoretische Beschreibung und die Gravitation lässt sich zwar klassisch beschreiben, aber nicht im Rahmen der SRT. Der gescheiterte Versuch, die Gravitation in der SRT zu behandeln, führte zur Entwicklung der Allgemeinen Relativitätstheorie durch Einstein. In diesem Abschnitt werden wir die Form der Lagrange-Funktion ausgehend vom nicht relativistischen Grenzfall und der Bedingung der Lorentz-Invarianz i.W. raten und dann die Konsequenzen überprüfen.

### 14.2.1 Lagrange-Gleichung für das freie Teilchen

Um die Lagrange-Mechanik für ein relativistisches Teilchen (einen relativistischen Massenpunkt) zu formulieren, können wir vom Hamiltonschen Prinzip ausgehen:  $\delta S = 0$ . Sicherlich müssen die Wirkung  $S$  und die Lagrange-Funktion  $L$  Lorentz-Skalare sein. Das erreichen wir durch die Definition der Wirkung

$$S := \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau L(x^0, x^1, x^2, x^3; u^0, u^1, u^2, u^3; \tau) \quad (14.27)$$

Diese führt analog zu Abschnitt 5.6 auf die Lagrange-Gleichungen 2. Art,

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial u^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (14.28)$$

Die Lagrange-Gleichungen enthalten Ableitungen nach Komponenten von Vierervektoren (Vierergradienten). Wir müssen kurz diskutieren, wie diese Ableitungen definiert sind. Da sicherlich gilt

$$\frac{\partial x^0}{\partial x^0} = \frac{\partial x^1}{\partial x^1} = \dots = 1, \quad (14.29)$$

folgt

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\mu} = 4 \quad (14.30)$$

(vgl.  $\text{div } \vec{r} = 3$ ). Dies legt nahe, dass die Ableitungen  $\partial/\partial x^\mu$  nach *kontravarianten* Komponenten  $x^\mu$  einen *kovarianten* Vektor bilden, denn sonst wäre der Ausdruck  $\partial x^\mu/\partial x^\mu$  nicht wohlgeformt. Wir schreiben also

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (14.31)$$

und analog

$$\partial^\mu := \frac{\partial}{\partial x_\mu}. \quad (14.32)$$

Man kann leicht zeigen, dass sich die  $\partial_\mu$  tatsächlich wie kovariante Komponenten transformieren: Es gilt

$$\underline{x}_\nu = L_\nu^\mu x_\mu \quad \text{und} \quad \underline{x}^\nu = L^\nu_\mu x^\mu. \quad (14.33)$$

Aus der Kettenregel und der zweiten Gleichung folgt

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \underline{x}^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial \underline{x}^\nu} = L^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial \underline{x}^\nu} = L^\nu_\mu \underline{\partial}_\nu. \quad (14.34)$$

Wegen  $L_\nu^\lambda L^\nu_\mu = \delta_\mu^\lambda$  lautet die Umkehrung

$$\underline{\partial}_\nu = L_\nu^\mu \partial_\mu. \quad (14.35)$$

Vergleich mit der ersten Gleichung in (14.33) ergibt die Behauptung.

Die Komponenten von  $(\partial_\mu)$  und  $(\partial^\mu)$  lauten

$$(\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right), \quad (14.36)$$

$$(\partial^0, \partial^1, \partial^2, \partial^3) = \left( \frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right). \quad (14.37)$$

Beachte, dass die Vorzeichen im Vergleich zu

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -\vec{r}), \quad (14.38)$$

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{r}) \quad (14.39)$$

umgekehrt sind. Als Beispiel betrachten wir die Viererdivergenz

$$\partial_\mu x^\mu = \frac{\partial x^0}{\partial x^0} + \frac{\partial x^1}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial x^2} + \frac{\partial x^3}{\partial x^3} = 4. \quad (14.40)$$

Wie muss  $L$  für ein *freies* Teilchen aussehen? Wir stellen die folgenden plausiblen Forderungen:

1. Wegen der Homogenität von Raum und Zeit und für ein „nicht alterndes“ Teilchen darf  $L$  nicht vom Orts-Vierervektor (Raum-Zeit-Punkt)  $(x^\mu)$  oder von  $\tau$  abhängen.
2.  $L$  muss ein Lorentz-Skalar sein, der wegen Punkt 1 nur vom Vierervektor  $(u^\mu)$  abhängt. Daher kann  $L$  nur vom Skalar  $u_\mu u^\mu$  abhängen.
3. Für  $v \ll c$  muss für  $L d\tau$  der nicht-relativistische Grenzfall

$$L_0 dt = \frac{1}{2} m v^2 dt \quad (14.41)$$

herauskommen, zumindest bis auf ein totales Differential.

Wir machen für die Lagrange-Funktion den Ansatz

$$L : \mathbb{R}^{4+4+1} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x^0, x^1, x^2, x^3, u^0, u^1, u^2, u^3, \tau) \mapsto \alpha \sqrt{u_\mu u^\mu} \quad (14.42)$$

mit einer noch unbestimmten Proportionalitätskonstanten  $\alpha$ . Dies ergibt

$$L d\tau = \alpha \sqrt{u_\mu u^\mu} d\tau = \alpha c \frac{dt}{\gamma} = \alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt. \quad (14.43)$$

Im Grenzfall  $v \ll c$  erhalten wir

$$L d\tau \cong \alpha c \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) dt = \alpha c dt - \frac{1}{2c} \alpha v^2 dt, \quad (14.44)$$

worin  $\alpha c dt$  ein irrelevantes totales Differential ist. Also müssen wir  $\alpha = -mc$  setzen und erhalten

$$L = -mc \sqrt{u_\mu u^\mu}. \quad (14.45)$$

Nun können wir die Lagrange-Gleichungen auswerten. Es ist

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial u^\mu} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x^\mu}}_{=0} \\ &= -mc \frac{d}{d\tau} \frac{\partial}{\partial u^\mu} \sqrt{g_{\nu\rho} u^\nu u^\rho} \\ &= -mc \frac{d}{d\tau} \frac{g_{\nu\rho} (\delta_\mu^\nu u^\rho + u^\nu \delta_\mu^\rho)}{2\sqrt{g_{\nu\rho} u^\nu u^\rho}} = -mc \frac{d}{d\tau} \frac{\dot{z} u_\mu}{\dot{z} \sqrt{u_\rho u^\rho}} \\ &= -m \frac{du_\mu}{d\tau} \end{aligned} \quad (14.46)$$

für  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Es ist wesentlich, dass wir nicht sofort in  $L$  die Identität  $u_\mu u^\mu = c^2$  einsetzen dürfen –  $L$  ist nicht einfach eine *Größe*, sondern eine *Funktion* von  $(u^\mu)$  und  $c^2$  ist eine andere Funktion als  $u_\mu u^\mu$ . Daher bekämen

wir sonst eine falsche Ableitung nach  $u^\mu$ . Erst nachdem wir die Ableitung nach  $u^\mu$  ausgeführt haben, dürfen wir die Identität ausnutzen.

Aus den Lagrange-Gleichungen folgt  $u^\mu = \text{const}$  und in Komponenten

$$u^0 = \gamma c = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \text{const} \quad (14.47)$$

und

$$\vec{u} = \gamma \vec{v} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \text{const}. \quad (14.48)$$

Die erste Gleichung ist redundant, da  $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$  ist. Also finden wir  $\vec{v} = \text{const}$ , wie im nicht-relativistischen Grenzfall – ein kräftefreies Teilchen bewegt sich gleichförmig und geradlinig. Newtons erstes Axiom bleibt also in der SRT gültig.

## 14.2.2 Lagrange-Gleichung für ein Teilchen im elektromagnetischen Feld

Im nicht-relativistischen Fall hatten wir

$$L = \frac{m}{2} v^2 + \frac{q}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} - q\phi. \quad (14.49)$$

Wir verwenden nun Gaußsche Einheiten, was für die relativistische Formulierung nützlich ist. Dies führt zu dem zusätzlichen Faktor  $1/c$  im zweiten Term. Der zweite und dritte Term sehen schon nach einem verallgemeinerten Skalarprodukt aus. Wir definieren das Vierervektorpotential

$$(A_0, A_1, A_2, A_3) := (\phi, -\vec{A}) \quad (14.50)$$

und „raten“ die relativistische Form der Lagrange-Funktion,

$$L = -mc \sqrt{u_\nu u^\nu} - \frac{q}{c} u^\nu A_\nu. \quad (14.51)$$

Den ersten Term hatten wir schon für das freie Teilchen gefunden. Die Lagrange-Gleichungen lauten dann

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial u^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \\ &= -m \frac{du_\mu}{d\tau} - \frac{q}{c} \frac{dA_\mu}{d\tau} + \frac{q}{c} \frac{\partial}{\partial x^\mu} u^\nu A_\nu \\ &= -m \frac{du_\mu}{d\tau} - \frac{q}{c} \frac{dA_\mu}{d\tau} + \frac{q}{c} u^\nu \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}, \end{aligned} \quad (14.52)$$

also

$$m \frac{du_\mu}{d\tau} = -\frac{q}{c} \frac{dA_\mu}{d\tau} + \frac{q}{c} u^\nu \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}. \quad (14.53)$$

Durch Vergleich mit Gl. (14.2) sehen wir, dass die relativistische Kraft auf ein Teilchen im elektromagnetischen Feld

$$K_\mu = -\frac{q}{c} \frac{dA_\mu}{d\tau} + \frac{q}{c} u^\nu \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}, \quad (14.54)$$

$$K^\mu = -\frac{q}{c} \frac{dA^\mu}{d\tau} + \frac{q}{c} u^\nu \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \quad (14.55)$$

lautet. Durch Einsetzen von  $u_\mu = dx_\mu/d\tau$  folgt

$$m \frac{d^2 x_\mu}{d\tau^2} = -\frac{q}{c} \frac{dA_\mu}{d\tau} + \frac{q}{c} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}. \quad (14.56)$$

Man kann zeigen, dass für  $v \ll c$  die Bewegungsgleichung mit der bekannten Lorentz-Kraft herauskommt.

Beispiel: Gleichförmiges, zeitunabhängiges  $\vec{E}$ -Feld in  $x$ -Richtung. In diesem Fall ist

$$\vec{E} = E \hat{x} \quad (14.57)$$

und eine sinnvolle Wahl der Potentiale („Eichung“) ist  $\phi = -Ex$  und  $\vec{A} = 0$ . Diese Wahl ist konsistent, da  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = E \hat{x}$ . Es folgt  $A_0 = -Ex \equiv -Ex^1, A_1 = A_2 = A_3 = 0$  und die Bewegungsgleichungen lauten, für  $u_0$ :

$$m \frac{du_0}{d\tau} = -\frac{q}{c} \frac{dA_0}{d\tau} + \frac{q}{c} u^0 \frac{\partial A_0}{\partial x^0} = \frac{qE}{c} \frac{dx^1}{d\tau} - \frac{qE}{c} u^0 \frac{\partial x^1}{\partial x^0}. \quad (14.58)$$

Es folgt

$$\frac{du^0}{d\tau} = \frac{du_0}{d\tau} = \frac{qE}{mc} \frac{dx^1}{d\tau} = \frac{qE}{mc} u^1. \quad (14.59)$$

Und für  $u_1$ :

$$m \frac{du_1}{d\tau} = -\frac{q}{c} \frac{dA_1}{d\tau} + \frac{q}{c} u^0 \frac{\partial A_0}{\partial x^1} = -\frac{q}{c} u^0 E = -\frac{qE}{c} u^0. \quad (14.60)$$

Es folgt

$$\frac{du^1}{d\tau} = -\frac{du_1}{d\tau} = +\frac{qE}{mc} u^0. \quad (14.61)$$

Wir erhalten also zwei gekoppelte Differentialgleichungen für  $u^0$  und  $u^1$ . Wenn wir sie jeweils nochmal nach  $\tau$  ableiten und eine in die andere einsetzen, erhalten wir

$$\frac{d^2 u^0}{d\tau^2} = \frac{qE}{mc} \frac{du^1}{d\tau} = \left(\frac{qE}{mc}\right)^2 u^0, \quad (14.62)$$

$$\frac{d^2 u^1}{d\tau^2} = \frac{qE}{mc} \frac{du^0}{d\tau} = \left(\frac{qE}{mc}\right)^2 u^1. \quad (14.63)$$

Wir betrachten speziell die Anfangsbedingung  $\vec{v}(0) = 0 \Rightarrow u^0(0) = c, u^1(0) = u^2(0) = u^3(0) = 0$  („Teilchen in Ruhe“). Dann ist die Lösung

$$u^0(\tau) = c \cosh \frac{qE}{mc} \tau, \quad (14.64)$$

$$u^1(\tau) = c \sinh \frac{qE}{mc} \tau. \quad (14.65)$$

Beachte zur Probe, dass wir

$$u_\mu u^\mu = (u^0)^2 - (u^1)^2 = c^2 \left( \cosh^2 \frac{qE}{mc} \tau - \sinh^2 \frac{qE}{mc} \tau \right) = c^2 \quad (14.66)$$

erhalten, wie es sein muss.

Wir wählen o.B.d.A. den Koordinatenursprung am Anfangs-Raum-Zeit-Punkt, also  $x^\mu(0) = 0$ . Aus dieser zusätzlichen Anfangsbedingungen folgt

$$ct = x^0(\tau) = \int_0^\tau d\tau' u^0(\tau') = \frac{mc^2}{qE} \sinh \frac{qE}{mc} \tau \quad (14.67)$$

$$x = x^1(\tau) = \int_0^\tau d\tau' u^1(\tau') = \frac{mc^2}{qE} \left( \cosh \frac{qE}{mc} \tau - 1 \right). \quad (14.68)$$

Für die Beschreibung der Bewegung im Laborsystem ist es nützlich, den Ort  $x$  durch die Laborzeit  $t$  auszudrücken,

$$x = \frac{mc^2}{qE} \left( \sqrt{\sinh^2 \frac{qE}{mc} \tau + 1} - 1 \right) = \frac{mc^2}{qE} \left( \sqrt{\left( \frac{qE}{mc} t \right)^2 + 1} - 1 \right). \quad (14.69)$$

Für kleine Zeiten ist dies

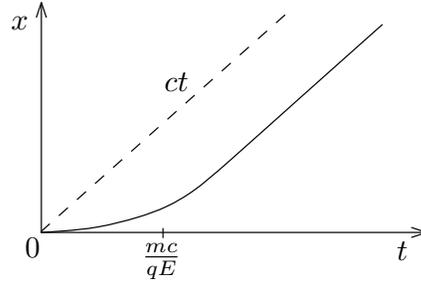
$$x \cong \frac{mc^2}{qE} \left( \lambda + \frac{1}{2} \left( \frac{qE}{mc} \right)^2 t^2 - \lambda \right) = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2 \equiv \frac{1}{2} at^2. \quad (14.70)$$

Das ist genau die nicht-relativistische, gleichförmig beschleunigte Bewegung. Unsere Rechnung stimmt also im nicht-relativistischen Grenzfall.

Für große Zeiten folgt dagegen

$$x \cong \frac{mc^2}{qE} \frac{qE}{mc} t = ct. \quad (14.71)$$

Die im Laborsystem gemessene Geschwindigkeit ist  $dx/dt$ . Diese geht für  $t \rightarrow \infty$  gegen  $c$ . Das Teilchen bewegt sich für  $t \gg mc/qE$  also praktisch mit Lichtgeschwindigkeit. Es wird aber trotz des gleichförmigen Feldes niemals schneller als  $c$ . Gleichung (14.65) zeigt, dass die erste Komponente der Vierer-Geschwindigkeit  $u^1$  über  $c$  hinaus wächst. Dies ist aber nicht die im Laborsystem gemessene Geschwindigkeit.



### 14.2.3 Übergang zur Hamilton-Mechanik

Am letzten Beispiel, dem Teilchen im elektromagnetischen Feld, betrachten wir noch den Übergang zum Hamilton-Formalismus. Wir definieren den kanonischen Impuls hier durch

$$p_\mu := - \frac{\partial L}{\partial u^\mu}, \quad (14.72)$$

das Minuszeichen sorgt dafür, dass die räumlichen Komponenten im nicht-relativistischen Grenzfall die bekannte Form haben. Es folgt

$$p_\mu = mc \frac{\partial}{\partial u^\mu} \sqrt{u_\nu u^\nu} + \frac{q}{c} A_\mu = mc \frac{u_\mu}{\sqrt{u_\nu u^\nu}} + \frac{q}{c} A_\mu = mu_\mu + \frac{q}{c} A_\mu. \quad (14.73)$$

In der Legendre-Transformation müssen die beiden Terme wegen des expliziten Minuszeichens in  $p_\mu$  nun das gleiche Vorzeichen haben. Wir definieren daher

$$\begin{aligned} \tilde{H}(x^\mu, p^\mu) &:= p_\mu u^\mu + L \\ &= p_\mu \frac{1}{m} \left( p^\mu - \frac{q}{c} A^\mu \right) - c \sqrt{\left( p_\mu - \frac{q}{c} A_\mu \right) \left( p^\mu - \frac{q}{c} A^\mu \right)} - \frac{q}{mc} \left( p^\mu - \frac{q}{c} A^\mu \right) A_\mu \\ &= \frac{1}{m} \left( p_\mu - \frac{q}{c} A_\mu \right) \left( p^\mu - \frac{q}{c} A^\mu \right) - c \sqrt{\left( p_\mu - \frac{q}{c} A_\mu \right) \left( p^\mu - \frac{q}{c} A^\mu \right)}. \end{aligned} \quad (14.74)$$

Man zeigt leicht, dass die kanonischen Gleichungen wieder dieselben Bewegungsgleichungen ergeben wie oben.  $\tilde{H}$  hat aber nicht die Bedeutung der Energie des Teilchens. Tatsächlich erhalten wir, wenn wir die Lösung der Bewegungsgleichungen in die Funktion  $\tilde{H}(x^\mu, p^\mu)$  einsetzen,

$$\left( p_\mu - \frac{q}{c} A_\mu \right) \left( p^\mu - \frac{q}{c} A^\mu \right) = m^2 u_\mu u^\mu = m^2 c^2 \quad (14.75)$$

$$\Rightarrow \tilde{H}(x^\mu, p^\mu) = mc^2 - mc^2 = 0. \quad (14.76)$$

Analog zum Fall der Lagrange-Funktion ist wichtig, sich klar zu machen, dass nicht etwa  $\tilde{H}$  als Funktion von  $x^\mu$  und  $p^\mu$  konstant gleich Null ist. Dann ergäben sich nicht die richtigen Bewegungsgleichungen, sondern einfach  $x^\mu = \text{const}$  und  $p^\mu = \text{const}$ . Vielmehr finden wir, dass die Hamilton-Funktion in unserem Beispiel nur für eine real mögliche Bahn den zeitunabhängigen Wert Null annimmt.

# Kapitel 15

## Hamilton-Jacobi-Theorie

Die Hamilton-Mechanik ist invariant unter der großen Klasse der kanonischen Transformationen. Es liegt nahe, diese Freiheit auszunutzen, um die Bewegungsgleichungen (kanonischen Gleichungen) zu vereinfachen. In diesem Kapitel besprechen wir eine Methode, die diese Idee umsetzt. Wir werden die gängige, nicht-relativistische Formulierung benutzen. Es ist möglich, die folgende Methode relativistisch zu verallgemeinern, dies geht aber über den Stoff dieser Vorlesung hinaus.

### 15.1 Die Hamilton-Jacobi-Gleichung

Wir haben wiederholt gesehen, dass zyklische Koordinaten die Lösung stark vereinfachen. Es wäre daher nützlich, alle Koordinaten mittels einer kanonischen Transformation zyklisch zu machen. Noch besser wäre, wenn auch die zugehörigen Impulse nicht in der Hamilton-Funktion  $\tilde{H}$  auftreten würden. Es erscheint kaum glaublich, dass das möglich sein könnte, aber es existiert tatsächlich ein Verfahren, das genau dies im Prinzip erreicht, wenn auch nur für eine bestimmte Klasse von Systemen.

Es sei  $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$  gegeben. Wir fordern mutig, dass  $\tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t) \equiv 0$  gelten soll. Dann sind die kanonischen Gleichungen alle trivial:

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_j = \text{const}, \quad (15.1)$$

$$\dot{P}_j = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_j = \text{const}. \quad (15.2)$$

Wir können dann  $(\vec{Q}, \vec{P})$  aus den Anfangsbedingungen bestimmen.

Es ist zweckmäßig, eine erzeugende Funktion vom Typ  $F_2(\vec{q}, \vec{P}, t)$  zu wählen. Es soll gelten

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0. \quad (15.3)$$

Die gesuchte Funktion  $F_2$  nennt man auch *Hamiltonsche Wirkungsfunktion* und verwendet das Symbol  $\mathcal{S}(\vec{q}, \vec{P}, t)$ . Einsetzen von  $p_j = \partial \mathcal{S} / \partial q_j$  in Gl. (15.3) ergibt

$$H\left(q_1, \dots, q_S; \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_S}; t\right) + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = 0. \quad (15.4)$$

Das ist die *Hamilton-Jacobi-Gleichung*. Es handelt sich um eine *partielle* Differentialgleichung, da sie partielle Ableitungen der gesuchten Funktion  $\mathcal{S}$  enthält. Sie ist erster Ordnung, da nur erste Ableitungen auftreten.

Beachte, dass die Hamilton-Jacobi-Gleichung nur die  $\vec{q}$ - und  $t$ -Abhängigkeit von  $\mathcal{S}$  betrifft, aber nicht die  $\vec{P}$ -Abhängigkeit. Die allgemeine Lösung für  $\mathcal{S}$  als Funktion von  $\vec{q}$  und  $t$  enthält  $S + 1$  freie Parameter, da die Hamilton-Jacobi-Gleichung  $S + 1$  erste Ableitungen enthält. Einen dieser Parameter können wir als additive

Konstante wählen, da überhaupt nur Ableitungen von  $\mathcal{S}$  vorkommen, nicht  $\mathcal{S}$  selbst. Diese Konstante ist aus demselben Grund irrelevant für die Dynamik und kann ignoriert werden. Es bleiben  $S$  Parameter  $\alpha_j$ . Wir haben bisher noch gar nicht festgelegt, was die neuen Variablen  $\vec{Q}$ ,  $\vec{P}$  eigentlich sein sollen (außer Konstanten der Bewegung). Jetzt wählen wir die  $S$  Impulse  $P_j$  als die  $S$  Parameter  $\alpha_j$  in der Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung. Da  $\dot{H} = 0$  ist, sind diese Impulse konstant,

$$P_j = \alpha_j = \text{const} \quad \text{für } j = 1, \dots, S. \quad (15.5)$$

Haben wir die Hamilton-Jacobi-Gleichung (15.4) gelöst, so sind die neuen Koordinaten gegeben durch

$$Q_j(\vec{q}, \vec{\alpha}, t) = \frac{\partial \mathcal{S}(\vec{q}, \vec{\alpha}, t)}{\partial \alpha_j} =: \beta_j = \text{const} \quad \text{für } j = 1, \dots, S, \quad (15.6)$$

wobei  $\mathcal{S}$  die Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung ist. Dies sind  $S$  algebraische Gleichungen für  $S$  Unbekannte  $q_j = q_j(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, t)$ , die wir im Prinzip lösen können. Schließlich erhalten wir die Impulse

$$p_j(\vec{q}, \vec{\alpha}, t) = \frac{\partial \mathcal{S}(\vec{q}, \vec{\alpha}, t)}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, S \quad (15.7)$$

durch Einsetzen der Lösungen für  $q_j$  und damit die allgemeine Lösung für  $(\vec{q}, \vec{p})$  abhängig von  $2S$  freien Parametern  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ , die wir z.B. aus den Anfangsbedingungen bestimmen.

Ist das immer möglich? Können wir also für jedes mechanische System auf diese Weise eine erzeugende Funktion  $\mathcal{S}$  finden, die eine kanonische Transformation auf ein triviales Problem erzeugt, zumindest im Prinzip? Die Antwort ist *nein*. Das Problem liegt in der Wahl der neuen Impulse  $P_j$  als die  $S$  Parameter in der Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung. Das setzt voraus, dass diese Größen die fundamentalen Poisson-Klammern  $\{P_i, P_j\}_{\vec{q}, \vec{p}} = 0$  erfüllen, oder allgemeiner, dass überhaupt  $S$  Konstanten der Bewegung  $P_j(\vec{q}, \vec{p})$  existieren, die  $\{P_i, P_j\}_{\vec{q}, \vec{p}} = 0$  erfüllen. Das ist aber i.A. nicht der Fall. Dieser Punkt wird in den meisten Lehrbüchern unter den Teppich gekehrt. Bei der Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung drückt sich das Problem i.A. dadurch aus, dass keine eindeutige und überall differenzierbare Wirkungsfunktion  $\mathcal{S}(\vec{q}, \vec{P}, t)$  auf dem gesamten Konfigurationsraum (Raum der  $\vec{q}$ ) und für alle Zeiten  $t$  existiert.

Beispiel: Der harmonische Oszillator hat die Hamilton-Funktion

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2. \quad (15.8)$$

Wir suchen die Lösung  $\mathcal{S}(q, P, t)$  der Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$H\left(q, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = 0 \quad (15.9)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2 + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = 0. \quad (15.10)$$

Wir lösen diese Gleichung mit dem *Separationsansatz*  $\mathcal{S}(q, P, t) = W(q, P) + V(t, P)$ :

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2 = -\frac{\partial V}{\partial t}. \quad (15.11)$$

Die linke Seite hängt von  $q$ , aber nicht von  $t$  ab, die rechte von  $t$ , aber nicht von  $q$ . Damit beide für *alle*  $q, t$  gleich sind, müssen sie beide von  $q, t$  unabhängig sein. Es existiert also eine nur von  $P$  abhängige Funktion  $\alpha(P)$  mit

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2 = \alpha, \quad (15.12)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\alpha. \quad (15.13)$$

Es folgt einerseits

$$V = -\alpha t + V_0, \quad (15.14)$$

wobei  $V_0$  nur von  $P$  abhängen darf, und andererseits

$$\frac{\partial W}{\partial q} = \pm \sqrt{2m\alpha - m^2\omega_0^2 q^2} = \pm m\omega_0 \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega_0^2} - q^2} \quad (15.15)$$

$$\Rightarrow W = \pm m\omega_0 \int dq \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega_0^2} - q^2} + W_0, \quad (15.16)$$

wobei  $W_0$  nur von  $P$  abhängen darf. Wir können  $\alpha(P)$  beliebig wählen. Wir wählen speziell  $\alpha = P$ . Dann ist

$$S(q, \alpha, t) = W + V = \pm m\omega_0 \int dq \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega_0^2} - q^2} - \alpha t + \mathcal{S}_0(\alpha). \quad (15.17)$$

Die Größe  $\mathcal{S}_0(\alpha)$  hängt nicht von den unabhängigen Variablen  $q, t$  der Hamilton-Jacobi-Gleichung ab und ist gerade der  $(S+1)$ -te, irrelevante Parameter in der allgemeinen Lösung. Wir können daher  $\mathcal{S}_0(\alpha) = 0$  setzen. Das Integral über  $q$  lassen wir stehen, weil wir seine explizite Form im Folgenden gar nicht benötigen. Es folgt

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \pm m\omega_0 \int dq \frac{1}{2\sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega_0^2} - q^2}} \frac{2}{m\omega_0^2} - t \\ &= \pm \frac{1}{\omega_0} \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega_0^2} - q^2}} - t = \pm \frac{1}{\omega_0} \arcsin \left( \omega_0 \sqrt{\frac{m}{2\alpha}} q \right) - t. \end{aligned} \quad (15.18)$$

Die Hamilton-Jacobi-Gleichung stellt aber sicher, dass  $Q = \text{const} =: \beta$  ist. Wir stellen nach  $q$  um:

$$q = \pm \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{2\alpha}{m}} \sin \omega_0(t + \beta). \quad (15.19)$$

Damit ist das Problem gelöst. Weiter ist der Impuls, unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung,

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \pm m\omega_0 \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega_0^2} - q^2}, \quad (15.20)$$

und, mit  $q$  eingesetzt,

$$p = \pm m\omega_0 \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega_0^2} - \frac{2\alpha}{m\omega_0^2} \sin^2 \omega_0(t + \beta)} = \pm \sqrt{2\alpha m} \cos \omega_0(t + \beta). \quad (15.21)$$

Das Vorzeichen können wir als „+“ wählen, da „-“ durch eine Phasenverschiebung  $\omega_0\beta \rightarrow \omega_0\beta + \pi$  absorbiert werden kann. Damit haben wir die allgemeine Lösung gefunden, die wie erwartet zwei Parameter  $\alpha, \beta$  enthält. Es ist natürlich dieselbe Lösung, die wir schon kennen.

Der Hamilton-Jacobi-Formalismus ist zugegebenermaßen nicht sehr nützlich bei der Lösung des ohnehin einfachen Problems des harmonischen Oszillators. Er ist aber konzeptionell interessant: Wir haben  $S$  gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung (Lagrange) in  $2S$  gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung (Hamilton) und dann in *eine* partielle Differentialgleichung 1. Ordnung (Hamilton-Jacobi) übersetzt.

## 15.2 Bedeutung der Wirkungsfunktion

Die Wirkungsfunktion  $S(\vec{q}, \vec{P}, t)$  erzeugt nicht nur eine kanonische Transformation mit  $\tilde{H} = 0$ , sondern hat auch eine unmittelbare physikalische Interpretation. Um diese zu finden, bilden wir die totale Zeitableitung

$$\frac{dS}{dt} = \sum_j \left( \underbrace{\frac{\partial S}{\partial q_j}}_{=p_j} \dot{q}_j + \frac{\partial S}{\partial P_j} \underbrace{\dot{P}_j}_{=0} \right) + \frac{\partial S}{\partial t}$$

$$= \sum_j p_j \dot{q}_j + \underbrace{\tilde{H}}_{=0} - H = L. \quad (15.22)$$

Die totale Zeitableitung ist also die Lagrange-Funktion.

Dieses Ergebnis ist überraschend, weil wir oben gesehen haben, dass eine totale Zeitableitung in  $L$  irrelevant für die Bewegungsgleichungen ist. Des Rätsels Lösung ist, dass  $\mathcal{S}$  von den Variablen  $\vec{q}$ ,  $\vec{P}$ ,  $t$  abhängt und wir bei der Herleitung verwendet haben, dass alle  $P_j$  Konstanten der Bewegung sind. Die  $P_j$  sind aber Funktionen von  $\vec{q}$ ,  $\vec{p}$ ,  $t$ , deren Konstanz erst aus der Lösung der Bewegungsgleichungen folgt. Das Resultat gilt also nur für die *tatsächliche* Bewegung  $\vec{q}(t)$  des Systems. Es impliziert nicht, dass sich die Funktion  $L(\vec{q}, \vec{q}, t)$  *allgemein* als totale Zeitableitung schreiben lässt.

Damit wird die Bezeichnung von  $\mathcal{S}$  einsichtig: Die im Hamiltonschen Prinzip auftretende *Wirkung* ist das bestimmte Integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L \quad (15.23)$$

zwischen den festen Anfangs- und Endzeiten. Also ist

$$S = \mathcal{S}(t_2) - \mathcal{S}(t_1). \quad (15.24)$$

Die Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung liefert also zusätzlich die Wirkung für die tatsächliche Bewegung des Systems.

Beispiel: Für den harmonischen Oszillator haben wir

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(q, \alpha, t) &= m\omega_0 \int dq \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega_0^2} - q^2} - \alpha t + \text{const} \\ &= \frac{\alpha}{\omega_0} \arcsin \sqrt{\frac{m\omega_0^2}{2\alpha}} q + \sqrt{\frac{\alpha m}{2}} q \sqrt{1 - \frac{m\omega_0^2}{2\alpha} q^2} - \alpha t + \text{const} \end{aligned} \quad (15.25)$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{S}}{dt} &= \left( \sqrt{\frac{m\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{m\omega_0^2}{2\alpha} q^2}} + \sqrt{\frac{\alpha m}{2}} \sqrt{1 - \frac{m\omega_0^2}{2\alpha} q^2} - \sqrt{\frac{\alpha m}{2}} q \frac{m\omega_0^2}{2\alpha} \frac{q}{\sqrt{1 - \frac{m\omega_0^2}{2\alpha} q^2}} \right) \dot{q} - \alpha \\ &= \sqrt{\frac{m\alpha}{2}} \left( 1 - \frac{m\omega_0^2}{2\alpha} q^2 \right) \frac{\dot{q}}{\sqrt{1 - \frac{m\omega_0^2}{2\alpha} q^2}} + \sqrt{\frac{\alpha m}{2}} \sqrt{1 - \frac{m\omega_0^2}{2\alpha} q^2} \dot{q} - \alpha \\ &= \sqrt{2\alpha m} \sqrt{1 - \frac{m\omega_0^2}{2\alpha} q^2} \dot{q} - \alpha = m \sqrt{\frac{2\alpha}{m} - \omega_0^2 q^2} \dot{q} - \alpha. \end{aligned} \quad (15.26)$$

Gleichung (15.12) zeigt, dass  $\alpha$  die erhaltene Energie  $E$  ist. Also setzen wir

$$\alpha = E = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 q^2 \quad (15.27)$$

ein:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{S}}{dt} &= m \sqrt{\dot{q}^2 + \omega_0^2 q^2 - \omega_0^2 q^2} \dot{q} - \frac{1}{2} m\dot{q}^2 - \frac{1}{2} m\omega_0^2 q^2 \\ &= \frac{1}{2} m\dot{q}^2 - \frac{1}{2} m\omega_0^2 q^2 = L(q, \dot{q}). \end{aligned} \quad (15.28)$$

Für allgemeine Funktionen  $q = q(t)$  ist dies nicht die totale Zeitableitung irgendeiner Funktion  $F(q, t)$ . Wir haben uns beim Einsetzen von  $\alpha = E$  auf die tatsächliche Bewegung beschränkt.

### 15.3 Die Hamiltonsche charakteristische Funktion

Der Separationsansatz aus dem Beispiel aus Abschnitt 15.1 lässt sich immer anwenden, wenn die (alte) Hamilton-Funktion  $H$  nicht explizit (und daher auch nicht implizit) von der Zeit abhängt. Dann lautet die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$H\left(q_1, \dots, q_S; \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_S}\right) + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = 0. \quad (15.29)$$

Mit dem Separationsansatz

$$\mathcal{S}(\vec{q}, \vec{\alpha}, t) = \mathcal{W}(\vec{q}, \vec{\alpha}) - Et \quad (15.30)$$

erhalten wir

$$H\left(q_1, \dots, q_S; \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q_S}\right) = E. \quad (15.31)$$

Ist das System konservativ mit höchstens skleronomen Zwangsbedingungen, so ist die Hamilton-Funktion gleich der Energie, daher das Symbol  $E$ . Die Beziehung gilt aber allgemeiner, wenn immer  $\partial H / \partial t = 0$  ist.  $\mathcal{W}$  nennt man *Hamiltonsche charakteristische Funktion*.

Die Funktion  $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\vec{q}, \vec{P})$  lässt sich als erzeugende Funktion vom Typ 2 auffassen, die außerdem nicht explizit von der Zeit abhängt. Die von ihr erzeugte kanonische Transformation lautet

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_j}, \quad (15.32)$$

$$Q_j = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial P_j} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial P_j}, \quad (15.33)$$

$$\tilde{H} = H. \quad (15.34)$$

Per Konstruktion sind die neuen Impulse  $P_j = \alpha_j$  konstant. Weiter ist auch  $H = E$  konstant. Nach der dritten Gleichung ist

$$\tilde{H} = H = E = \text{const.} \quad (15.35)$$

Ausgedrückt durch die neuen Variablen kann  $\tilde{H}$  daher nur von den Konstanten  $P_j = \alpha_j$  abhängen. Der erste Satz von kanonischen Gleichungen lautet also

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_j} = \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \tilde{H}(\vec{\alpha}) =: \omega_j(\vec{\alpha}), \quad (15.36)$$

wobei die  $\omega_j(\vec{\alpha})$  alle konstant sind, weil sie nur von Konstanten abhängen. Es folgt sofort

$$Q_j = \omega_j(\vec{\alpha})t + \beta_j \quad (15.37)$$

mit  $S$  weiteren Konstanten  $\beta_j$ . Aus den  $S$  Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \mathcal{W}(\vec{q}, \vec{\alpha}) = Q_j = \omega_j(\vec{\alpha})t + \beta_j \quad (15.38)$$

erhalten wir schließlich die  $S$  generalisierten Koordinaten  $q_j(t)$ .

Wie die ursprüngliche Hamilton-Jacobi-Gleichung liefert dieses Verfahren nur dann eine globale Lösung, wenn  $S$  Konstanten der Bewegung  $\alpha_j$  existieren, die unabhängig sind und die fundamentalen Poisson-Klammern  $\{\alpha_i, \alpha_j\} = 0$  erfüllen. Im nächsten Kapitel werden wir für Systeme mit dieser Eigenschaft den Begriff *integrabel* einführen und sehen, welche Relevanz Integrabilität hat. Außerdem werden wir untersuchen, was passiert, wenn weniger Konstanten existieren.



# Kapitel 16

## Nichtlineare Dynamik

In diesem letzten Kapitel der Vorlesung wollen wir die möglichen Bewegungen von mechanischen Systemen genauer ansehen. Das Experiment zeigt, dass gewisse Systeme eine einfache Dynamik zeigen, in dem Sinn, dass die Bewegung eine Überlagerung von gleichförmigen Translationen und periodischen Bewegungen ist. Das ist z.B. für das Zweikörperproblem und für den symmetrischen schweren Kreisel der Fall. Andere Systeme zeigen eine komplexe Dynamik, die wir nicht so zerlegen können und die wir „chaotisch“ nennen. Dazu gehören das Doppelpendel und das  $N$ -Körper-System mit  $N > 2$ . Zentral für die Unterscheidung ist die Idee der *Integrabilität*. In diesem Kapitel beschränken wir uns auf zeitunabhängige Hamilton-Funktionen.

### 16.1 Integrabilität

Es gibt verschiedene, nicht äquivalente Begriffe der Integrabilität. Moderne Untersuchungen verwenden oft Methoden der Differentialgeometrie und Topologie und können daher in dieser Vorlesung nicht besprochen werden. Aber auch sonst können wir diesem Thema hier nicht wirklich gerecht werden. Zumindest qualitativ können wir aber sagen, was Integrabilität bedeuten soll: Ein mechanisches System soll *integrabel* genannt werden, wenn die Lösung seiner Bewegungsgleichungen auf die Berechnung von eindimensionalen Integralen (also auf „Quadraturen“) zurückgeführt werden kann. Ob diese Berechnung analytisch oder nur numerisch möglich ist, ist dabei unerheblich. Die Definition soll ja nicht davon abhängen, welche Integrale für wichtig genug gehalten wurden, um eigene Namen zu bekommen.

Systeme mit *einem* Freiheitsgrad ( $S = 1$ ) und  $\partial H/\partial t = 0$  sind immer integrabel. Wir können nämlich die Gleichung

$$H(q, p) = \text{const} =: E \quad (16.1)$$

( $E$  ist nicht unbedingt die Energie) nach  $p$  auflösen,

$$p = \Pi(q, E). \quad (16.2)$$

Die erste kanonische Gleichung ist

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} =: v(q, p), \quad (16.3)$$

also

$$\dot{q} = v(q, \Pi(q, E)), \quad (16.4)$$

was wir durch Trennung der Variablen lösen können,

$$\frac{dq}{v(q, \Pi(q, E))} = dt \quad (16.5)$$

$$\Rightarrow \int \frac{dq}{v(q, \Pi(q, E))} = t + C. \quad (16.6)$$

Die Lösung wurde also tatsächlich auf ein eindimensionales Integral zurückgeführt. Es ist die allgemeine Lösung, da sie die zwei Parameter  $E$  und  $C$  enthält.

Im Beispiel können wir die Lösung der Bewegungsgleichungen, *zwei* Gleichungen erster Ordnung, auf *eine* Integration zurückführen, weil eine Konstante der Bewegung (Erhaltungsgröße), nämlich  $H$ , existiert. Konstanten der Bewegung spielen allgemein für die Integrabilität eine zentrale Rolle.

### 16.1.1 Der Involutionsatz von Liouville und Arnold

Liouville und Arnold haben gezeigt, unter welchen Bedingungen die gebundenen Bewegungen eines Systems integrierbar sind. Der Satz formuliert *hinreichende* Bedingungen, er sagt nichts über *notwendige* Bedingungen aus. Alternativ werden die Voraussetzungen des Satzes auch zur *Definition* von Integrabilität verwendet. Wir werden in diesem Sinn von „Integrabilität nach Liouville und Arnold“ sprechen. Die Aussage lautet:

Ein räumlich beschränktes System mit  $S$  Freiheitsgraden ist integrierbar, wenn  $S$  Phasenfunktionen  $I_j(\vec{q}, \vec{p})$ ,  $j = 1, \dots, S$ , mit den folgenden Eigenschaften existieren:

1. Die  $I_j$  sind Konstanten der Bewegung, also  $\{H, I_j\} = 0$ .
2. Die Poisson-Klammern der  $I_j$  verschwinden,

$$\{I_i, I_j\} = 0 \quad \forall i, j. \quad (16.7)$$

Man sagt, solche Funktionen sind *in Involution*.

3. Die totalen Differentiale

$$dI_j = \sum_k \left( \frac{\partial I_j}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial I_j}{\partial p_k} dp_k \right) \quad (16.8)$$

sind linear unabhängig. Das bedeutet, dass der Rang der  $S \times 2S$ -Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial I_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial I_1}{\partial q_S} & \frac{\partial I_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial I_1}{\partial p_S} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial I_S}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial I_S}{\partial q_S} & \frac{\partial I_S}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial I_S}{\partial p_S} \end{pmatrix} \quad (16.9)$$

maximal, nämlich gleich  $S$ , sein muss.

Den nicht einfachen Beweis lassen wir hier aus. Die Behauptung ist aber plausibel: Nur wenn die Bedingungen erfüllt sind, können wir die  $S$  Konstanten  $I_j$  als neue Impulse  $P_j$  in einer kanonischen Transformation wählen. Das heißt, dass die Wahl der freien Parameter in der Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung aus Kapitel 15 als  $P_j$  nur möglich ist, wenn das System integrierbar nach Liouville und Arnold ist.

Es existiert immer *mindestens eine* Konstante der Bewegung, die die Bedingungen des Satzes erfüllt, nämlich  $I_1 = H$ . Andererseits existieren *höchstens*  $S$  solche Konstanten der Bewegung. Das können wir leicht zeigen: Wir nehmen dazu an, dass  $S + 1$  Konstanten der Bewegung  $I_j$ ,  $j = 1, \dots, S + 1$ , existieren, die die Bedingungen erfüllen. Wir können z.B.  $I_1$  bis  $I_S$  als neue Impulse wählen:

$$P_j = I_j, \quad j = 1, \dots, S. \quad (16.10)$$

Neue Koordinaten  $Q_j$  bestimmen wir so, dass die Transformation  $(\vec{q}, \vec{p}) \rightarrow (\vec{Q}, \vec{P})$  kanonisch ist. Nun soll  $dI_{S+1}$  von  $dI_1 = dP_1, \dots, dI_S = dP_S$  linear unabhängig sein. Daher können wir *keine* Koeffizienten  $\gamma_1, \dots, \gamma_S$  finden, so dass gilt

$$dI_{S+1} = \sum_{j=1}^S \gamma_j dP_j. \quad (16.11)$$

Andererseits bilden  $(\vec{Q}, \vec{P})$  einen vollständigen Satz von Variablen, also können wir Koeffizienten  $\delta_j, \gamma_j$  finden mit

$$dI_{S+1} = \sum_{j=1}^S (\delta_j dQ_j + \gamma_j dP_j). \quad (16.12)$$

Aus den beiden Aussagen folgt, dass zumindest ein  $k$  existiert, so dass  $\delta_k \neq 0$  ist. Aber dann ist

$$\begin{aligned} \{I_{S+1}, I_k\} &= \{I_{S+1}, P_k\} = \sum_j \left( \frac{\partial I_{S+1}}{\partial Q_j} \frac{\partial P_k}{\partial P_j} - \frac{\partial I_{S+1}}{\partial P_j} \frac{\partial P_k}{\partial Q_j} \right) \\ &= \frac{\partial I_{S+1}}{\partial Q_k} = \delta_k \neq 0, \end{aligned} \quad (16.13)$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. Mehr als  $S$  Konstanten der Bewegung können also nicht unabhängig *und* in Involution sein.

Wir betrachten nun einige Beispiele:

1. Ein Freiheitsgrad ( $S = 1$ ): Solche Systeme sind immer integrabel, da  $I_1 = H$  eine Konstante der Bewegung ist und Bedingungen 2 und 3 trivial erfüllt sind.
2. Allgemeines dreidimensionales Zentralpotential: Die Hamilton-Funktion lautet

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(|\vec{r}|). \quad (16.14)$$

Konstanten der Bewegung sind  $H = E$  und der Drehimpuls  $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$ . Letzteres folgt mit Hilfe des Noether-Theorems aus der Invarianz von  $H$  unter beliebigen Rotationen, siehe Abschnitt 5.8. Das sind zunächst vier Erhaltungsgrößen. Sie erfüllen aber nicht die Bedingungen des Involutionssatzes. Es gilt nämlich

$$\{L_x, L_y\} = L_z, \quad (16.15)$$

$$\{L_y, L_z\} = L_x, \quad (16.16)$$

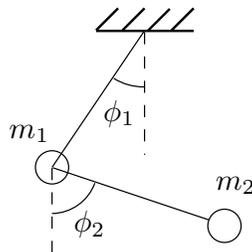
$$\{L_z, L_x\} = L_y, \quad (16.17)$$

die Drehimpulskomponenten sind also nicht in Involution. Jedoch kann man leicht zeigen, dass für  $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ , was natürlich auch eine Erhaltungsgröße ist, gilt

$$\{L^2, L_x\} = \{L^2, L_y\} = \{L^2, L_z\} = 0. \quad (16.18)$$

Damit haben wir drei Konstanten der Bewegung, z.B.  $E, L_z$  und  $L^2$ , die in Involution stehen. Wegen  $S = 3$  ist das Zentralkraftproblem damit integrabel. Dies gilt auch für das Zweikörperproblem der Himmelsmechanik, für das die Relativbewegung ja von der Hamilton-Funktion in Gl. (16.14) beschrieben wird.

3. Das ebene Doppelpendel:



Hier haben wir  $S = 2$  Freiheitsgrade. Eine Konstante der Bewegung ist die Hamilton-Funktion (Gesamtenergie)  $H(\phi_1, \phi_2, p_1, p_2) = E$ . Es existiert keine kontinuierliche Symmetrie, die nach dem Noether-Theorem eine weitere Erhaltungsgröße bewirken würde, und tatsächlich existiert auch keine, die die Bedingungen des Involutionssatzes erfüllt. Das Doppelpendel ist also nicht integrabel nach Liouville und Arnold.

4. Das Dreikörperproblem: Drei Massenpunkte, die mit Zentralkräften aneinander gekoppelt sind, haben neun Freiheitsgrade. Drei davon betreffen die Translation des Schwerpunktes, die für verschwindende äußere Kräfte ungebunden und damit nicht Gegenstand des Involutionsatzes ist. (Die Bewegung des Schwerpunktes ist gleichförmig und geradlinig und trivialerweise integrabel. Sechs der zehn Erhaltungsgrößen aus Abschnitt 4.5 betreffen diese Translation, nämlich die Komponenten des Gesamtimpulses  $\vec{p}$  und von  $\vec{R}(t) - (\vec{p}/m)t$ .) Die Relativbewegung hat  $S = 6$  Freiheitsgrade, aber nur drei Konstanten der Bewegung, die die Bedingungen des Satzes erfüllen:  $E$ ,  $L_z$  und  $L^2$ . Damit ist das System nicht integrabel nach Liouville und Arnold.
5. Der schwere Kreisel: Für den *symmetrischen* schweren Kreisel aus Abschnitt 9.4.2 sind die Euler-Winkel  $\phi$  und  $\psi$  zyklisch. Es existieren daher drei Konstanten der Bewegung:  $H$ ,  $p_\phi = L_{L3}$  und  $p_\psi = L_3$ . Diese sind in Involution; die entsprechenden Poisson-Klammern verschwinden trivial. Wegen  $S = 3$  ist der symmetrische schwere Kreisel damit integrabel. Für den *asymmetrischen* schweren Kreisel ist nur  $\phi$ , aber nicht  $\psi$  zyklisch. Er hat daher nur zwei Konstanten der Bewegung in Involution, nämlich  $H$  und  $p_\phi = L_{L3}$ . (Die Erhaltung der Drehimpulskomponente  $L_{L3}$  um die Senkrechte im Laborsystem folgt aus dem Noether-Theorem, da das System invariant unter Rotationen um diese Achse ist.) Der asymmetrische schwere Kreisel ist daher nicht integrabel. Zur Integrabilität von Kreiseln existiert eine umfangreiche und bis in die Gegenwart reichende Literatur.

## 16.2 Tori und Poincaré-Schnitte

Ein System mit  $S$  Freiheitsgraden habe  $k$  unabhängige Konstanten der Bewegung. (Unabhängigkeit ist im Sinne der 3. Bedingung des Involutionsatzes gemeint.) Der Phasenraum ist  $2S$ -dimensional. Die Festlegung der  $k$  Erhaltungsgrößen schränkt die möglichen Bewegungen aber auf  $(2S - k)$ -dimensionale Teilmengen (Untermannigfaltigkeiten) ein. Ein *integrables* System hat *mindestens*  $S$  Erhaltungsgrößen, davon genau  $S$  in Involution. Wir betrachten den generischen integrablen Fall  $k = S$ . Dann ist die Bewegung wegen  $2S - k = 2S - S = S$  auf  $S$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten eingeschränkt. Diese nennt man aufgrund ihrer topologischen Eigenschaften *Tori* (Einzahl *Torus*). Die bildliche Darstellung der Tori im hochdimensionalen Phasenraum ist offensichtlich schwierig. Sehr nützlich ist die Betrachtung von Poincaré-Schnitten, insbesondere für Systeme mit  $S = 2$  Freiheitsgraden.

Wir untersuchen hier nur diesen Fall. Phasenraumbahnen sind dann Kurven im vierdimensionalen Phasenraum. Ein *Poincaré-Schnitt* einer Phasenraumbahn wird wie folgt erzeugt:

1. Wähle eine Koordinate und den zugehörigen Impuls. O.B.d.A. wählen wir  $q_1, p_1$ .
2. Wähle Anfangswerte  $q_1^0, q_2^0, p_1^0, p_2^0$ . Sie legen eine Phasenraumbahn fest.
3. Für eine gebundene Bewegung wird die Koordinate  $q_2$  typischerweise für gewisse Zeiten wieder den Wert  $q_2^0$  annehmen. Trage  $(q_1(t), p_1(t))$  für alle Zeiten  $t \geq 0$  auf, für die  $q_2(t) = q_2^0$  gilt.  $p_2(t)$  ist dabei unerheblich.

Man liest manchmal, der Poincaré-Schnitt sei die Schnittmenge der Phasenraumbahnen und der, in diesem Fall, von  $q_1$  und  $p_1$  aufgespannten Ebene mit festen Werten  $q_2 = q_2^0, p_2 = p_2^0$ . Das ist *falsch*. In einem vierdimensionalen Raum schneiden sich eine Ebene und eine Kurve generisch überhaupt nicht, analog zu zwei Kurven im dreidimensionalen Raum. Startet die Phasenraumbahn auf der Ebene mit  $q_2 = q_2^0, p_2 = p_2^0$ , hat sie i.A. keinen Grund, sie später erneut zu schneiden. Korrekt werden bei der Konstruktion zunächst die Schnitte der Phasenraumbahn mit  $q_2 = q_2^0$  bestimmt und dann die resultierenden Punkte im dreidimensionalen  $(q_1, p_1, p_2)$ -Raum in die  $(q_1, p_1)$ -Ebene projiziert.

Wenn *keine* Erhaltungsgrößen existieren ( $k = 0$ ), noch nicht einmal  $H$ , dann ist die Phasenraumbahn nicht eingeschränkt. Wir erwarten, dass die Bahn dann für lange Zeiten jedem Punkt zumindest in einem Teil des Phasenraums beliebig nahe kommt, weil es kein Prinzip gibt, dass sie daran hindern würde. Der Schnitt der Bahn mit  $q_2 = q_2^0$  ist dann eine diskrete Menge, die für  $t \rightarrow \infty$  den  $(q_1, p_1, p_2)$ -Raum oder zumindest eine Teilmenge  $M$  davon ausfüllt. Damit gemeint ist, dass in jeder Umgebung eines Punktes aus  $M$  ein Punkt des Schnittes liegt; der Schnitt liegt *dicht* in  $M$ . Der Poincaré-Schnitt ist die Projektion des Schnittes auf die  $(q_1, p_1)$ -Ebene, die für  $t \rightarrow \infty$  zumindest einen Teil dieser Ebene ausfüllt.

Gibt es *eine* einzige Erhaltungsgröße ( $k = 1$ ), insbesondere  $H$ , dann zwingt diese die Bahn, auf einer dreidimensionalen Untermannigfaltigkeit zu bleiben. Die Schnittpunkte mit  $q_2 = q_2^0$  liegen dann auf einer *Fläche* (zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit) im  $(q_1, p_1, p_2)$ -Raum und füllen diese i.A. für  $t \rightarrow \infty$  (liegen dicht). Die Projektion dieser Fläche auf die  $(q_1, p_1)$ -Ebene ist ebenfalls eine Fläche. Der Poincaré-Schnitt sieht also wie im Fall  $k = 0$  aus.

Für *zwei* Erhaltungsgrößen ( $k = 2 = S$ ) ist das System integrabel, wenn sie in Involution sind. Die Bahnen liegen auf zweidimensionalen Tori. Der Schnitt einer Bahn mit  $q_2 = q_2^0$  liegt dann auf dem Schnitt dieser Tori mit  $q_2 = q_2^0$ , das ergibt eine *Kurve* (die evtl. nicht zusammenhängend ist) im  $(q_1, p_1, p_2)$ -Raum und füllen diese i.A. für  $t \rightarrow \infty$ . Deren Projektion auf die  $(q_1, p_1)$ -Ebene ist ebenfalls eine Kurve. Der Poincaré-Schnitt besteht daher aus Punkten auf dieser Kurve. Diese Kurve erhalten wir also, indem wir zunächst den Torus für die sich aus den Anfangswerten  $q_1^0, q_2^0, p_1^0, p_2^0$  ergebenden Werte der beiden Erhaltungsgrößen  $I_1$  und  $I_2$  mit  $q_2 = q_2^0$  schneiden. Dies ergibt geschlossene Kurven im  $(q_1, p_1, p_2)$ -Raum, da der Torus eine geschlossene Fläche ist. Die Projektion auf die  $(q_1, p_1)$ -Ebene ergibt dann die gesuchten Kurven.

Beispiel: Die zwei gekoppelten Oszillatoren aus Abschnitt 10.2 sind integrabel. Zwei Erhaltungsgrößen in Involution sind z.B. die in den beiden Normalschwingungen steckenden Energien

$$E_1 = \frac{(p_1 + p_2)^2}{4m} + \frac{K}{4} (q_1 + q_2)^2, \quad (16.19)$$

$$E_2 = \frac{(p_1 - p_2)^2}{4m} + \frac{K + 2K'}{4} (q_1 - q_2)^2. \quad (16.20)$$

Wir wählen  $q_2^0 = 0, p_2^0 = 0$ , dann ist

$$E_1 = \frac{(p_1^0)^2}{4m} + \frac{K}{4} (q_1^0)^2, \quad (16.21)$$

$$E_2 = \frac{(p_1^0)^2}{4m} + \frac{K + 2K'}{4} (q_1^0)^2. \quad (16.22)$$

Der Schnitt des Torus mit  $q_2 = q_2^0 = 0$  erfüllt die Gleichungen

$$\frac{(p_1 + p_2)^2}{4m} + \frac{K}{4} q_1^2 = E_1, \quad (16.23)$$

$$\frac{(p_1 - p_2)^2}{4m} + \frac{K + 2K'}{4} q_1^2 = E_2. \quad (16.24)$$

Diese zwei Gleichungen für drei Unbekannte beschreiben Kurven. Wegen der Projektion auf  $(q_1, p_1)$  kann  $p_2$  beliebig sein. Wir müssen also  $p_2$  eliminieren:

$$\frac{p_1 p_2}{m} - \frac{K'}{2} q_1^2 = E_1 - E_2 \quad (16.25)$$

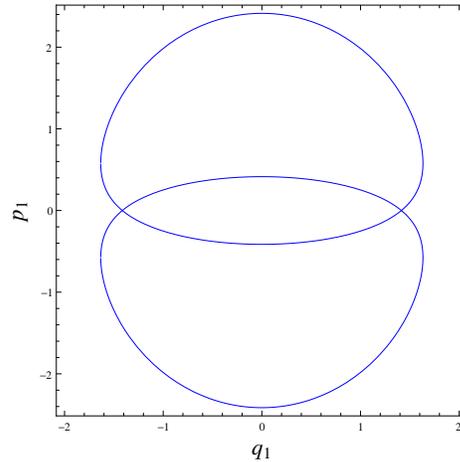
$$\Rightarrow p_2 = \frac{m}{p_1} \left( E_1 - E_2 + \frac{K'}{2} q_1^2 \right) \quad (16.26)$$

$$\Rightarrow \frac{\left[ p_1 + \frac{m}{p_1} \left( E_1 - E_2 + \frac{K'}{2} q_1^2 \right) \right]^2}{4m} + \frac{K}{4} q_1^2 = E_1 \quad (16.27)$$

$$\Rightarrow \left[ p_1^2 + m \left( E_1 - E_2 + \frac{K'}{2} q_1^2 \right) \right]^2 + mK q_1^2 p_1^2 - 4mE_1 p_1^2 = 0 \quad (16.28)$$

$$\Rightarrow p_1^4 - 2m(E_1 + E_2)p_1^2 + m(K + K')q_1^2 p_1^2 + \frac{m^2 K'^2}{4} q_1^4 + m^2 K'(E_1 - E_2)q_1^2 + m^2(E_1 - E_2)^2 = 0. \quad (16.29)$$

Für gegebene  $E_1, E_2$  beschreibt diese Gleichung Kurven, hier z.B. für die Werte  $E_1 = 1$  und  $E_2 = 2$  sowie die Parameter  $m = 1, K = K' = 1$ :



Nun gibt es zwei Fälle:

1. Stehen die Eigenfrequenzen

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{K + 2K'}{m}} \quad (16.30)$$

in einem *rationalen* Verhältnis zueinander, d.h. ist

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{1 + \frac{2K'}{K}} \in \mathbb{Q}, \quad (16.31)$$

so ist die Bewegung *periodisch*. Die Periode ist das kleinste gemeinsame Vielfache von  $T_1 = 2\pi/\omega_1$  und  $T_2 = 2\pi/\omega_2$ . Nach einer Periode beginnt die Phasenraumbahn, dieselben Punkte erneut zu durchlaufen. Der Poincaré-Schnitt besteht dann nur aus endlich vielen Punkten auf der erlaubten Kurve.

2. Ist  $\omega_1/\omega_2$  dagegen *irrational*, so ist die Bewegung nicht periodisch. Da sie eine Superposition von endlich vielen (nämlich hier zwei) periodischen Bewegungen ist, nennt man sie *bedingt periodisch*. Der Poincaré-Schnitt füllt die erlaubte Kurve für  $t \rightarrow \infty$  aus (liegt dicht).

## 16.3 Deterministisches Chaos

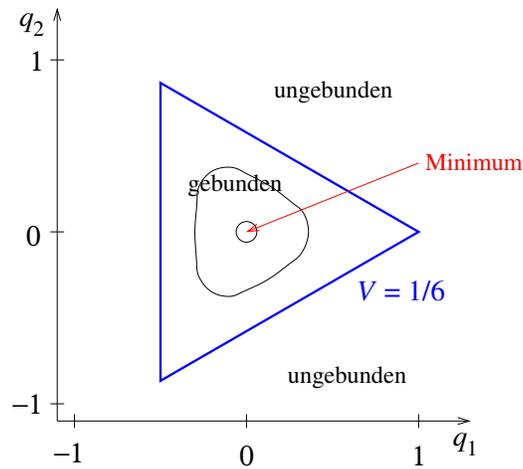
Was passiert, wenn ein Hamiltonsches System nicht integrabel ist? Für gegebene Anfangsbedingungen existiert trotzdem eine eindeutig bestimmte Lösung für alle Zeiten. Die Dynamik ist im Rahmen der klassischen Mechanik also *deterministisch*. Andererseits ist die Phasenraumbahn nicht auf einen  $S$ -dimensionalen Torus im  $2S$ -dimensionalen Phasenraum eingeschränkt. Wir erwarten, dass sie weniger regulär als im integrablen Fall sein kann. Poincaré, Koopman und von Neumann haben gezeigt, dass schon für nicht integrable Systeme mit  $S = 2$  Freiheitsgraden Bewegungen auftreten können, die weder periodisch noch bedingt periodisch sind. Dafür wurde der Begriff „*chaotisch*“ geprägt.

### 16.3.1 Das Hénon-Heiles-Modell

Wir betrachten beispielhaft eine recht einfache Hamilton-Funktion mit  $S = 2$ , die zu chaotischem Verhalten führt,

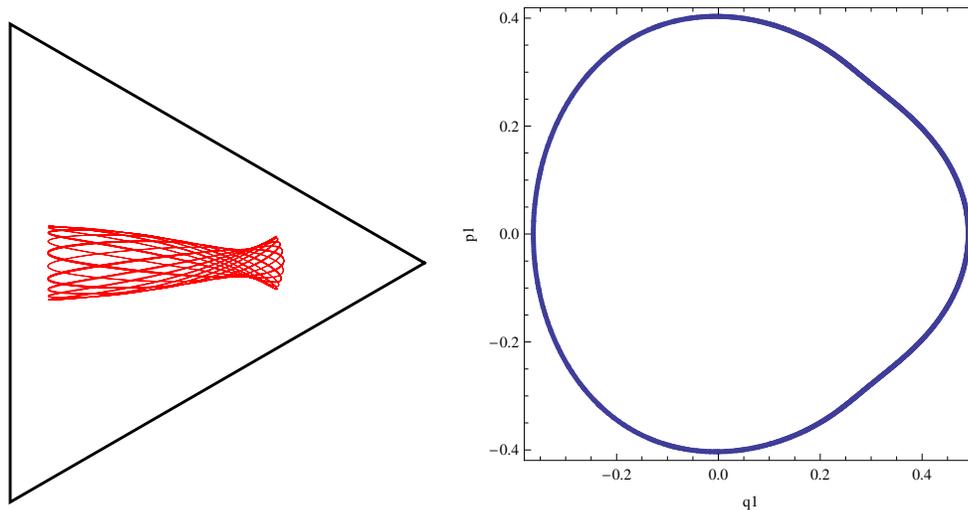
$$H = T + V = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} + \frac{q_1^2}{2} + \frac{q_2^2}{2} + q_1 q_2^2 - \frac{q_1^3}{3}. \quad (16.32)$$

Dieses Modell geht auf Hénon und Heiles zurück. Das Potential hat ein lokales Minimum bei  $q_1 = 0, q_2 = 0$  und eine dreizählige Rotationssymmetrie. Da es sich um eine diskrete Symmetrie handelt, existiert keine damit verbundene Erhaltungsgröße.

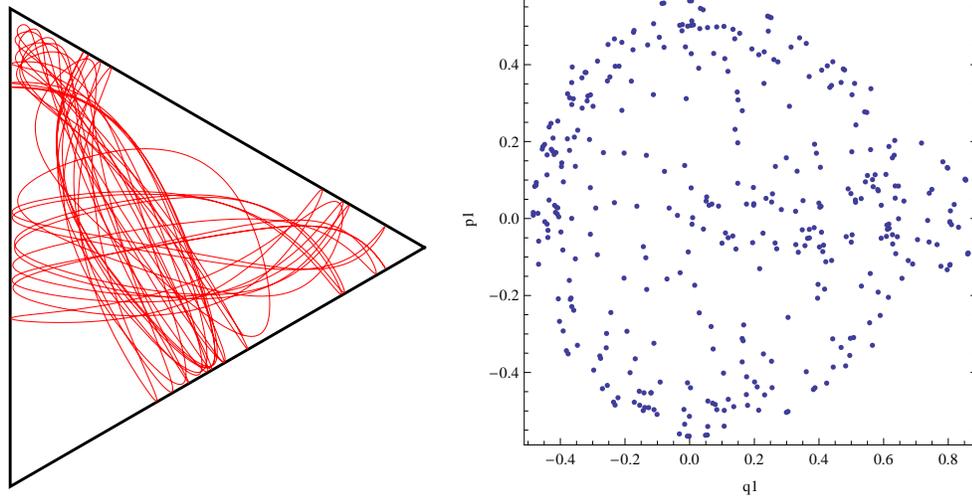


Die einzige Konstante der Bewegung ist die Energie  $H = E$ . Werte im Intervall  $0 \leq E \leq 1/6$  führen zu gebundenen Bewegungen. Das System ist nicht integrabel im Sinne von Liouville und Arnold. Dennoch existieren bedingt periodische und sogar periodische Lösungen, z.B. die eindimensionalen Oszillationen entlang der  $q_1$ -Achse oder der anderen beiden Symmetrieachsen. Poincaré-Schnitte sind nützlich, um etwas über die Verteilung von (bedingt) periodischen und chaotischen Bahnen zu lernen.

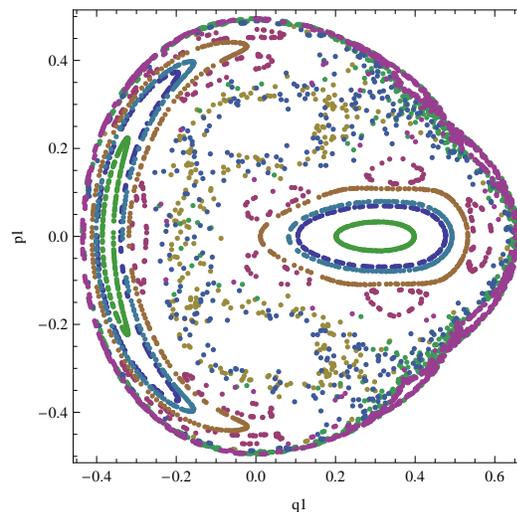
1. Beispiel für eine bedingt periodische Bahn im Konfigurationsraum mit  $E = 1/12$  und den zugehörigen Poincaré-Schnitt für  $q_2 = 0$ :



2. Beispiel für eine chaotische Bahn mit  $E = 0,99 \times 1/6$  und den zugehörigen Poincaré-Schnitt für  $q_2 = 0$ ; dasselbe Zeitintervall wie in Beispiel 1 ist dargestellt:



3. Poincaré-Schnitte für neun verschiedene Bahnen für dieselbe Energie  $E = 1/8$  aber unterschiedliche Anfangsbedingungen (unterschiedliche Farben). Wir finden neben chaotischen Bereichen auch bedingt periodische. Das Bild des entsprechenden Torus im Poincaré-Schnitt kann aber aus vielen geschlossenen Kurven bestehen (violette Punkte).



### 16.3.2 Das KAM-Theorem

Das für das Hénon-Heiles-Modell beobachtete Verhalten – Koexistenz von einfachen und komplizierten bedingt periodischen Bahnen, die „Inselgruppen“ im Poincaré-Schnitt bilden, und chaotischen Bahnen – ist typisch für den Fall nicht zu starker Nichtintegrabilität. Das wichtige *Kolmogorov-Arnold-Moser-* (KAM-) *Theorem* beschreibt, welche Tori (d.h. welche bedingt periodischen Bahnen) eines integrablen Systems überleben, wenn eine kleine, nicht integrable Störung  $H_1$  zu einer Hamilton-Funktion  $H_0$  hinzugefügt wird,

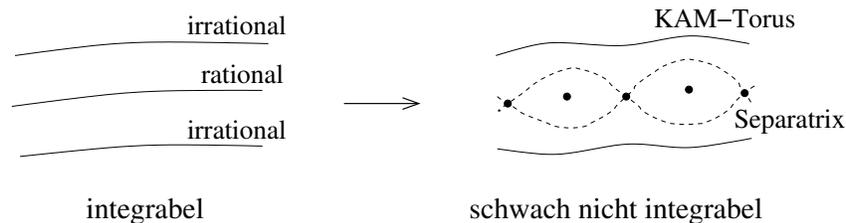
$$H = H_0 + H_1. \quad (16.33)$$

$\omega_1$  und  $\omega_2$  seien die beiden Eigenfrequenzen des integrablen Systems mit der Hamilton-Funktion  $H_0$  (vgl. das Beispiel der zwei gekoppelten harmonischen Oszillatoren in Abschnitt 16.2).  $I_1$  und  $I_2$  seien zwei Konstante der Bewegung in Involution ( $E_1$  und  $E_2$  im genannten Beispiel). Eine der technischen Voraussetzungen, die im KAM-Theorem gemacht werden, ist, dass die Jacobi-Determinante  $\partial(\omega_1, \omega_2)/\partial(I_1, I_2)$  nicht verschwindet. Beim Hénon-Heiles-Modell ist eine mögliche Wahl jedoch  $H_0 = (p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2)/2$ , so dass  $\omega_1 = \omega_2 = 1 = \text{const}$  und

die Jacobi-Determinante verschwindet. Daher ist das KAM-Theorem nicht direkt auf das Hénon-Heiles-Modell anwendbar. Für dieses steuert die Energie  $E$  die Stärke der Nichtintegrabilität.

Wichtig für das KAM-Theorem ist das Verhältnis  $\omega_2/\omega_1$  der beiden Eigenfrequenzen der (bedingt) periodischen Lösungen des ungestörten integrablen Systems  $H_0$ . Ist  $\omega_2/\omega_1$  rational (periodische Lösung), wird der entsprechende Torus durch beliebig schwache Nichtintegrabilität zerstört. Dies ist eine Art Resonanzkatastrophe: Da das ungestörte System immer wieder zu demselben Zustand zurückkehrt, hat die nicht integrable Störung beliebig viel Zeit zu wirken und kann daher beliebig schwach sein. Das *Poincaré-Birkhoff-Theorem* sagt aus, dass der Torus für  $\omega_2/\omega_1 = m/n$  (teilerfremd) durch eine Kette von  $n$  elliptischen und  $n$  hyperbolischen Fixpunkten im Poincaré-Schnitt ersetzt wird. Die hyperbolischen Fixpunkte sind Endpunkte von Separatrizen. (Zu den Begriffen „Fixpunkt“ und „Separatrix“ siehe Abschnitt 11.3.)

Die Tori mit irrationalem Verhältnis  $\omega_2/\omega_1$  bleiben für schwache Nichtintegrabilität zunächst erhalten, man nennt sie dann *KAM-Tori*. Das bedeutet, dass die Phasenraumbahnen für Anfangswerte  $q_1^0, q_2^0, p_1^0, p_2^0$  auf einem KAM-Torus für alle Zeiten auf diesem Torus bleiben. Daher müssen für solche Anfangswerte *zwei* Konstanten der Bewegung existieren, die diesen Torus definieren. Das bedeutet nicht, dass man für die zweite Konstante der Bewegung, neben der Energie  $H = E$ , einen geschlossenen Ausdruck hinschreiben kann. Für Anfangswerte nicht auf einem KAM-Torus ist die Bewegung chaotisch und es existiert nur die eine Invariante  $H = E$ . Die KAM-Tori werden für wachsende Nichtintegrabilität nach und nach zerstört, und zwar umso später, je schlechter die irrationale Zahl  $\omega_2/\omega_1$  durch rationale Zahlen dargestellt werden kann. Diese Aussage lässt sich mathematisch exakt formulieren. Als letztes verschwindet der KAM-Torus mit  $\omega_2/\omega_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ , dem „Goldenen Schnitt“.



Die Poincaré-Schnitte haben schon für schwache Nichtintegrabilität Strukturen auf allen Skalen, weil *alle* Tori mit rationalen  $\omega_2/\omega_1$  durch Ketten von Fixpunkten mit Separatrizen ersetzt werden. Die rationalen Zahlen liegen bekanntlich dicht in den reellen Zahlen. Es gibt also unendlich viele solche Ketten und Separatrizen. Weiterführende Betrachtungen müssen Wahlpflichtvorlesungen überlassen bleiben. Das gilt auch für das noch komplexere Verhalten für mehr als zwei Freiheitsgrade.

### 16.3.3 Ljapunow-Exponenten

Eine wichtige Eigenschaft von chaotischen Bahnen ist ihre extreme Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen. Bahnen mit nur geringfügig verschiedenen Anfangsbedingungen unterscheiden sich für hinreichend späte Zeit beliebig stark, insoweit es mit der Erhaltung der Energie vereinbar ist. Da wir den Zustand eines Systems nie ganz genau messen können, wird die Vorhersage der Bewegung für späte Zeiten beliebig ungenau. Selbst wenn wir von einem exakt bekannten Zustand starten, wird jede Vorhersage, die auf numerischer Integration der Bewegungsgleichungen beruht, beliebig ungenau, da die kleinen numerischen Fehler für späte Zeiten zu großen Abweichungen führen.

Um zu verstehen, wann eine Bahn instabil ist, müssen wir zunächst den Begriff der Stabilität schärfen. Eine Bahn  $(\vec{q}(t), \vec{p}(t)) = \vec{\pi}(t)$  heißt *stabil*, wenn zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass für  $\vec{\pi}'(0)$  mit

$$\|\vec{\pi}'(0) - \vec{\pi}(0)\| < \delta \tag{16.34}$$

gilt

$$\|\vec{\pi}'(t) - \vec{\pi}(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0. \tag{16.35}$$

Hier ist  $\|\dots\|$  eine geeignet definierte Norm. In Worten, alle Bahnen für geringfügig gestörte Anfangsbedingungen bleiben in der Nähe der ungestörten Bahn. Andernfalls heißt die Bahn *instabil*.

Existieren überhaupt stabile Bahnen in diesem Sinne? Die kanonischen Gleichungen lauten

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}. \quad (16.36)$$

Daraus folgen für die Differenzen

$$\delta q_j := q'_j - q_j, \quad \delta p_j := p'_j - p_j \quad (16.37)$$

die Gleichungen

$$\delta \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}(\vec{q} + \delta \vec{q}, \vec{p} + \delta \vec{p}) - \frac{\partial H}{\partial p_j}(\vec{q}, \vec{p}), \quad (16.38)$$

$$\delta \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}(\vec{q} + \delta \vec{q}, \vec{p} + \delta \vec{p}) + \frac{\partial H}{\partial q_j}(\vec{q}, \vec{p}). \quad (16.39)$$

Wir entwickeln in eine Taylor-Reihe in  $\delta \vec{\pi} = (\delta \vec{q}, \delta \vec{p})$ :

$$\delta \dot{q}_j = \sum_k \left( \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_j}(\vec{q}, \vec{p}) \delta q_k + \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_j}(\vec{q}, \vec{p}) \delta p_k \right) + \mathcal{O}(\delta \vec{\pi}^2), \quad (16.40)$$

$$\delta \dot{p}_j = -\sum_k \left( \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial q_j}(\vec{q}, \vec{p}) \delta q_k + \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q_j}(\vec{q}, \vec{p}) \delta p_k \right) + \mathcal{O}(\delta \vec{\pi}^2). \quad (16.41)$$

In führender Ordnung finden wir also

$$\delta \dot{\vec{\pi}} = \overleftrightarrow{M} \delta \vec{\pi} \quad (16.42)$$

mit der Matrix, in Blockform,

$$\overleftrightarrow{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (16.43)$$

mit Komponenten

$$A_{jk} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_k}, \quad (16.44)$$

$$B_{jk} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_k}, \quad (16.45)$$

$$C_{jk} = -\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_k}, \quad (16.46)$$

$$D_{jk} = -\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_k}. \quad (16.47)$$

Der Exponentialansatz  $\delta \vec{\pi}(t) = \vec{\pi}_0 e^{\lambda t}$  führt auf die Gleichung

$$\lambda \vec{\pi}_0 = \overleftrightarrow{M} \vec{\pi}_0. \quad (16.48)$$

Das ist eine Eigenwertgleichung für  $\overleftrightarrow{M}$ . Die Eigenwerte  $\lambda$  heißen *Ljapunow-Exponenten*. Sie sind i.A. nicht reell, da die Matrix  $\overleftrightarrow{M}$  nicht symmetrisch ist. Wir sehen, dass die Lösungen  $\delta \vec{\pi}(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  abfallen (die Trajektorien sich also aneinander annähern), wenn  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  ist, und anwachsen (die Trajektorien sich abstoßen), wenn  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  ist. Im letzteren Fall ist die Bewegung sicherlich instabil. Dann ist der Abbruch der Taylor-Reihe nach dem Term erster Ordnung natürlich nicht sinnvoll, um die tatsächliche Lösung zu finden.

Formal wird das Ergebnis durch die *Stabilitätssätze von Ljapunow* beschrieben:

1. Gilt überall entlang der Bahn (bis auf isolierte Punkte) für alle Eigenwerte  $\lambda_i$  von  $\overleftrightarrow{M}$ , dass  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ , so ist die Bahn *stabil*.

2. Existiert zumindest entlang eines Teils der Bahn ein Eigenwert  $\lambda_i$  von  $\overleftrightarrow{M}$  mit  $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ , so ist die Bahn *instabil*.
3. Gilt überall entlang der Bahn (bis auf isolierte Punkte) für alle Eigenwerte  $\lambda_i$  von  $\overleftrightarrow{M}$ , dass  $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$ , und existiert zumindest entlang eines Teils der Bahn ein Eigenwert  $\lambda_j$  mit  $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$ , so ist die Stabilität *marginal*. I.A. kann die Stabilität dann nicht durch Betrachtung der ersten Ordnung entschieden werden.

Für die zeitunabhängigen, Hamiltonschen Systeme, die wir hier ausschließlich betrachten, kann Fall 1 (stabile Bahnen) nicht auftreten. Die Summe aller Eigenwerte ist nämlich

$$\sum_{i=1}^{2S} \lambda_i = \operatorname{Sp} \overleftrightarrow{M} = \sum_{j=1}^S \left( \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_j} \right) = 0. \quad (16.49)$$

Daher können nicht alle Eigenwerte negative Realteile haben. Wenn alle Eigenwerte verschwindende Realteile haben,  $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$ , ist die Bahn marginal stabil. Existiert ein Eigenwert mit  $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ , so ist die Bahn instabil. Existiert dagegen ein Eigenwert mit  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ , so muss es einen anderen mit  $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$  geben, damit Gl. (16.49) erfüllt ist, und die Bahn ist ebenfalls instabil.

Anhand der Planetenbewegung können wir sehen, warum keine stabilen Bahnen im Sinne von Ljapunow auftreten: Wenn wir z.B. den Bahnradius geringfügig verändern, ändert das geringfügig die Umlaufzeit. Dann bleibt aber schon allein der Ort  $\vec{r}'(t)$  auf der gestörten Bahn nicht für alle Zeiten in der Nähe des Ortes  $\vec{r}(t)$  auf der ursprünglichen Bahn. Gleichung (16.35) wird also nicht erfüllt.

Integrable Systeme haben *ausschließlich* marginal stabile Bahnen. Äquivalent dazu folgt aus der Existenz instabiler Bahnen (evtl. neben marginal stabilen Bahnen), dass ein System nicht integrabel ist. Man definiert manchmal ein chaotisches System als eines, für das instabile Bahnen auftreten.

Beispiel: Für das Hénon-Heiles-Modell lautet die Matrix  $\overleftrightarrow{M}$ ,

$$\overleftrightarrow{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2q_1 - 1 & -2q_2 & 0 & 0 \\ -2q_2 & -2q_1 - 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (16.50)$$

Die vier Eigenwerte sind

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-1 - 2\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}, \quad (16.51)$$

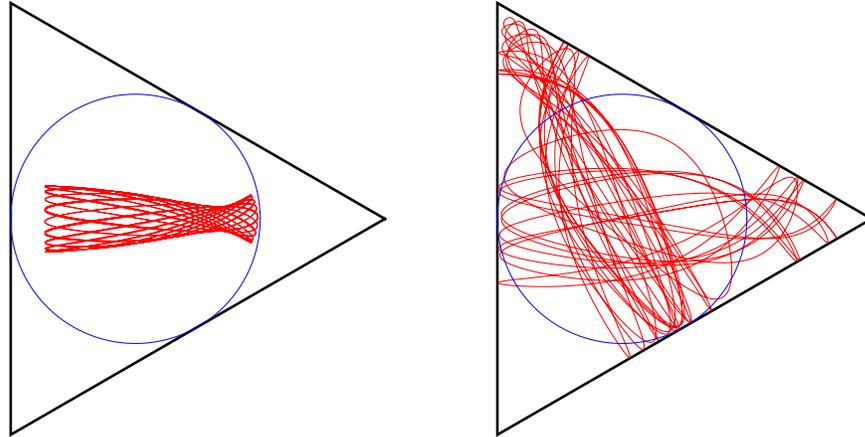
$$\lambda_{3,4} = \pm \sqrt{-1 + 2\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}. \quad (16.52)$$

Offenbar sind  $\lambda_{1,2}$  immer rein imaginär. Für die übrigen Eigenwerte gilt

- $\lambda_{3,4}$  sind rein imaginär für  $q_1^2 + q_2^2 < 1/4$ ,
- $\lambda_{3,4} = 0$  für  $q_1^2 + q_2^2 = 1/4$ ,
- $\lambda_{3,4}$  sind reell und  $\lambda_3 > 0$ ,  $\lambda_4 < 0$  für  $q_1^2 + q_2^2 > 1/4$ .

Damit liegt für  $q_1^2 + q_2^2 \leq 1/4$  marginale Stabilität und für  $q_1^2 + q_2^2 > 1/4$  Instabilität vor.

Wie erwähnt ist es hinreichend für Instabilität, wenn irgendwo entlang der Bahn  $q_1^2 + q_2^2 > 1/4$  erfüllt ist. Für die chaotische Bahn im vorigen Beispiel ist das der Fall, für die bedingt periodische Bahn dagegen nicht. Dies erkennt man, wenn man die Bahn im Ortsraum (Konfigurationsbahn) mit dem Kreis  $q_1^2 + q_2^2 = 1/4$  vergleicht, dies ist der Inkreis des Dreiecks definiert durch  $V = 1/6$ :



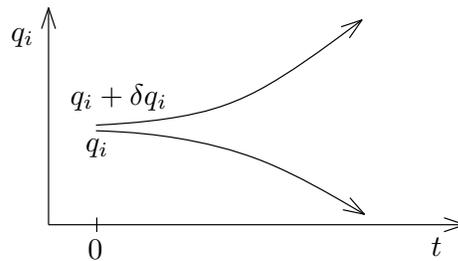
Für das Hénon-Heiles-Modell gilt sicher  $q_1^2 + q_2^2 \leq 1/4$ , falls die Energie  $E \leq 1/8$  erfüllt. Dennoch existieren auch für  $E \leq 1/8$  chaotische Bahnen, siehe Abschnitt 16.3.1. Wir erkennen, dass zwar integrable Systeme ausschließlich marginal stabile Bahnen haben, dass der Umkehrschluss aber nicht gilt. Selbst wenn alle Bahnen marginal stabil sind, schließt dies Chaos nicht aus.

Die Untersuchung des Ljapunow-Exponenten gestattet eine Klassifikation der Bahnen, ohne die Bewegungsgleichungen lösen zu müssen. Im Gegensatz dazu erfordert die Konstruktion von Poincaré-Schnitten die, i.A. numerische, Integration der Bewegungsgleichungen. Man muss sich aber klar sein, dass, wie das letzte Beispiel zeigt, marginale Stabilität aller Bahnen Chaos nicht ausschließt.

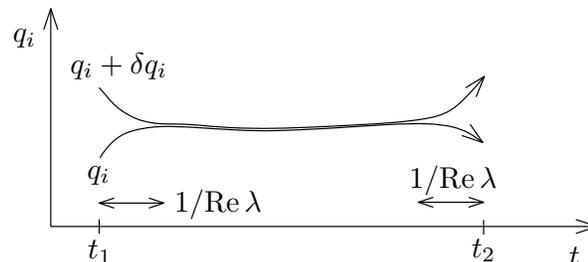
### 16.3.4 Bahnenbüschel

Zum Abschluss erwähnen wir, gewissermaßen als Dessert, eine weniger bekannte, überraschende Eigenschaft chaotischer Bahnen. Wir haben gesehen, dass chaotische Bahnen mit eng benachbarten Anfangswerten  $\vec{q}(0)$ ,  $\vec{p}(0)$  exponentiell auseinanderlaufen. Das wird durch den Ljapunow-Exponenten  $\lambda$  mit dem größten Realteil kontrolliert:

$$\delta \vec{q}, \delta \vec{p} \sim e^{\lambda t}. \quad (16.53)$$



Anstelle des *Anfangswertproblems* mit vorgegebenen  $\vec{q}(0)$ ,  $\vec{p}(0)$  können wir auch das *Randwertproblem* mit vorgegebenen Konfigurationen  $\vec{q}(t_1)$ ,  $\vec{q}(t_2)$  zu zwei unterschiedlichen Zeitpunkten betrachten. Das haben wir z.B. bei der Diskussion des Hamiltonschen Prinzips getan. Wie sehen die Bahnen mit benachbarten Randwerten im chaotischen Fall aus? Die auf den ersten Blick überraschende Antwort ist: Sie ziehen sich an!



Wir zeigen nun, dass gilt

$$|\delta q_i(t)| \ll |\delta q_i(t_1)|, |\delta q_i(t_2)|, \quad (16.54)$$

$$|\delta p_i(t)| \ll |\delta p_i(t_1)|, |\delta p_i(t_2)|, \quad (16.55)$$

sofern  $t - t_1 \gg 1/\operatorname{Re} \lambda$  und  $t_2 - t \gg 1/\operatorname{Re} \lambda$  ist, wobei  $\lambda$  der Ljapunow-Exponent mit dem größten Realteil ist. Die Bedingung bedeutet, dass wir Zeiten „im Inneren“ des Intervalls betrachten, nicht zu nah an den Enden. Beweisidee: Wir nehmen  $\vec{q}(t)$ ,  $\vec{p}(t)$  für eine Zeit  $t$  im Inneren des Intervalls als Anfangswerte. Da  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  und  $t_2 - t \gg 1/\operatorname{Re} \lambda$  folgt  $|\delta q_i(t_2)| \gg |\delta q_i(t)|$  (die chaotischen Bahnen laufen auseinander). Das analoge Argument funktioniert auch rückwärts in der Zeit, also ist auch  $|\delta q_i(t_1)| \gg |\delta q_i(t)|$ .

Chaotische Bahnen bilden also *Bahnenbüschel* von lokal eng benachbarten Bahnen. Wir müssen offenbar gut aufpassen, wenn wir Begriffe wie Instabilität verwenden. Die Lösung des *Randwertproblems* ist im instabilen, chaotischen Fall sehr *unempfindlich* gegenüber Änderungen der Randbedingungen. Diese Erkenntnis führt in der quantenmechanischen Betrachtung von klassisch chaotischen Systemen zu interessanten Effekten.